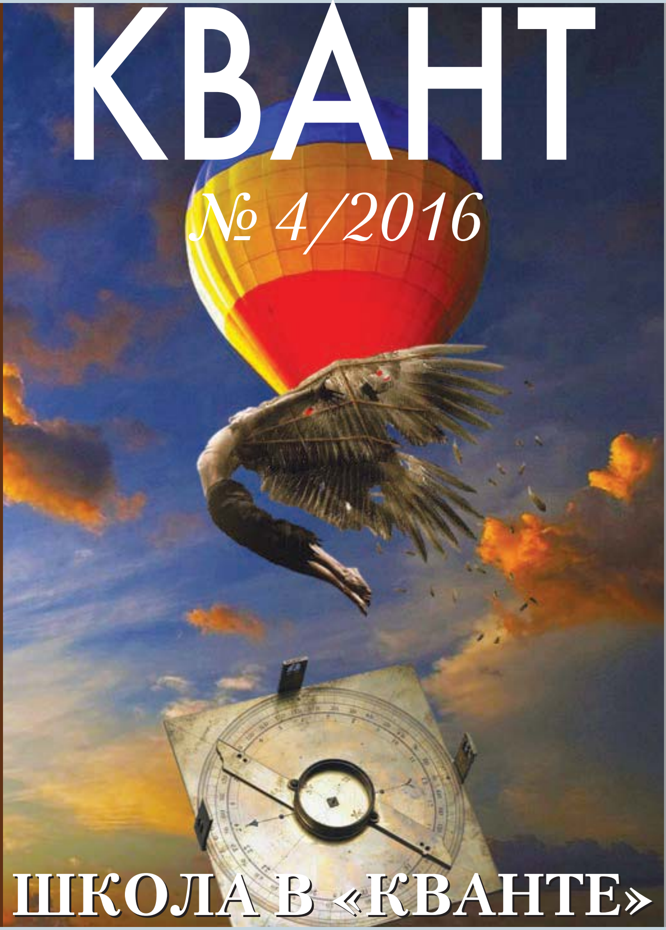
Приложение к журналу

КВАНТ

№ 4/2016



ШКОЛА В «КВАНТЕ»

ФИЗИКА

Часть 3

УДК 53
ББК 22.3
Ш67

Приложение к журналу
«Квант» №4/2016

Ш67 **Школа в «Кванте». Физика. Часть 3** / Составители В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан. – М.: Издательство МЦНМО, 2016. – 232 с. (Приложение к журналу «Квант» №4/2016.)

ISBN 978-5-4439-1106-9

Книга представляет собой сборник статей по всем разделам школьной физики, опубликованных в журнале «Квант» в рубрике «Школа в «Кванте» в течение 2009–2014 годов. Небольшой объем, незагруженность математическими выкладками и живость изложения – вот отличительные особенности статей этой рубрики.

Книга адресована, прежде всего, учащимся и учителям средних школ, лицеев и гимназий. Но она, несомненно, будет интересна и самому широкому кругу читателей.

ББК 22.3

ISBN 978-5-4439-1106-9

9 785443 911069 >

12+

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

МЕХАНИКА

СКОРОСТЬ И УСКОРЕНИЕ

Е.Соколов

Для описания состояния движущегося тела в данный момент времени в кинематике вводятся понятия вектора скорости $\vec{v}$ и вектора ускорения $\vec{a}$. А когда есть два вектора, то естественно поставить вопрос об их взаимном расположении. Например, такой: *может ли угол между скоростью и ускорением быть равным* $37°$ *?*

Вопрос непростой, и в нашем классе его обсуждение превратилось в оживленную дискуссию.

Первым у нас всегда спешит с ответом Саша.

– Конечно, нет, такого быть не может! А вот угол $90°$ между скоростью и ускорением может быть (рис.1,*а*). Мы уже встречались с тем, что когда тело движется по окружности с постоянной по модулю скоростью, то у него есть ускорение. Это ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости, т.е. к центру окружности, поэтому ему дали специальное название – центростремительное ускорение.

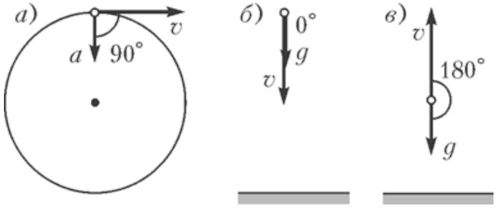


Рис. 1

– И не только $90°$, – поправила его Яна. – Помните, мы говорили, что при свободном падении ускорение тела всегда направлено вниз (рис.1,*б*). Поэтому угол между скоростью и ускорением может быть равен $0°$.

