Классика программирования

Чарльз Петцольд

Читаем Тьюринга

ДМК пресс издательство

УДК 004.3.01:510.5
ББК 32.97
П29

Петцольд Ч.
П29 Читаем Тьюринга. Путешествие по исторической статье Тьюринга о вычислимости и машинах Тьюринга / пер. с анг. Борисова Е. В., Чернышова Л. Н. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 440 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-231-7

Книга, которую вы держите в руках, принадлежит перу известного американского популяризатора Чарлза Петцольда. В ней автор исследует главную работу Алана Тьюринга, посвященную проблеме разрешимости. Именно в этой работе впервые появились знаменитые машины Тьюринга, ставшие на многие годы универсальной теоретической концепцией computer science.

Автор тонко и деликатно проведет вас по самым потаенным уголкам, из которых родились на свет современные компьютеры и современное программное обеспечение.

Читателя ждет захватывающее путешествие в прошлое, из которого получилось наше настоящее и развивается будущее.

УДК 004.3.01:510.5
ББК 32.97

ISBN 978-0-470-22905-7 (анг.)
ISBN 978-5-97060-231-7 (рус.)

Содержание

Введение 7
Часть I. Основы 15
Глава 1. Прах Диофанта покоится в этой могиле 16
Глава 2. Иррациональные и трансцендентные числа 27
Глава 3. Столетия прогресса 53
Часть II. Вычислимые числа 76
Глава 4. Годы учебы 77
Глава 5. Машины в работе 99
Глава 6. Сложение и умножение 117
Глава 7. Они же – подпрограммы 132
Глава 8. Всё есть число 148
Глава 9. Универсальная машина 165
Глава 10. Вычислительные машины и вычислимость ... 186
Глава 11. О машинах и людях 215
Часть III. Entscheidungsproblem 227
Глава 12. Логика и вычислимость 228
Глава 13. Вычислимые функции 263
Глава 14. Главное доказательство 292
Глава 15. Лямбда-исчисление 315
Глава 16. Постижение континуума 336

Часть IV. И далее 363

Глава 17. Весь мир – машина Тьюринга? 364

Глава 18. Долгий сон Диофанта 396

Избранная библиография 406

Дополнение: Машины Тьюринга, их разновидности
и моделирование (Л. Н. Чернышов) 411

Глава 1

Прах Диофанта покоится в этой могиле

Много веков назад в древней Александрии старик должен был хоронить своего сына. Убитый горем, он утешал себя составлением большого сборника алгебраических задач с решениями в книге, названной им *Арифметика* (*Arithmetica*). Вот, пожалуй, и все, что известно о Диофанте из Александрии, и большая часть этого исходит от загадки, которая, как полагают, была написана его близким другом вскоре после его смерти[1]:

> Прах Диофанта покоится в этой могиле. И она, о чудо, искусно поведает нам, сколь долог был его век. Шестую часть жизни Бог одарил его детством; когда минула еще одна двенадцатая часть, пушком покрылись его щеки; спустя седьмую долю жизни, Он зажег его брачную свечу, а на пятом году его брака Он послал ему сына. Увы, поздний и слабый ребенок, достигнув половины жизни отца своего, был забран холодной могилой. Еще четыре года горе свое утешал он наукой о числах, и тут конца жизни своей он достиг[2].

Эпитафия немного неоднозначна в отношении смерти сына Диофанта. Как в ней сказано, тот умер, «достигнув половины жизни отца своего», но что значит эта половина жизни отца – половина возраста Диофанта – момент смерти его сына или на момент его собственной смерти? Задачу можно решать любым способом, но вторая версия – сын Диофанта прожил половину лет, которые в итоге прожил сам

---

[1] Thomas L. Heath, *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra*, second edition (Cambridge University Press, 1910; Dover Publications, 1964), 3.

[2] *Greek Mathematical Works II: Aristarchus to Pappus of Alexandria* (Loeb Classical Library No. 362), translated by Ivor Thomas (Harvard University Press, 1941), 512–3.

Диофант, – имеет хорошее, простое решение в целых числах без долей лет.

Пусть x – это общее количество лет, прожитых Диофантом. Каждый отрезок жизни Диофанта – это либо доля его полной жизни (например, $x/6$ – это его детство), либо целое число лет (например, до рождения сына он был женат 5 лет).

