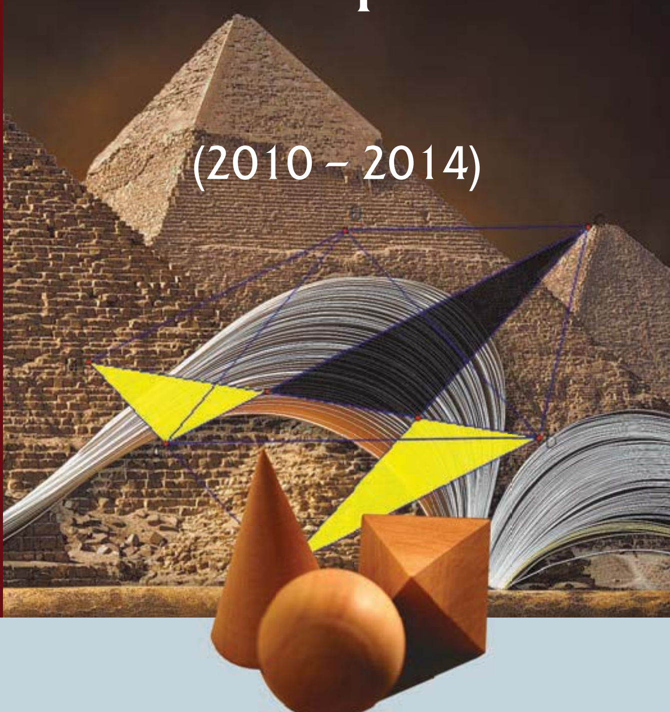
ВЫПУСК 134

Библиотечка КВАНТ

А.А. Заславский

Олимпиады имени И.Ф. Шарыгина

(2010 – 2014)



УДК 514.112
ББК 22.151.0
З-36

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Заславский А.А.
З-36 **Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина (2010–2014).** – М.: Издательство МЦНМО, 2015. – 168 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 134. Приложение к журналу «Квант» №2/2015.)

ISBN 978-5-4439-0626-3

В книге приведены задачи геометрических олимпиад имени И.Ф. Шарыгина, прошедших в 2010 – 2014 годах. Ко всем задачам даны подробные решения.

Сборник предназначен школьникам, учителям математики и руководителям математических кружков, а также всем любителям геометрии.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-4439-0626-3

9 785443 906263 >

12+

СОДЕРЖАНИЕ

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

VI ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8)[1] Существует ли треугольник, в котором одна сторона равна какой-то из его высот, другая – какой-то из биссектрис, а третья – какой-то из медиан?

Б.Френкин

2. (8) В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I. Пусть O – центр описанной окружности треугольника CA_1B_1. Докажите, что $OI \perp AB$.

Д.Швецов

3. (8) Точки A', B', C' лежат на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC. Точка X такова, что $\angle AXB = \angle A'C'B' + \angle ACB$ и $\angle BXC = \angle B'A'C' + \angle BAC$. Докажите, что четырехугольник $XA'BC'$ – вписанный.

Ф.Нилов

4. (8) Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке N. Окружности, описанные вокруг треугольников ANB и CND, повторно пересекают стороны BC и AD в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ вписан в окружность с центром N.

Д.Швецов

5. (8–9) На высоте BD треугольника ABC взята точка E такая, что $\angle AEC = 90^\circ$. Точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников AEB и CEB; F, L – середины отрезков AC и O_1O_2. Докажите, что точки L, E, F лежат на одной прямой.

Д.Швецов

6. (8–9) На стороне BC равностороннего треугольника ABC взяты точки M и N (M лежит между B и N) такие, что

[1] В скобках после номера задачи указан класс, для которого она предназначена.

$\angle MAN = 30°$. Описанные окружности треугольников AMC и ANB пересекаются в точке K. Докажите, что прямая AK содержит центр описанной окружности треугольника AMN.

Д.Швецов

7. (8–9) Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная медиане BM. Эта прямая пересекает высоты, выходящие из A и C (или их продолжения), в точках K и N. Точки O_1 и O_2 – центры описанных окружностей треугольников ABK и CBN соответственно. Докажите, что $O_1M = O_2M$.

Д.Швецов

8. (8–10) В треугольнике ABC проведена высота AH. Точки I_b и I_c – центры вписанных окружностей треугольников ABH и CAH; L – точка касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной BC. Найдите угол LI_bI_c.