– А ведь свободное падение это не только движение вниз, – вмешалась Маша. – Свободным падением называется любое движение тела под действием силы тяжести в отсутствие сопротивления воздуха. Поэтому даже когда мяч летит вверх, его ускорение, согласно нашему правилу, по-прежнему направлено вниз (рис.1,*в*). Угол между скоростью и ускорением в этом случае равен $180°$.

– Вот мы и ответили на ваш вопрос: угол между скоростью и ускорением может принимать три значения, – подытожил разговор Иван.

– Ну что же, вы нашли три возможных угла. Можете отдохнуть и полюбоваться еще одной знакомой вам картинкой (рис.2). Скажу честно – это намек. На рисунке 2 изображена траектория тела, брошенного под углом к горизонту. Такую ситуацию мы не раз обсуждали и говорили, что скорость тела в каждой точке направлена по касательной к траектории, а ускорение все время направлено вниз. Ведь куда бы ни летело тело, оно всегда свободно падает. Нарисуем для нескольких точек траектории векторы скорости и ускорения (рис.3). В верхнее точке A скорость направлена горизонтально, а ускорение направлено вниз. В этой точке угол между скоростью и ускорением равен $90°$. Для точки B соответствующий угол острый, а для точки C – тупой. И понятно, что величины этих углов могут быть любыми.

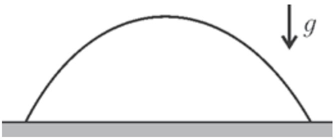


Рис. 2

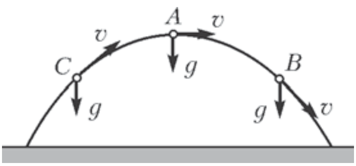


Рис. 3

Итак, вот итог наших размышлений: *угол между скоростью и ускорением может быть любым.*

Это хорошо, что мы с вами нашли правильный ответ, но, к сожалению, жизнь наша от этого только усложнилась. Ведь если бы существовало только три угла, то достаточно было бы выбрать один вариант из трех. Но теперь мы знаем, что ускорение может быть направлено куда угодно, и вариантов стало бесконечно много. Как же быть? Как в задачах правильно рисовать, куда направлено ускорение тела? Сейчас разберемся. Но прежде сделаем общее замечание.

В процессе эволюции человек приобрел способность «видеть» скорость и траекторию. Так, мы хорошо представляем себе, куда полетит брошенный нами снежок, и легко сможем увернуться от него. Поэтому вопросы, связанные со скоростью и траекторией, обычно не вызывают сложностей. Но мы не имеем возможности «видеть» ускорение. Поэтому просто так, по наитию, не стоит пытаться его рисовать. Определить, как направлено ускорение в каждом случае, мы можем только с помощью рассуждений, применяя специальные правила. О двух таких правилах мы уже знаем: при равномерном движении тела по окружности ускорение следует направлять к центру окружности (доказывается в кинематике), а при свободном падении – вертикально вниз (доказывается в динамике).

– А есть общее правило для любого движения?

– Да, есть. И его под силу вывести любому первокурснику. Но вы еще не первокурсники, а я очень не люблю рассказывать что-то без доказательств. Давайте поступим так: превратим наше обсуждение в тест на обучаемость. Я честно, хотя и без доказательств, расскажу вам все, что нужно для построения ускорения, и даже открою вам некоторые секреты, а потом вы попытаетесь построить ускорение в десяти простых случаях.

– Согласны. Только разве сложно, зная правила, получить ответ?

– Вот это мы как раз и проверим на опыте. А пока слушайте и задавайте вопросы.

Найти направление ускорения помогают два понятия: нормальная составляющая ускорения и тангенциальная составляющая ускорения. Общее правило заключается в том, что сначала строится каждая из этих составляющих (это несложно сделать), а уже по ним – само ускорение, как показано на рисунке 4.

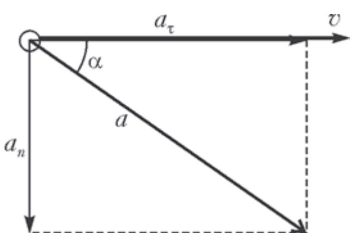


Рис. 4

Нормальная составляющая ускорения – это составляющая, перпендикулярная скорости. Величину нормальной составляющей ускорения всегда можно найти по уже знакомой нам формуле

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Эта составляющая перпендикулярна скорости и направлена по радиусу к центру кривизны траектории. Нормальная составляющая ускорения (центростремительное ускорение) характеризует быстроту изменения направления скорости.