Сумма всех этих периодов жизни Диофанта равна x, поэтому загадку можно записать просто алгебраически:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей – 84, поэтому умножим на него все члены уравнения слева и справа:

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x.$$

Собрав множители x в левой части, а константы – в правой, получим:

$$84x - 14x - 7x - 12x - 42x = 420 + 336.$$

Или:

$$9x = 756.$$

А само решение:

$$x = 84.$$

Итак, до 14 лет Диофант был мальчиком, а через 7 лет смог, наконец, отрастить бороду. Спустя двенадцать лет, в возрасте 33 года, он женился, а через 5 лет у него родился сын. Сын умер в возрасте 42 года, когда Диофанту было 80, а сам Диофант умер 4 года спустя.

На самом деле есть более быстрый способ решения этой загадки: если задуматься глубже, то можно понять, что у автора загадки нет намерения утруждать нас дробными числами. «Двенадцатая часть» и «седьмая часть» жизни Диофанта должны быть целыми числами, поэтому возраст в год его смерти делится одинаково и на 12, и на 7 (и еще на 6 и на 2). Вот и умножьте 12 на 7, чтобы получить 84. Для зрелого возраста это близко к истине и потому, наверно, правильно.

Возможно, Диофант умер в 84 года, но крайне важный исторический вопрос – *когда?* Когда-то оценки периода жизни Диофанта колебались от 150 года до н. э. до 280 года н. э.[1] Это довольно расплывчатый диапазон: он определенно ставит Диофанта после таких ранних александрийских математиков, как Евклид (блистал ок. 295 г. до н. э.[2]) и Эратосфен (ок. 276–195 г. до н. э.), но может сделать его современником Герона Александрийского (известного и как Герой и блиставшего в 62 г. н. э.), который написал книги по механике, пневматике и автоматах и, видимо, изобрел прообраз парового двигателя. Возможно, Диофант знал и александрийского астронома Птолемея (ок. 100–170 г. н. э.), известного главным образом по *Альмагесту*, содержавшему первую тригонометрическую таблицу и заложившему основы математики движения небесных тел, которая не была убедительно опровергнута вплоть до революции Коперника в XVI–XVII веках.

К сожалению, у Диофанта, видимо, не было контактов с другими александрийскими математиками и учеными. В последние примерно сто лет исследователи сходятся во мнении, что Диофант творил около 250 года н. э., и его самый главный труд *Арифметика* датируется, скорее всего, этим временем. Так что время рождения Диофанта приходится примерно на время смерти Птолемея. Пол Теннери, который редактировал каноническое греческое издание *Арифметики* (издано в 1893–1895 гг.), отмечал, что работа была посвящена «уважаемому Дионисию». Несмотря на распространенное имя, Теннери догадался, что это был тот самый Дионисий, который был главой школы Катехизиса в Александрии в 232–247 годах, а затем Епископом Александрийским в 248–265 годах. Таким образом, Диофант мог быть христианином[3]. Если это так, то можно усмотреть злую иронию в том, что один из ранних (но потерянных) комментариев к *Арифметике* был написан Ипатией (Hypatia) (ок. 370–415 гг.), дочерью Теона (Theon) и последней из великих александрийских математиков, которая была забита толпой христиан, настроенной против ее «языческой» философии.

Математика Древней Греции была традиционно сильнейшей в геометрии и астрономии. Диофант был этническим греком, но его отли-

---

1 Эти даты до сих пор сохраняются в Simon Hornblower and Antony Sprawforth, eds., Oxford Classical Dictionary, revised third edition (Oxford University Press, 2003), 483.

2 Все остальные даты александрийских математиков – из Charles Coulston Gillispie, ed., Dictionary of Scientific Biography (Scribners, 1970).

3 Heath, Diophantus of Alexandria, 2, note 2. Сам же автор этой книги, похоже, сомневается в этом.

чало то, что он утешал свое горе после смерти сына «наукой о числах», или, как мы теперь ее называем, *алгеброй*. Видимо, от него исходит несколько алгебраических новшеств, включая использование символов и сокращений, означавших переход от словесной формулировки задачи к современной алгебраической нотации.

Шесть книг *Арифметики* (считается, что изначально их было 13) представляют собой задачи нарастающей сложности, большинство из которых едва ли труднее, чем загадка о возрасте Диофанта. Нередко задачи Диофанта имеют много неизвестных. Некоторые из его задач *неопределенны*, то есть имеют более одного решения. Все, кроме одной, задачи из *Арифметики* абстрактны в том смысле, что они строго числовые и не относятся к объектам реального мира.