Д.Швецов

9. (8–10) Назовем точку внутри треугольника *хорошей*, если три чевианы, проходящие через нее, равны. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны, а количество хороших точек нечетно. Чему оно может быть равно?

Б.Френкин

10. (8–11) Дан треугольник ABC. С помощью двусторонней линейки, проведя не более восьми линий, постройте на стороне AB такую точку D, что $AD/BD = BC/AC$.

И.Богданов

11. (8–11) Выпуклый n-угольник разрезан на 3 выпуклых многоугольника. У одного из них n сторон, у другого – больше, чем n, у третьего – меньше, чем n. Каковы возможные значения n?

Б.Френкин

12. (9) В прямоугольном треугольнике ABC AC – больший катет, CH – высота, проведенная к гипотенузе. Окружность с центром H и радиусом CH пересекает катет AC в точке M. Точка B' симметрична точке B относительно H. В точке B' восставлен перпендикуляр к гипотенузе, который пересекает окружность в точке K. Докажите, что:

а) $B'M \parallel BC$;

б) AK – касательная к окружности.

А.Блинков, Ю.Блинков, М.Сандрикова

13. (9) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AB = BC$. На диагонали BD выбрана точка K такая, что $\angle AKB + \angle BKC = \angle A + \angle C$. Докажите, что $AK \cdot CD = KC \cdot AD$.

С.Берлов

14. (9–10) На стороне AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ нашлась такая точка M, что CM и BM параллельны AB и CD соответственно. Докажите, что $S_{ABCD} \geq 3S_{BCM}$.

С.Берлов

15. (9–11) В остроугольном треугольнике ABC AA_1, BB_1 и CC_1 – высоты. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке K. Окружности, описанные вокруг треугольников A_1KC_1 и A_1KB_1, вторично пересекают прямые AB и AC в точках N и L соответственно. Докажите, что

а) сумма диаметров этих окружностей равна стороне BC;

б) $A_1N/BB_1 + A_1L/CC_1 = 1$.

Д.Прокопенко, А.Блинков

16. (9–11) В угол с вершиной A вписана окружность, касающаяся сторон угла в точках B и C. Прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках D и E. Хорда BX параллельна прямой DE. Докажите, что отрезок XC проходит через середину отрезка DE.

Ф.Нилов

17. (9–11) Постройте треугольник по высоте и биссектрисе, проведенным из одной вершины, и медиане, проведенной из другой вершины.

Предложил С.Токарев

18. (9–11) На хорде AC окружности ω выбрали точку B. На отрезках AB и BC как на диаметрах построили окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2, которые пересекают ω второй раз в точках D и E соответственно. Лучи O_1D и O_2E пересекаются в точке F. Лучи AD и CE пересекаются в точке G. Докажите, что прямая FG проходит через середину AC.

Д.Прокопенко

19. (9–11) Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Точки P и Q диаметрально противоположны C и D соответственно. Касательные к окружности в этих точках пересекают прямую AB в точках E и F (A лежит между E и B, B – между A и F). Прямая EO пересекает AC и BC в точках X и Y, а прямая FO пересекает AD и BD в точках U и V. Докажите, что $XV = YU$.

В.Ясинский, Украина

20. (10) Вписанная окружность остроугольного треугольника ABC касается его сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Пусть A_2, B_2 – середины отрезков B_1C_1, A_1C_1 соответственно, O – центр описанной окружности треугольника, P – одна из точек пересечения прямой CO с вписанной окружностью. Прямые PA_2 и PB_2 вторично пересекают вписанную окружность в точках A' и B'. Докажите, что прямые AA' и BB' пересекаются на высоте треугольника, опущенной на AB.

Ф.Ивлев

21. (10–11) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $\angle ABD + \angle ACD > \angle BAC + \angle BDC$. Докажите, что $S_{ABD} + S_{ACD} > S_{BAC} + S_{BDC}$.

А.Акопян

22. (10–11) Окружность с центром F и парабола с фокусом F пересекаются в двух точках. Докажите, что на окружности найдутся такие четыре точки A, B, C, D, что прямые AB, BC, CD и DA касаются параболы.

А.Заславский

23. (10–11) Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Известно, что $AB \cdot CF = 2BC \cdot FA$, $CD \cdot EB = 2DE \cdot BC$, $EF \cdot AD = 2FA \cdot DE$. Докажите, что прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке.