Тангенциальная, или касательная, составляющая – это составляющая, направленная параллельно скорости. Она характеризует быстроту изменения скорости по величине и определяется по формуле

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Направлять тангенциальную составляющую следует либо по направлению скорости, либо против – в зависимости от того, увеличивается скорость или уменьшается.

Определив обе эти составляющие, мы можем с помощью рисунка 4 восстановить само ускорение (иногда говорят «полное ускорение»). При необходимости модуль ускорения и угол между скоростью и ускорением можно вычислить с помощью теоремы Пифагора и понятия арктангенса:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a_n}{a_\tau}.$$

Ну как, понятно?

– Да, вроде все ясно. Сначала рисуем нормальную составляющую ускорения перпендикулярно скорости в направлении к центру кривизны, так же, как мы рисовали центростремительное ускорение. Потом строим вторую составляющую – вдоль или против скорости. И после этого по рисунку 4 находим само ускорение.

– Все правильно. Но прежде чем переходить к тесту, я хочу обратить ваше внимание на очень важные частные случаи. Выполните, пожалуйста, такое упражнение: а) укажите два случая движения тела, в которых нормальная составляющая ускорения обращается в ноль; б) укажите два случая движения тела, в которых тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль. Лучше будет, если вы сами ответите на эти вопросы, но ничего страшного не произойдет, если вы просто прочтете следующие два абзаца.

а) Нормальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение $a_n = v^2/R$. А это может произойти в двух случаях. Первый случай видят все: нормальная составляющая обращается в ноль, если скорость обращается в ноль.[1] Поэтому нормальная составляющая ускорения всегда равна нулю в точках остановки тела. Второй случай увидит лишь тот, кто знает, что общего у прямой, окружности и точки. Оказывается, и точка, и прямая есть частные случаи окружности (рис.5). Точка – это окруж-

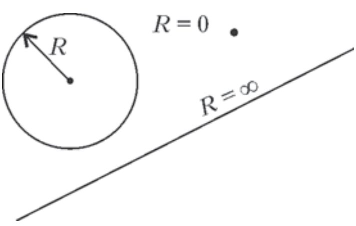


Рис. 5

[1] Для знатоков уточним, что полностью эта фраза должна звучать так: «когда скорость обращается в ноль, а радиус кривизны не равен нулю, т.е. точка остановки не является точкой излома траектории».

ность с радиусом, равным нулю, а прямая – это окружность с радиусом, равным бесконечности. Не верите? Попробуйте нарисовать на компьютере окружность очень большого радиуса. Она практически не будет отличаться от прямой линии. Итак, второй случай, когда нормальная составляющая обращается в ноль, – это случай, когда $R = \infty$, т.е. когда тело движется по прямой. При прямолинейном движении нормальной составляющей ускорения нет.

б) Тангенциальная составляющая ускорения обращается в ноль тогда, когда обращается в ноль выражение $a_\tau = \Delta v/\Delta t = v'(t)$. А это тоже может произойти в двух случаях. Первый случай – это равномерное движение, когда модуль скорости вообще не изменяется. Второй случай – это моменты времени, когда модуль скорости достигает максимума или минимума и производная от модуля скорости по времени становится равной нулю.

Наш рассказ о кинематическом методе построения ускорения закончен. Теперь попробуйте выполнить приведенный ниже тест. В нем собраны, пожалуй, все случаи построения ускорения. Отметим, что этот тест не так прост, как кажется.

Тест. *Для каждого из десяти положений тела, изображенных на рисунке 6, нарисуйте, как направлено его ускорение.*

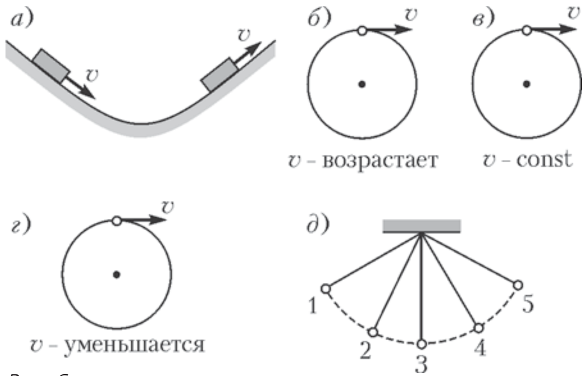


Рис. 6

а) Санки скатываются с горки, а затем заезжают на горку.