Еще один элемент абстракции у Диофанта – возведение в степень. До того времени математикам были известны степени 2 и 3. Квадраты были нужны для вычисления площадей, а кубы – для вычисления объемов тел. Но Диофант допускал в своих задачах и более высокие степени: степень 4 (которую он назвал «квадрат квадрата»), 5 («квадрат куба») и 6 («куб куба»). Такие степени не имели физической аналогии в мире, который был известен Диофанту, и указывали на то, что Диофант не очень беспокоился о практичности своей математики. Это была просто занимательная математика без цели, но для развития ума.

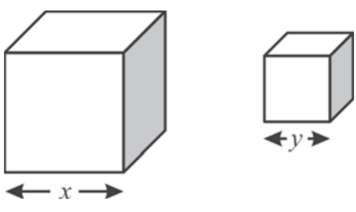
Вот первая задача из Книги IV[1]. Диофант формулирует ее сначала общими словами:

> Разделить заданное число на два куба так, чтобы сумма их сторон была равна другому заданному числу.

Затем он задает эти два числа:

> Заданное число – 370, заданная сумма сторон – 10.

Геометрически он имеет дело с двумя кубами разных размеров. Как современные алгебраисты, мы с вами могли бы обозначить стороны двух кубов x и y:



[1] Heath, Diophantus of Alexandria, 168.

Эти две стороны (x и y) составляют в сумме 10. Объемы двух кубов (x^3 и y^3) в сумме дают 370. Теперь запишем два уравнения:

$x + y = 10;$
$x^3 + y^3 = 370.$

Из первого уравнения следует, что y равно $(10 - x)$, и его можно подставить во второе уравнение:

$x^3 + (10 - x)^3 = 370.$

Теперь трижды перемножаем $(10 - x)$ и уповаем, чтобы кубы в конечном счете сократились:

$x^3 + (1000 + 30x^2 - 300x - x^3) = 370.$

К счастью, так и происходит, и после небольших группировок получаем:

$30x^2 - 300x + 630 = 0.$

Коэффициенты в левой части имеют общий множитель, поэтому желательно сократить обе части на 30:

$x^2 - 10x + 21 = 0.$

Теперь все почти готово. У нас есть два варианта. Если вспомнить формулы квадратных уравнений[1], то можно применить их. Или если еще свеж опыт решения подобных уравнений, можно, пристально взглянув на него и подумав некоторое время, разложить его, как по волшебству, следующим образом:

$(x - 7)(x - 3) = 0.$

Таким образом, длины двух сторон – 7 и 3. В сумме они дают 10, а их кубы – 343 и 27 – дают в сумме 370.

Диофант решает задачу совсем не так, как мы с вами. В сущности, он этого просто не может сделать. Хотя часто в задачах Диофанта много неизвестных, его система обозначений позволяет ему представлять только одно неизвестное. Однако он очень изобретательно восполняет данный недостаток. Вместо того чтобы обозначать стороны двух кубов как x и y, он говорит, что эти две стороны равны $(5 + x)$ и $(5 - x)$. Две эти стороны выражаются посредством одного неизвест-

[1] Для $ax^2 + bx + c = 0$ решение $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

ного x, и они на самом деле дают в сумме 10. Тогда он может возвести их в куб и приравнять сумму к 370:

$$(5 + x)^3 + (5 - x)^3 = 370.$$

Теперь это выглядит хуже того, с чем мы уже сталкивались, но стоит только развернуть кубические скобки, как члены уравнения начинают сокращаться, как сумасшедшие, и у нас остается лишь:

$$30x^2 + 250 = 370.$$

После некоторых простейших перегруппировок и последующего деления на 30 оно сводится к

$$x^2 = 4.$$

Или x равняется 2. Так как стороны – это $(5 + x)$ и $(5 - x)$, то их величины – 7 и 3.

Умение Диофанта решать такие задачи с меньшими, чем современный студент, усилиями – результат его потрясающей способности выражать должным образом две величины посредством одной переменной. Сработает ли этот метод в следующей задаче? Может, да. А может, нет. Разработка общих методов решения алгебраических уравнений – это то, чего у Диофанта, по сути дела, *нет* вообще. Как заметил один математик, «каждый вопрос требует весьма специфического метода, который зачастую не пригоден даже для очень близких задач. Именно поэтому современному математику даже после изучения ста диофантовых задач будет трудно решить сто первую»[1].