Н.Белухов, Болгария

24. (10–11) Дана прямая l в пространстве и точка A, не лежащая на ней. Для каждой прямой l', проходящей через A, построим общий перпендикуляр XY (Y лежит на l') к прямым l и l'. Найдите ГМТ точек Y.

А.Акопян

25. (11) Среди вершин двух неравных икосаэдров можно выбрать шесть, являющихся вершинами правильного октаэдра. Найдите отношение ребер икосаэдров.

Н.Белухов

Финальный тур

8 класс

1. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены высота из вершины A и биссектрисы из двух других вершин. Докажите, что описанная окружность треугольника, образованного этими тремя прямыми, касается биссектрисы, проведенной из вершины A.

М.Рожкова, Украина

2. Даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что точки A, B и C можно накрыть кругом единичного радиуса.

А.Акопян

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K. На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.

С.Берлов, Д.Прокопенко

4. В равные углы X_1OY и YOX_2 вписаны окружности ω_1 и ω_2, касающиеся сторон OX_1 и OX_2 в точках A_1 и A_2 соответственно, а стороны OY – в точках B_1 и B_2. Точка C_1 – вторая точка пересечения A_1B_2 и ω_1, а точка C_2 – вторая точка пересечения A_2B_1 и ω_2. Докажите, что C_1C_2 – общая касательная к окружностям.

И.Богданов

5. В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Известно, что в треугольнике HLM прямая AH является высотой, а BL – биссектрисой. Докажите, что CM является в этом треугольнике медианой.

Б.Френкин

6. Точки E, F – середины сторон BC, CD квадрата $ABCD$. Прямые AE и BF пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle PDA = \angle AED$.

Д.Прокопенко

7. Каждый из двух правильных многоугольников P и Q разрезали прямой на две части. Одну из частей P и одну из частей Q сложили друг с другом по линии разреза. Может ли получиться правильный многоугольник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть сторон?

Б.Френкин

8. Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. На отрезках A_1I и B_1I построены как на основаниях равнобедренные треугольники с вершинами A_2 и B_2, лежащими на прямой AB. Известно, что прямая CI делит отрезок A_2B_2 пополам. Верно ли, что треугольник ABC – равнобедренный?

А.Заславский

9 класс

1. Для каждой вершины треугольника ABC нашли угол между высотой и биссектрисой, проведенными из этой вершины. Оказалось, что эти углы в вершинах A и B равны друг другу и меньше, чем угол в вершине C. Чему равен угол C треугольника?

Б.Френкин

2. Два треугольника пересекаются. Докажите, что внутри описанной окружности одного из них лежит хотя бы одна вершина другого. (Здесь треугольником считается часть плоскости, ограниченная замкнутой трехзвенной ломаной; точка, лежащая на окружности, считается лежащей внутри нее.)

А.Акопян

3. На прямой лежат точки X, Y, Z (именно в таком порядке). Треугольники XAB, YBC, ZCD – правильные, причем вершины первого и третьего ориентированы против часовой стрелки, а второго по часовой стрелке. Докажите, что прямые AC, BD и XY пересекаются в одной точке.

В.Ясинский

4. В треугольнике ABC отметили точки A', B' касания сторон BC, AC с вписанной окружностью и точку G пересечения отрезков AA' и BB'. После этого сам треугольник стерли. Восстановите его с помощью циркуля и линейки.

А.Заславский

5. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$), касается сторон AB, BC, AC в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Вневписанная окружность касается стороны BC в точке A_2. Точка A_0 – центр окружности, описанной около треугольника $A_1A_2B_1$; аналогично определяется точка C_0. Найдите угол A_0BC_0.

Д.Швецов

6. Произвольная прямая, проходящая через вершину B треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке K, а описанную окружность в точке M. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников AMK.

Ю.Блинков

7. В треугольнике ABC AL_a и AM_a – внутренняя и внешняя биссектрисы угла A. Пусть ω_a – окружность, симметричная описанной окружности треугольника AL_aM_a относительно середины BC. Окружность ω_b определена аналогично. Докажите, что ω_a и ω_b касаются тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.

Н.Белухов

8. На доске нарисован правильный многоугольник. Володя хочет отметить k точек на его периметре так, чтобы не существовало другого правильного многоугольника (не обязательно с тем же числом сторон), также содержащего отмеченные точки на своем периметре. Найдите наименьшее k, достаточное для любого исходного многоугольника.