б) Тело движется по окружности с возрастающей скоростью.

в) Тело движется по окружности с постоянной скоростью.

г) Тело движется по окружности с уменьшающейся скоростью.

д) Математический маятник совершает колебания. Точки 1 и 5 – крайние точки, 2 и 4 – промежуточные, 3 – самая нижняя точка.

В заключение – одно полезное замечание. Наш разговор о направлении ускорения мы вели на языке кинематики. Однако говорить об этом можно и на языке динамики. Иногда (но не всегда) динамические рассуждения могут оказаться проще кинематических. Например, с помощью динамики очень легко ответить на исходный вопрос об угле 37°. Динамика учит, что ускорение порождается силой. Согласно второму закону Ньютона, $\vec{a} = \vec{F}/m$, т.е. куда направлена сила, туда направлено и ускорение. Силу мы можем прикладывать в любом направлении по нашему желанию, поэтому и ускорение, создаваемое этой силой, может иметь любое направление.

ВОЛШЕБНАЯ ФОРМУЛА, ИЛИ ДВИЖЕНИЕ СО СВЯЗЯМИ

Е.Соколов

В этой статье речь пойдет об одной замечательной формуле, которая позволяет единообразно решать целые серии задач. Вот почему мы назвали эту формулу *волшебной*. Полезна наша формула тогда, когда движения точек не свободны, а связаны определенными условиями – *связями*.

Самый известный пример движений со связями дает абсолютно жесткий стержень (рис.1). Концы стержня, точки A и B, могут двигаться, но их движения всегда таковы, что расстояние между этими точками остается постоянным. Поэтому четыре величины: модуль v_1 скорости точки A, модуль v_2 скорости точки B и углы α и β между скоростями и самим стержнем связаны определенным соотношением, а именно

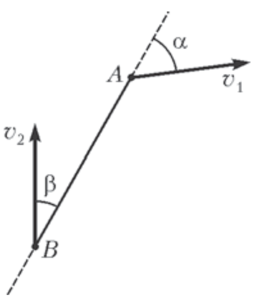


Рис. 1

$$v_1 \cos\alpha = v_2 \cos\beta .$$

Это и есть наша замечательная формула.

Вполне возможно, что знатокам наши эпитеты по поводу приведенной формулы покажутся преувеличенными. Они скажут: «Здесь просто записано, что проекции скоростей точек A и B на сам стержень одинаковы. Это само собой очевидно, так и должно быть». Да, знатоки правы. И будет очень хорошо, если и для наших читателей это тоже станет простым и очевидным.

А пока давайте посмотрим, как работает наша волшебная формула при решении конкретных задач.

Задача 1. *Катер движется со скоростью $v_к = 10$ м/с (рис.2). Найдите скорость спортсмена, перемещающегося на водных лыжах, если известно, что угол между вектором скорости катера и тросом составляет $30°$, а угол между вектором скорости спортсмена и тросом равен $60°$.*

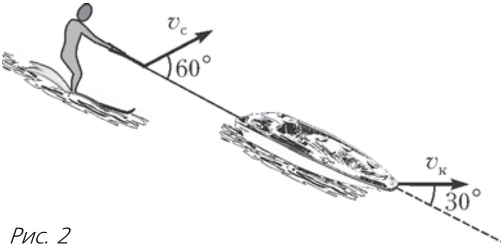


Рис. 2

Решение. Ответ получаем сразу, ведь в этой задаче из четырех величин, входящих в нашу формулу, известны три. Значит, уравнение

$$v_к \cos 30° = v_с \cos 60°$$

позволяет сразу же определить последнюю неизвестную, т.е. скорость спортсмена:

$$v_с = v_к \frac{\cos 30°}{\cos 60°} = 17{,}3 \text{ м/с}.$$

Интересно отметить, что скорость спортсмена может оказаться больше скорости катера. Спортсмены знают это и используют в своих выступлениях.