Понятно, что когда Диофант предлагает задачу с суммой кубов 370 и суммой сторон 10, он, конечно же, берет числа не с потолка. Он знает, что эти условия приводят к решению в целых числах. Действительно, термин *диофантово уравнение* появился для обозначения алгебраического уравнения, где допустимы только целочисленные решения. Диофантовы уравнения могут иметь множество неизвестных, и эти неизвестные могут возводиться в целочисленные степени, однако решения (если они есть) – всегда целочисленные. Несмотря на то что при формулировке своих задач Диофант часто использует вычитание, его решения никогда не содержат отрицательных чисел. «Очевидно, что об отрицательных величинах *как таковых*, то есть без

---

[1] Это цитата Германа Ганкеля (Hermann Hankel) (1874) из книги Heath, Diophantus of Alexandria, 54–55. Другие математики обнаружили общие подходы в методах Диофанта. См. Bashmakova I. G. Diophantus and Diophantine Equations (Mathematical Association of America, 1997), ch. 4.

некоего положительного значения, которое вычитается из чего-то, Диофант понятия не имел»[1]. Так же, как не было у него ни одной задачи с нулевым решением. Ноль у древних греков не считался числом.

Современные читатели Диофанта – особенно те, кто уже знают, что диофантовы уравнения имеют лишь целочисленные решения, – могут слегка удивиться, обнаружив у Диофанта *рациональные числа*. Рациональными их называют не потому, что они логичны или разумны в некотором смысле, а потому, что их можно представить как *отношение* (*ratio*) двух целых чисел. Например,

$$\frac{3}{6}$$

– рациональное число.

Рациональные числа появляются лишь в одной задаче *Арифметики*, которая содержит настоящие объекты реального мира, особенно такие вечно любимые, как вино и деньги. В условии задачи рациональных чисел будто бы нет, но они потребуются при ее решении:

> Человек покупает некоторое количество мер вина: одно вино – по 8, другое – по 5 драхм за меру. Он платит за них *квадратное* число драхм; а если мы добавим к этому числу 60, то получим квадрат, сторона которого есть целое число мер. Определите, сколько мер он купил по каждой цене[2].

Под «квадратным числом» Диофант понимает результат умножения некоторого числа на себя. Например, 25 – это квадратное число, так как оно равно 5 раз по 5.

После страницы расчетов[3] оказывается, что количество мер по 5 драхм – это рациональное число

$$\frac{79}{12},$$

а количество мер по 8 драхм – это рациональное число

$$\frac{59}{12}.$$

Давайте проверим эти результаты. (Проверить решение гораздо легче, чем найти его.) Если умножить 5 драхм на 79/12 и добавить к этому произведение 8 драхм на 59/12, получится, что человек за-

---

[1] Heath, Diophantus of Alexandria, 52–53.
[2] Heath, Diophantus of Alexandria, 224.
[3] Heath, Diophantus of Alexandria, 225.

платил в общей сложности $72^1/_4$ драхмы. Диофант утверждает, что человек заплатил «*квадратное* число драхм», то есть плата должна быть квадратом чего-то. Довольно любопытно, что Диофант считает $72^1/_4$ квадратным числом, раз оно может быть выражено отношением

$$\frac{289}{4},$$

где и числитель, и знаменатель – квадраты 17 и 2 соответственно. Таким образом, $72^1/_4$ – квадрат 17/2, или $8^1/_2$. Дальше Диофант говорит, что «если мы добавим к этому числу 60, то получим квадрат, сторона которого есть целое число мер». И здесь «целое число мер» не связано с целыми числами. Диофант (или, точнее, его английский переводчик сэр Томас Хит (Thomas Heath)) подразумевает под этим *общее* число мер. Добавление 60 к $72^1/_4$ дает в результате рациональное число $132^1/_4$, или

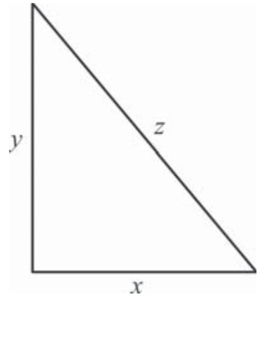
$$\frac{529}{4}.$$

И снова Диофант считает, что это квадрат, потому что и числитель, и знаменатель – квадраты 23 и 2 соответственно. Таким образом, общее число купленных мер – 23/2, или $11^1/_2$, что можно также получить сложением 79/12 и 59/12.