В.Гуровиц

10 класс

1. Пусть O, I – центры описанной и вписанной окружностей прямоугольного треугольника; R, r – радиусы этих окружностей; J – точка, симметричная вершине прямого угла относительно I. Найдите OJ.

А.Заславский

2. Каждая из двух равных окружностей ω_1 и ω_2 проходит через центр другой. Треугольник ABC вписан в ω_1, а прямые AC, BC касаются ω_2. Докажите, что $\cos\angle A + \cos\angle B = 1$.

П.Кожевников

3. Два выпуклых многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ ($n \geq 4$) таковы, что любая сторона первого больше соответствующей стороны второго. Может ли оказаться, что любая диагональ второго больше соответствующей диагонали первого?

А.Акопян

4. Проекции двух точек на стороны четырехугольника лежат на двух различных концентрических окружностях (проекции каждой точки образуют вписанный четырехугольник, а радиусы соответствующих окружностей различны). Докажите, что четырехугольник – параллелограмм.

Ф.Нилов

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle B = 90°$) проведена высота BH. Окружность, вписанная в треугольник ABH, касается сторон AB, AH в точках H_1, B_1 соответственно; окружность, вписанная в треугольник CBH, касается сторон CB, CH в точках H_2, B_2 соответственно. Пусть O – центр описанной окружности треугольника H_1BH_2. Докажите, что $OB_1 = OB_2$.

Д.Швецов

6. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон в точках A', B' и C'. Известно, что ортоцентры треугольников ABC и $A'B'C'$ совпадают. Верно ли, что ABC – правильный?

Ф.Нилов

7. Каждый из двух правильных многогранников P и Q разрезали плоскостью на две части. Одну из частей P и одну из частей Q приложили друг к другу по плоскости разреза. Может ли получиться правильный многогранник, не равный ни одному из исходных, и если да, то сколько у него может быть граней?

Б.Френкин

8. Вокруг треугольника ABC описали окружность k. На сторонах треугольника отметили три точки A_1, B_1 и C_1, после чего сам треугольник стерли. Докажите, что его можно однозначно восстановить тогда и только тогда, когда прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Н.Белухов

VII ОЛИМПИАДА

Заочный тур

1. (8) Существует ли выпуклый семиугольник, который можно разрезать на 2011 равных треугольников?

А.Заславский

2. (8) В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$, $AC = 6$ проведена биссектриса угла A. Из вершины B опущен на эту биссектрису перпендикуляр BH. Найдите MH, где M – середина BC.

Из сингапурских олимпиад

3. (8) В треугольнике ABC $\angle A = 60°$. Серединный перпендикуляр к отрезку AB пересекает прямую AC в точке C_1. Серединный перпендикуляр к отрезку AC пересекает прямую AB в точке B_1. Докажите, что прямая B_1C_1 касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

Д.Швецов

4. (8) В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA', BB', CC'. Известно, что в треугольнике $A'B'C'$ эти прямые также являются биссектрисами. Верно ли, что треугольник ABC равносторонний?

Б.Френкин

5. (8) В треугольнике ABC проведен серединный перпендикуляр к стороне AB до пересечения с другой стороной в некоторой точке C'. Аналогично построены точки A' и B'. Для каких исходных треугольников треугольник $A'B'C'$ будет равносторонним?

Б.Френкин

6. (8) Даны две единичные окружности ω_1 и ω_2, пересекающиеся в точках A и B. На окружности ω_1 взяли произвольную точку M, а на окружности ω_2 – точку N. Через точки M и N провели еще две единичные окружности ω_3 и ω_4. Обозначим повторное пересечение ω_1 и ω_3 через C, повторное пересечение окружностей ω_2 и ω_4 – через D. Докажите, что $ACBD$ – параллелограмм.

А.Акопян

7. (8–9) На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q так, что $PB = QC$. Докажите, что $PQ < BC$.

А.Акопян

8. (8–9) Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$), касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно; A_2, C_2 – точки, симметричные точке B_1 относительно прямых BC, AB соответственно. Докажите, что прямые A_1A_2, C_1C_2 пересекаются на медиане треугольника ABC.

Д.Швецов

9. (8–9) Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведенные к описанным окружностям треугольников CHB и AHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

Д.Швецов

10. (8–9) В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. На боковой стороне CD выбрана точка M, а на основаниях BC и AD – точки P и Q так, что отрезки MP и MQ параллельны диагоналям трапеции. Докажите, что прямая PQ проходит через точку O.