Задача 2. *Палочка скользит по сторонам прямого угла (рис.3). В некоторый момент скорость точки A равна v_A. Найдите скорость точки B в этот момент, если отрезок AB составляет угол α с горизонтом.*

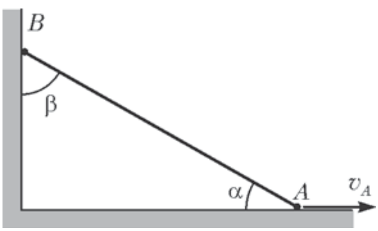


Рис. 3

Решение. Из четырех величин, входящих в нашу формулу, две величины – модуль и направление скорости точки A – заданы явно, а две оставшиеся величины мы должны найти. Однако из одного уравнения мы можем определить только одну неизвестную. Поэтому надо искать в условии задачи величину, заданную неявно.

Конечно же, неявно задано направление скорости точки B. Эта точка всегда лежит на вертикальной прямой – эта прямая является ее траекторией. Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории, поэтому скорость точки B направлена вертикально вниз. Теперь оставшуюся неизвестную – модуль скорости точки B – мы можем найти из нашего уравнения.

Учитывая, что $\beta = 90° - \alpha$, получим

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos(90° - \alpha),$$

откуда следует

$$v_B = v_A \frac{\cos\alpha}{\cos(90° - \alpha)} = v_A \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = v_A \operatorname{ctg}\alpha .$$

Задача 3. *Два кольца одного и того же радиуса катятся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v (рис.4,а). Найдите скорость верхней точки пересечения колец в тот момент, когда угол O_1AO_2 равен 2α.*

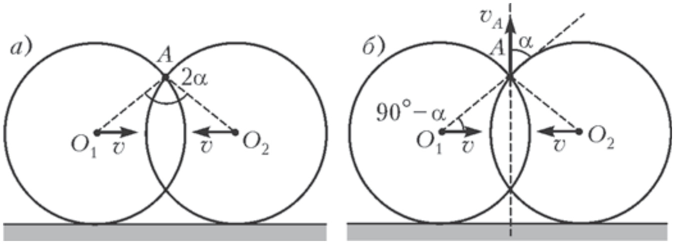


Рис. 4

Решение. До этого мы говорили об отрезках прямых, а годится ли наша формула для окружностей? Вернемся к точкам A и B стержня. О них нам было известно два факта. Первый: они являются концами отрезка. И второй: расстояние между ними не меняется. Первое высказывание не несет никакой информации. Через любые две точки, как бы они ни двигались, всегда можно провести прямую линию. Важен лишь второй факт. А он имеет прямое отношение к окружностям. Ведь если сказано, что точка лежит на окружности, то это означает лишь одно – расстояние между ней и центром окружности обязательно остается постоянным. Поэтому наша формула подходит и для окружностей. Только применять ее следует к радиусам.

Симметрия рисунка 4,*а* подсказывает, что скорость точки пересечения колец направлена вертикально вверх. Следовательно, направление скорости $\vec{v}_A$ уже известно – оно составляет угол α с радиусом O_1A (рис.4,*б*). А величину скорости найдем из нашей формулы. Записывая ее для радиуса O_1A, получим

$$v \cos(90° - \alpha) = v_A \cos\alpha,$$

откуда сразу находим

$$v_A = v \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = v \operatorname{tg}\alpha .$$

А что делать, если угадать направление скорости не удается? Тогда надо честно записать два уравнения для двух неизвестных, модуля скорости и угла, и решить их. Разумеется, для этого надо суметь найти два отрезка, длина каждого из которых по условию задачи не изменяется.

Задача 4. *Найдите скорость верхней точки пересечения двух катящихся колес (рис.5,а) в тот момент, когда она находится на одной горизонтали с центром большого колеса. Скорости колес одинаковы и равны v, радиусы колес r и R.*

Решение. Вводим неизвестные: v_A – скорость точки A и γ – угол, который она образует с горизонтом (рис.5,*б*). Скорость точки A образует угол γ с отрезком O_2A и угол $90° + \alpha - \gamma$ с

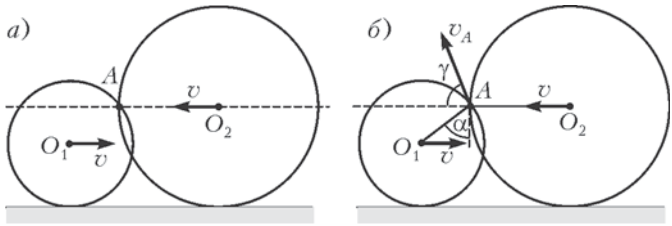


Рис. 5

отрезком O_1A, где $\alpha = \arccos\dfrac{R-r}{r}$. Для этих двух отрезков наше уравнение принимает вид

$$v_A \cos\gamma = v\,,$$

$$v_A \cos(90° + \alpha - \gamma) = v\cos(90° - \alpha)\,.$$

Решение этой непростой системы уравнений мы оставляем читателям и приводим лишь окончательный ответ:

$$v_A = v\sqrt{1 + 4\operatorname{tg}^2\alpha} = v\sqrt{\frac{4r^2}{(R-r)^2} - 3}\,.$$

А нет ли более простого метода решения этой задачи? Оказывается, есть.