Наверное, самая известная задача в *Арифметике* – это задача 8 из Книги II: «Разбить заданное квадратное число на два квадрата», то есть найти такие x, y и z, что

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

У этой задачи есть геометрическая интерпретация, связанная с теоремой Пифагора о соотношении сторон прямоугольного треугольника:



Задача имеет множество решений в целых числах, например x, y и z могут быть равны 3, 4 и 5 соответственно. (Сумма квадратов 9 и 16 дает 25.) Такое простое решение, видимо, не привлекает Диофанта, и он, приняв «заданное квадратное число» (то есть z^2) за 16, получает две другие величины в виде рациональных чисел 144/25 и 256/25. Для Диофанта обе они – конечно же, квадраты. Первая – квадрат 12/5, вторая – квадрат 16/5, а сумма – квадрат 4:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 4^2.$$

На самом деле не имеет значения, что Диофант допускает решение в рациональных числах, потому что оно равносильно решению в целых числах. Просто умножьте обе части уравнения на 5^2, или на 25:

$$12^2 + 16^2 = 20^2.$$

Или 144 плюс 256 равняется 400. Это, в сущности, то же самое решение, потому что это всего лишь другой способ измерения сторон. В решении Диофанта гипотенуза равна 4. Это могли быть, скажем, 4 дюйма. Теперь воспользуемся другой линейкой с делениями в одну пятую дюйма, и гипотенуза станет равной 20, а стороны – 12 и 16.

Целые числа появились, когда люди начали считать предметы. Рациональные числа, по всей видимости, появились, когда люди начали измерять предметы. Если длина одной моркови – три пальца, а другой – четыре, то длина первой моркови – 3/4 длины второй.

Рациональные величины иногда называют *соизмеримыми*, потому что два объекта с длинами, выраженными рациональными числами, всегда могут быть перемерены в целых единицах. Нужно только сделать новую единицу измерения достаточно малой.

Диофант писал *Арифметику* на греческом языке. Какие-то части его труда были переведены на арабский. Сначала, в 1575 году, их перевели на латынь, а затем, в 1621 году, они вышли в улучшенной редакции, когда к ним проявили интерес европейские математики. Пьер де Ферма (1601–1665) имел собственную копию латинского перевода 1621 года, поля которой он испещрил своими обширными заметками. В 1670 году сын Ферма издал эти заметки вместе с латинской *Арифметикой*. Одной такой заметкой сопровождалась и только что приведенная задача. Ферма писал:

> С другой стороны, невозможно разделить куб на два куба, либо биквадрат [степень 4] на два биквадрата, либо вообще *любую степень, кроме квад-*

рата, – на две с тем же показателем степени. Я нашел этому поистине изумительное доказательство, для которого, однако, поля не достаточно велики[1].

Ферма утверждает, например, что

$$x^3 + y^3 = z^3$$

не имеет решений в целых числах, как не имеет их ни одно подобное уравнение со степенями 4, 5, 6 и т. д. Вообще говоря, это не очевидно. Уравнение

$$x^3 + y^3 + 1 = z^3$$

очень и очень близко к

$$x^3 + y^3 = z^3,$$

но оно имеет множество решений в целых числах, например когда x, y и z равны 6, 8 и 9 соответственно. Уравнение

$$x^3 + y^3 - 1 = z^3$$

тоже весьма похоже, но и оно имеет множество решений в целых числах, например 9, 10 и 12. Почему же эти два уравнения имеют решения в целых числах, а уравнение

$$x^3 + y^3 = z^3$$

их не имеет?

Все задачи из *Арифметики* Диофанта имеют решения, но многие диофантовы уравнения, как у Ферма, видимо, их не имеют. Вскоре математикам стало интереснее не столько *решать* диофантовы уравнения, сколько определять, имеет ли вообще частное диофантово уравнение решение в целых числах.

Несуществующее доказательство Ферма стало известно как Великая теорема Ферма (или Большая теорема Ферма), и долгие годы было принято считать: что бы ни *думал* Ферма о своем доказательстве, оно, скорее всего, неверно. Только в 1995 году Теорема Ферма была доказана английским математиком Эндрю Уайлсом (род. в 1953 г.), который интересовался этой проблемой с десяти лет. (Для многих частных случаев, когда, например, показатель степени равен 3, отсутствие решения было установлено много раньше.)