М.Волчкевич

11. (8–10) Вневписанная окружность прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90°$) касается стороны BC в точке A_1, а прямой AC в точке A_2. Прямая A_1A_2 пересекает (первый раз) окружность, вписанную в треугольник ABC, в точке A'; аналогично определяется точка C'. Докажите, что $AC \parallel A'C'$.

Д.Швецов

12. (8–10) Пусть AP и BQ – высоты данного остроугольного треугольника ABC. Постройте циркулем и линейкой на стороне AB такую точку M, чтобы $\angle AQM = \angle BPM$.

В.Ясинский

13. а) (8–10) Найдите геометрическое место центров тяжести треугольников, вершины которых лежат на сторонах данного треугольника (по одной вершине внутри каждой стороны).

б) (11) Найдите геометрическое место центров тяжести тетраэдров, вершины которых лежат на гранях данного тетраэдра (по одной вершине внутри каждой грани).

Б.Френкин

14. (9) В треугольнике ABC высота и медиана из вершины A образуют (вместе с прямой BC) треугольник, в котором биссектриса угла A является медианой, а высота и медиана из вершины B образуют (вместе с прямой AC) треугольник, в котором биссектриса угла B является биссектрисой. Найдите отношение сторон треугольника ABC.

Б.Френкин

15. (9–10) Дана окружность с центром O и радиусом 1. Из точки A к ней проведены касательные AB и AC. Точка M, лежащая на окружности, такова, что четырехугольники $OBMC$ и $ABMC$ имеют равные площади. Найдите MA.

В.Протасов

16. (9–10) Дан треугольник ABC и прямая l. Прямые, симметричные l относительно AB и AC, пересекаются в точке A_1. Точки B_1, C_1 определяются аналогично. Докажите, что

а) прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке;

б) эта точка лежит на описанной около треугольника ABC окружности;

в) точки, построенные указанным способом для двух перпендикулярных прямых, диаметрально противоположны.

П.Долгирев

17. (9–11) а) Существует ли треугольник, в котором наименьшая медиана длиннее, чем наибольшая биссектриса?

б) Существует ли треугольник, в котором наименьшая биссектриса длиннее, чем наибольшая высота?

Б.Френкин

18. (9–11) На плоскости проведены n прямых общего положения, т.е. никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезали плоскость на несколько частей. Какое

а) наименьшее;

б) наибольшее

количество углов может быть среди этих частей?

А.Заславский

19. (9–11) Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

А.Заславский

20. (9–11) Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I. Точки M и N – середины диагоналей AC и BD. Докажите, что $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.

Н.Белухов, А.Заславский

21. (10–11) На окружности с диаметром AC выбрана произвольная точка B, отличная от A и C. Пусть M, N – середины хорд AB, BC, а P, Q – середины меньших дуг, стягиваемых этими хордами. Прямые AQ и BC пересекаются в точке K, а прямые CP и AB – в точке L. Докажите, что прямые MQ, NP и KL пересекаются в одной точке.

В.Ясинский

22. (10–11) Из вершины C треугольника ABC проведены касательные CX, CY к окружности, проходящей через середины сторон треугольника. Докажите, что прямые XY, AB и касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника ABC, пересекаются в одной точке.

Г.Фельдман

23. (10–11) Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' – середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'.

а) Докажите, что A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'.

б) Докажите, что, если l проходит через центр описанной окружности ΔABC, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.

Н.Белухов, М.Маринов, Болгария

24. (10–11) Дан остроугольный треугольник ABC. Найдите на сторонах BC, CA, AB такие точки A', B', C', чтобы наибольшая сторона треугольника $A'B'C'$ была минимальна.

А.Заславский

25. (10–11) Три равных правильных тетраэдра имеют общий центр. Могут ли все грани многогранника, являющегося их пересечением, быть равны?

Н.Белухов

Финальный тур

8 класс

1. В трапеции с перпендикулярными диагоналями высота равна средней линии. Докажите, что трапеция равнобокая.

А.Блинков

2. Петя вырезал из бумаги прямоугольник, положил на него такой же прямоугольник и склеил их по периметру. В верхнем прямоугольнике он провел диагональ, опустил на нее перпендикуляры из двух оставшихся вершин, разрезал верхний прямоугольник по этим линиям и отогнул полученные треугольники во внешнюю сторону, так что вместе с нижним прямоугольником они образовали прямоугольник.