Метод, который мы предлагаем для решения задач со связями, заключается в переходе в движущуюся систему отсчета. Например, рассматривая движение жесткого стержня (см. рис.1), мы можем «сесть на точку B», т.е. перейти в движущуюся систему отсчета K', которая движется со скоростью $\vec{v}_0$, равной скорости $\vec{v}_2$ точки B. Выигрыш от такого перехода очевиден. Теперь точка B покоится относительно нас, и вместо двух

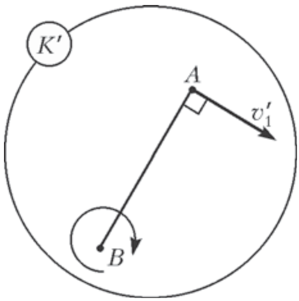


Рис. 6

движущихся точек осталась только одна точка A. Это большое упрощение.

Действительно, если точка B покоится, то единственным возможным движением стержня может быть только вращение относительно этой точки. При этом скорость $\vec{v}_1'$ точки A (относительно новой системы отсчета K') может быть любой по величине, но направлена она обязательно перпендикулярно стержню (рис.6).

В неподвижной системе отсчета K, согласно классическому закону сложения скоростей, скорость точки A равна

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_0 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2 .$$

Давайте прочитаем эту формулу нужным для нас способом: «Да, скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ концов стержня могут быть разными, но отличаются они лишь на вектор $\vec{v}_1'$, перпендикулярный самому стержню». А это означает, что проекции скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на стержень одинаковы (проекция их разности $\vec{v}_1'$ на сам отрезок равна нулю). Наша волшебная формула подтверждена.

А теперь посмотрим, как с помощью этого метода можно проще решить задачу 4. Прежде подготовимся, чтобы не запутаться в обозначениях. Скорости центров колес, точек O_1 и O_2, одинаковы: $v_1 = v_2 = v$ и противоположно направлены: $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$. Введем скорость $\vec{v}_0$, равную по модулю v и направленную влево. Эта скорость равна скорости большого колеса: $\vec{v}_2 = -\vec{v}_0$ и противоположна скорости малого колеса: $\vec{v}_1 = -\vec{v}_0$.

«Сядем на большое колесо», т.е. перейдем в систему отсчета K', движущуюся со скоростью $\vec{v}_0$ (рис.7,*а*). В этой системе отсчета большое колесо покоится, а малое движется вправо со скоростью $2v$. Нетрудно убедиться в том, что наш ответ для движущейся системы отсчета таков – скорость точки пересечения направлена вертикально вверх и равна

$$v_A' = 2v\,\mathrm{tg}\,\alpha \text{, где } \alpha = \arccos\frac{R-r}{r} .$$

Нам осталось лишь вернуться в лабораторную систему отсчета и с помощью классического закона сложения скоростей $\vec{v}_A = \vec{v}_A' + \vec{v}_0$ пересчитать скорость точки A. Используя рисунок 7,*б*, получаем

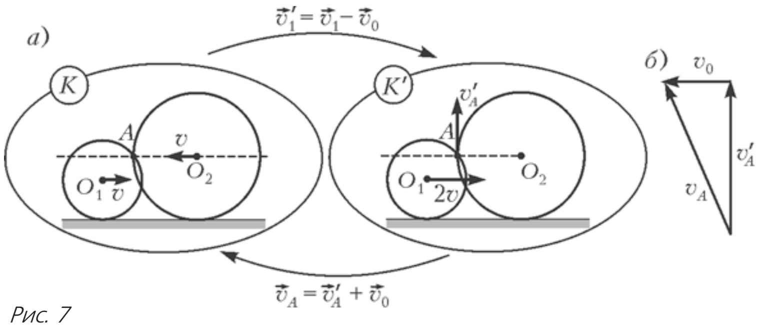


Рис. 7

окончательный ответ:

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + v_A'^2} = v\sqrt{1 + 4\mathrm{tg}^2\alpha} = v\sqrt{\frac{4r^2}{(R-r)^2} - 3}\ .$$

Решение закончено, ответ получен. Расплата за простоту − необходимость пересчитывать скорости при переходе из одной системы отсчета в другую. Впрочем, выбирайте сами, что для вас легче: решать непростую систему уравнений или разыскивать систему отсчета, в которой сразу можно указать направление неизвестной скорости.