Очевидно, доказательство того, что у некоторого диофантова уравнения *нет* приемлемого решения, гораздо привлекательнее, чем по-

---

1 Heath, Diophantus of Alexandria, 144, note 3.

иск решения, когда известно, что оно есть. Если известно, что у частного диофантова уравнения есть решение, можно просто проверить все возможности. Допустимые решения – только целочисленные, поэтому начинаем пробовать 1, затем 2, 3 и т. д. Если же столь утомительная работа вам уже невмоготу, просто напишите компьютерную программу, которая проверит за вас все возможности. Рано или поздно она найдет решение.

Но если неизвестно, что решение существует, компьютерный подход с позиций грубой силы совершенно не годится. Его можно начать, но как узнать, когда его закончить? Как убедиться, что все последующие проверяемые наборы чисел будут совсем не тем, что мы ищем?

Всё проклятие чисел – в их *бесконечности*.

Глава 2

Иррациональные и трансцендентные числа

Начав считать 1, 2, 3, мы можем продолжать настолько долго, насколько захотим. Такие числа известны как *счетные*, *целые*, *кардинальные*, *натуральные*, и они, конечно, *кажутся* достаточно естественными и интуитивно понятными, потому что вселенная содержит очень много объектов, которые мы можем посчитать. Натуральные числа были, вероятно, первыми математическими объектами, постигнутыми первобытными людьми. У некоторых животных, видимо, тоже есть понимание чисел, пока они не становятся слишком большими.

Нуль веками не входил в натуральный ряд чисел, и даже теперь здесь нет твердого согласия. (Учебники по теории чисел обычно предупреждают на первой странице, включает ли автор нуль в натуральный ряд чисел.) По другую сторону нуля – отрицательные целые числа. Ко всем положительным и отрицательным целым числам, как и к нулю, больше всего подходит слово *целое* (или *целочисленное*). Целые числа уходят в бесконечность в двух противоположных направлениях:

... –3 –2 –1 0 1 2 3 ...

Для обозначения только положительных целых чисел, начинающихся с 1, лучше всего подходит термин *положительные целые*. Для положительных чисел, начинающихся с нуля (то есть 0, 1, 2, 3...), однозначным и не *слишком* многословным будет термин *неотрицательные целые*.

Рациональные числа – это числа, которые могут быть выражены отношением целых чисел (дробью), за исключением знаменателя 0. Например,

$$\frac{3}{5}$$

– рациональное число, обычно записываемое и в десятичной форме:

0,6.

Рациональные числа включают и все целые числа, потому что любое целое число (скажем, 47) может быть записано дробью со знаменателем 1:

$$\frac{47}{1}.$$

Любое число с конечным числом десятичных разрядов – тоже рациональное. Например,

–23,45678

может быть представлено отношением:

$$\frac{-2\,345\,678}{100\,000}.$$

Некоторые рациональные числа, например

$$\frac{1}{3},$$

требуют для представления в десятичной форме бесконечного количества цифр:

0,3333333333...

Это – все еще рациональное число, потому что оно – дробь. Более того, любое число с *повторяющимся набором* цифр где-то после десятичной запятой – это рациональное число. Число

0,234562345623456...

– рациональное, если набор цифр 23456 повторяется бесконечно. Чтобы показать, что оно – рациональное, давайте приравняем его к x:

x = 0,234562345623456...

Теперь умножим обе части равенства на 100 000:

100 000 x = 23 456,23456234562346...

Хорошо известно, что если вычесть одну и ту же величину из обеих частей равенства, то равенство сохранится. Это значит, что можно вычесть из второго равенства первое: вычитаем x из 100 000x и 0,23456... из 23 456,23456..., и десятичная часть исчезает:

99 999x = 23 456.

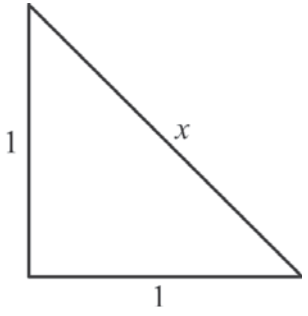
Таким образом:

$$x = \frac{23456}{99999}.$$

Это – отношение, а значит, рациональное число.

Только на первый взгляд кажется, что рациональные числа обладают совершенной полнотой. Если сложить два рациональных числа, получится другое рациональное число. Вычитание, умножение или деление рациональных чисел также дает в результате рациональное число.