Как по полученному прямоугольнику восстановить исходный с помощью циркуля и линейки?

Т.Голенищева-Кутузова

3. Около треугольника ABC описали окружность. Пусть A_1 – точка пересечения с нею прямой, параллельной BC и проходящей через A. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Из точек A_1, B_1, C_1 опустили перпендикуляры на BC, CA, AB соответственно. Докажите, что эти три перпендикуляра пересекаются в одной точке.

А.Мякишев, Д.Мавло

4. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых тоже равна 1. Докажите, что в окружность можно вписать правильный шестиугольник, стороны которого не пересекают этих хорд.

А.Шаповалов

5. Через вершину A равностороннего треугольника ABC проведена прямая, не пересекающая отрезок BC. По разные стороны от точки A на этой прямой взяты точки M и N так, что $AM = AN = AB$ (точка B внутри угла MAC). Докажите, что прямые AB, AC, BN, CM образуют вписанный четырехугольник.

С.Маркелов

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и CC_1; A_0 − середина стороны BC. Прямые A_0B_1 и A_0C_1 пересекают прямую, проходящую через вершину A параллельно прямой BC, в точках P и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника PA_0Q лежит на высоте треугольника ABC.

Д.Прокопенко

7. На плоскости отмечена точка M, не лежащая на осях координат. По оси ординат движется точка Q, а по оси абсцисс точка P так, что угол PMQ всегда остается прямым. Найдите геометрическое место точек, симметричных M относительно PQ.

А.Акопян

8. Пользуясь только линейкой, разделите сторону квадратного стола на n равных частей. Линии можно проводить только на поверхности стола.

А.Заславский

9 класс

1. Высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая CH пересекает полуокружность с диаметром AB, проходящую через A_1, B_1 в точке D. Отрезки AD и BB_1 пересекаются в точке M, BD и AA_1 − в точке N. Докажите, что описанные окружности треугольников B_1DM и A_1DN касаются.

М.Кунгожин, Казахстан

2. В треугольнике ABC $\angle B = 2\angle C$. Точки P и Q на серединном перпендикуляре к CB таковы, что $\angle CAP = \angle PAQ = \angle QAB = \frac{\angle A}{3}$. Докажите, что Q − центр описанной окружности треугольника CPB.

Д.Кеян, Молдова

3. Восстановите равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) по точкам I, M, H пересечения биссектрис, медиан и высот соответственно.

А.Карлюченко, Украина

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O. Биссектрисы его углов образуют четырехугольник, вписанный в окружность с центром I, а биссектрисы внешних углов – четырехугольник, вписанный в окружность с центром J. Докажите, что O – середина IJ.

А.Заславский

5. Из высот треугольника можно составить треугольник. Верно ли, что из его биссектрис также можно составить треугольник?

Б.Френкин

6. В треугольнике ABC AA_0 и BB_0 – медианы, AA_1 и BB_1 – высоты. Описанные окружности треугольников CA_0B_0 и CA_1B_1 вторично пересекаются в точке M_c. Аналогично определяются точки M_a, M_b. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c лежат на одной прямой, а прямые AM_a, BM_b, CM_c параллельны.

П.Долгирев

7. В угол вписаны две окружности ω и Ω. Прямая l пересекает стороны угла в точках A и F, окружность ω – в точках B и C, окружность Ω – в точках D и E (порядок точек на прямой – A, B, C, D, E, F). Пусть $BC = DE$. Докажите, что $AB = EF$.

И.Богданов

8. Выпуклый n-угольник P, где $n > 3$, разрезан на равные треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри него. Каковы возможные значения n, если n-угольник описанный?

Б.Френкин

10 класс

1. В треугольнике ABC середины сторон AC, BC, вершина C и точка пересечения медиан лежат на одной окружности. Докажите, что она касается окружности, проходящей через вершины A, B и ортоцентр треугольника ABC.

М.Рожкова

2. Четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности, касающейся сторон AB, BC, CD, DA в точках K, L, M, N соответственно. Точки A', B', C', D' – середины отрезков LM, MN, NK, KL. Докажите, что четырехугольник, образованный прямыми AA', BB', CC', DD' – вписанный.

Л.Емельянов

3. Дано два тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Рассмотрим шесть пар ребер A_iA_j и B_kB_l, где $(i,\ j,\ k,\ l)$ – перестановка