ТАЙНА ЛУННЫХ НЕДР

И.Акулич

...внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного.

Я.Гашек. Похождения бравого солдата Швейка

Как-то в Солнечном городе состоялся жаркий диспут между известным ученым Знайкой и профессором Звездочкиным (подробности – в романе-сказке Н.Носова «Незнайка на Луне»). Спор шел о строении Луны. Знайка утверждал, что Луна – это полый шар, вроде резинового мяча. По мнению же Звездочкина, Луна – это шар, внутри которого имеется другой шар, окруженный прослойкой из воздуха или какого-нибудь другого газа (иначе говоря, это оболочка, внутри которой концентрично с ней расположен внутренний шар).

Впоследствии Незнайка угнал космический корабль и убедился в правоте профессора, проникнув на поверхность внутреннего шара и обнаружив, что условия там практически точь-в-точь такие же, как на нашей матушке-Земле (только освещение вместо Солнца обеспечивала внутренняя поверхность оболочки, испускавшая свет под действием космических излучений).

Оказывается, если принять симпатичную модель Звездочкина за истину, то это дает нам все основания сделать вывод о существовании на Луне неизвестных нам веществ, возможно с весьма ценными свойствами. И вот какие соображения наводят на такую мысль.

Если бы радиус внутреннего шара был близок к радиусу оболочки, то ускорения силы тяжести, создаваемой шаром на его собственной поверхности и на поверхности оболочки, были бы близки между собой. Но мы-то знаем, что на поверхности Луны это ускорение в шесть раз меньше, чем на поверхности Земли. А на поверхности внутреннего шара оно, как убедился Незнайка, совпадает с земным. Следовательно, радиус шара должен быть существенно меньше, чем радиус оболочки. А тогда для создания на его поверхности ускорения, равного земному, средняя плотность шара должна многократно превосходить среднюю плотность Земли, которая, согласно справочникам, близка к $5{,}5\ \text{г}/\text{см}^3$.

Давайте оценим минимально возможную среднюю плотность внутреннего лунного шара. Введем следующие обозначения: $R_о = 1700$ км $= 1{,}7 \cdot 10^6$ м – наружный радиус оболочки Луны (по справочнику); $R_ш$ – радиус внутреннего шара; d – толщина оболочки; $\rho_о$ – средняя плотность вещества оболочки; $\rho_ш$ – средняя плотность вещества шара; $g_ш = 9{,}8\ \text{м}/\text{с}^2$ – ускорение силы тяжести на поверхности шара (как на Земле); $g_о = g_ш/6$ – ускорение силы тяжести на поверхности оболочки.

Как известно из закона всемирного тяготения, шар радиусом r и плотностью ρ создает на расстоянии $R \geq r$ от его центра ускорение поля тяготения, равное

$$a = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho\frac{r^3}{R^2}, \qquad (1)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/\left(\text{кг} \cdot \text{с}^2\right)$ – гравитационная постоянная, $M = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ – масса шара. В частности, на поверхности шара, при $R = r$, это ускорение равно

$$g = \frac{4}{3}\pi G\rho r. \qquad (2)$$

Тогда для внутреннего лунного шара получаем

$$g_ш = \frac{4}{3}\pi G\rho_ш R_ш \qquad (3)$$

(поскольку сферическая оболочка не создает внутри себя гравитационного поля).

На поверхности Луны ускорение силы тяжести равно сумме ускорений от действия двух гравитационных полей, создаваемых шаром и оболочкой (тяготением, создаваемым массой газовой прослойки между оболочкой и шаром, конечно, можно пренебречь). С шаром вопросов нет, а для определения действия оболочки надо либо найти массу оболочки (учитывая ее толщину d), либо просто представить создаваемое ею ускорение как разность ускорений, создаваемых двумя шарами – радиусами $R_о$ и ($R_о - d$). Тогда, используя формулы (1) и (2), можно записать

$$g_о = \left(\frac{4}{3}\pi G\rho_о R_о - \frac{4}{3}\pi G\rho_о\frac{(R_о - d)^3}{R_о^2}\right) + \frac{4}{3}\pi G\rho_ш\frac{R_ш^3}{R_о^2}. \qquad (4)$$