Можно было бы предположить (как многие годы считали люди), что все числа – рациональные, но рассмотрим гипотенузу этого простого прямоугольного треугольника:



Согласно Теореме Пифагора,

$$x^2 = 1^2 + 1^2,$$

или

$$x^2 = 2,$$

или

$$x = \sqrt{2}.$$

Существует ли отношение двух целых чисел, которое, будучи умноженным на себя, дает в результате 2? Конечно, можно поискать и найти много рациональных чисел, которые дадут очень близкий к искомому результат. Одно из них:

$$\frac{53492}{37825}.$$

Правда, оно чуть меньше. Умноженное на себя, оно дает примерно 1,99995. Если мы продолжим поиски, то, возможно, найдем точное решение.

Или мы зря тратим свое время?

Трудно доказывать, что чего-то не существует, но математики придумали вид доказательства, которое часто подходит в подобных случаях. Оно называется *косвенным доказательством*, или *доказательством от противного*, на латыни – *reductio ad absurdum* («сведение к нелепости»). Вы начинаете с предположения. Затем из этого предположения вы делаете логические выводы, пока не «упираетесь» в противоречие. Это противоречие означает, что первоначальное предположение было неверным.

Доказательства *reductio ad absurdum* похожи на окольный путь, но они, судя по всему, чаще, чем мы думаем, распространены в обычной жизни. Алиби – разновидность *reductio ad absurdum*. Если ответчик был на месте преступления *и* в доме своей матери, это значит, что он был сразу в двух разных местах одновременно. Абсурд!

Давайте начнем с предположения, что квадратный корень из 2 – рациональное число. А раз так, то существуют такие целые числа a и b, что:

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Являются ли a и b оба четными? Если да, разделим их оба на 2 и заменим их половинами. Если и они – все еще четные, делим их тоже на 2 и продолжим так до тех пор, пока или a, или b (или они оба) не станет нечетным.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\frac{a^2}{b^2} = 2.$$

Или:

$$a^2 = 2b^2.$$

Заметим, что квадрат a вдвое больше квадрата b. Это означает, что квадрат a четен, а это возможно лишь тогда, когда само число a – четное. Ранее мы установили, что a и b не могут быть оба четными, таким образом, теперь мы знаем, что нечетно число b.

Если a – четное, то оно вдвое больше некоторого целого числа, которое мы обозначим c:

$(2c)^2 = 2b^2$.

Или:

$4c^2 = 2b^2$.

Или:

$2c^2 = b^2$.

Это значит, что квадрат b – четное число, а раз так, то и b – тоже четное, как и a, что противоречит первоначальному предположению о том, что a и b не могут быть оба четными.

Следовательно, исходное предположение о том, что квадратный корень 2 – рациональное число, неверно. Квадратный корень 2 – бесспорно, *иррациональное* число. В десятичной форме его цифры следуют без видимых повторов цепочек цифр:

1,4142135623730950488016887242097...

Это число невозможно записать точно, не имея бесконечных запасов бумаги, чернил и времени. Можно лишь приближаться к нему, и многоточие – признание нашего поражения. Ближе всего можно подойти к этому числу с помощью алгоритма его вычисления. (Именно это я и сделаю в главе 6.)

Как ни странно, есть причина, почему используемые нами термины – рациональный и иррациональный – выносят приговор здравомыслию чисел. Иногда иррациональные числа называют также *несоизмеримыми* (*surds*), с тем же корнем, что в слове *абсурд* (*absurd*). Иррациональные числа были известны древним грекам, но те им очень не нравились. Согласно преданию (но не достоверной истории), иррациональность квадратного корня из 2 установил в VI веке до н. э. ученик Пифагора Гиппазий. Далее легенда гласит, что это открытие настолько возмутило логичных и рациональных греков, что Пифагор и его последователи попытались погасить возмущение, сбросив Гиппазия в Средиземное море. Им, конечно же, хотелось, чтобы иррациональных чисел не было. Отказываясь в своих задачах от иррациональных чисел, Диофант следовал древней традиции: иррациональные числа были ему совсем не по вкусу.

В десятичной записи, которая есть у нас (но которой не было у древних греков), легко создавать числа, явно иррациональные. Достаточно лишь написать что-нибудь пикантное *без* повторений цифровых шаблонов. Вот, например, число с ненормальным, в некотором