Здесь слагаемое в скобках – ускорение, создаваемое оболочкой (представленное, как было сказано, в виде разности), а второе слагаемое – ускорение, создаваемое шаром. Так как $g_о = \frac{1}{6} g_ш$, то из равенств (3) и (4) следует

$$\frac{4}{3}\pi G\rho_о R_о - \frac{4}{3}\pi G\rho_о \frac{(R_о - d)^3}{R_о^2} + \frac{4}{3}\pi G\rho_ш \frac{R_ш^3}{R_о^2} = \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{3}\pi G\rho_ш R_ш .$$

Сократив на $\frac{4}{3}\pi G$ и поделив обе части равенства на $\rho_ш R_о$, получаем

$$\frac{\rho_о}{\rho_ш} - \frac{\rho_о}{\rho_ш}\left(\frac{R_о - d}{R_о}\right)^3 + \left(\frac{R_ш}{R_о}\right)^3 = \frac{1}{6}\frac{R_ш}{R_о},$$

или

$$\left(\frac{R_ш}{R_о}\right)^3 - \frac{1}{6}\frac{R_ш}{R_о} + \frac{\rho_о}{\rho_ш}\left(1 - \left(\frac{R_о - d}{R_о}\right)^3\right) = 0 .$$

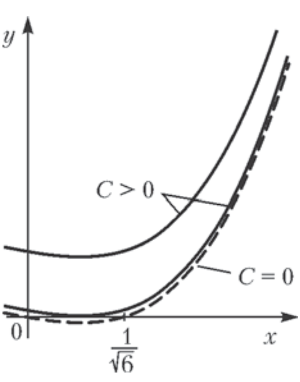
Отсюда можно найти максимально возможное значение $R_ш$.

Обозначим $x = \frac{R_ш}{R_о}$ (очевидно, что $0 < x < 1$) и $C = \frac{\rho_о}{\rho_ш}\left(1 - \left(\frac{R_о - d}{R_о}\right)^3\right)$ (понятно, что $C > 0$). Тогда имеем

$$x^3 - \frac{1}{6}x + C = 0 .$$

Какие значения может принимать решение этого уравнения на интервале $(0; 1)$ при различных положительных значениях параметра C? Для ответа на этот вопрос изобразим график функции

$$y = x^3 - \frac{1}{6}x + C$$



сначала при $C = 0$, в затем – при некоторых $C > 0$ (см. рисунок). Легко подсчитать, что при $C = 0$ имеются 2 корня: $x = 0$ и $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Далее с ростом C корни, как видно, начинают сближаться (больший – уменьшается, меньший – увеличивается), затем при некотором значении C они сольются (график коснется оси абсцисс), а при последующих значениях C корней вообще не будет (но эту возможность мы не рассматриваем, поскольку корень *должен* существовать – приключения Незнайки тому подтверждение!). Отсюда можно сделать такое вывод: поскольку $C > 0$, то в любом случае $x < \frac{1}{\sqrt{6}}$. Тогда

$$R_{\text{ш}} = xR_{\text{о}} < \frac{R_{\text{о}}}{\sqrt{6}} = \frac{1{,}7 \cdot 10^6 \text{ м}}{\sqrt{6}} = 0{,}7 \cdot 10^6 \text{ м}.$$

Теперь из выражения (3) можно получить

$$\rho_{\text{ш}} = \frac{3g_{\text{ш}}}{4\pi G R_{\text{ш}}} > \frac{3 \cdot 9{,}8}{4 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 0{,}7 \cdot 10^6} \text{ кг/м}^3 =$$

$$= 50{,}1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 = 50{,}1 \text{ г/см}^3.$$

Итак, плотность внутреннего шара превосходит 50 г/см^3. На Земле не найдено пока ни одного вещества с такой неимоверной плотностью (у самого тяжелого вещества осмия плотность чуть выше $22{,}5 \text{ г/см}^3$, у остальных – еще меньше). Не исключено, что некоторые элементы из самой нижней части таблицы Менделеева и обладают такой плотностью, но они сплошь неустойчивы и «живут», в основном, доли секунды. Луна же существует миллионы лет!

Стало быть, на Луне (точнее – в ее внутреннем шаре) должны присутствовать (и в немалых количествах) неизвестные вещества. Интересно было бы узнать о них подробнее…