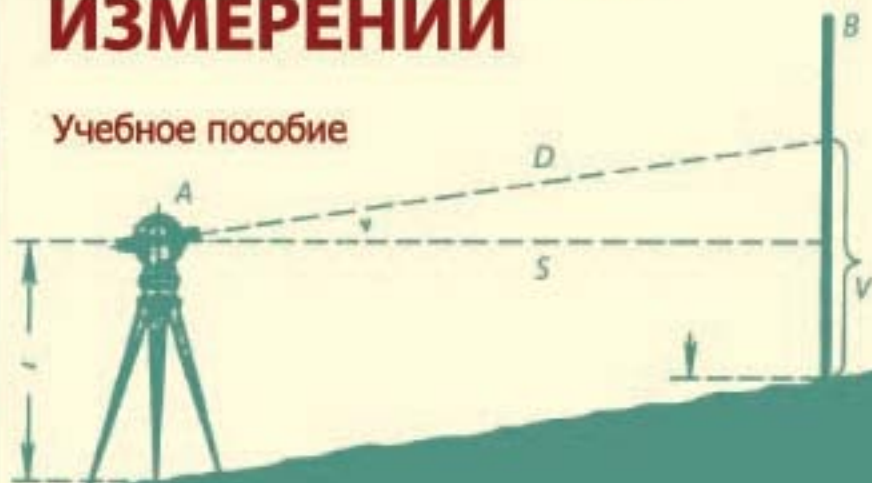




А.Б. Беликов  
В.В. Симонян

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие



ГЕОДЕЗИЯ

Министерство образования и науки Российской Федерации  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.Б. Беликов, В.В. Симонян

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

*Учебное пособие*

2-е издание

Москва 2016

УДК 621.311.22  
ББК 31.37+38.728  
Б43

**Р е ц е н з е н т ы:**

доктор технических наук, профессор *В.Н. Баранов*,  
ФГБОУ ВПО «Государственный университет по землеустройству» (ГУЗ);  
кандидат технических наук, профессор *И.И. Ранов*, НИУ МГСУ

**Беликов, А.Б.**

Б43 Математическая обработка результатов геодезических измерений : учебное пособие / А.Б. Беликов, В.В. Симонян ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Нац. исследоват. Моск. гос. строит. ун-т. 2-е изд. Москва : НИУ МГСУ, 2016. 432 с.

ISBN 978-7264-1255-9

Рассмотрены основные вопросы теории погрешностей, необходимые при обработке геодезических результатов измерений. Приведены сведения по теории вероятностей и математической статистике, положенные в основу изложения курса. Рассмотрены варианты обработки результатов традиционных методов измерений, а также GPS-измерений. Приведены общие сведения по методу наименьших квадратов. Отдельно рассмотрен вопрос применения метода наименьших квадратов к уравниванию геодезических сетей и построению эмпирических формул.

Для аспирантов, обучающихся по направлению 21.06.01 Геология, разведка и разработка полезных ископаемых по программе «Геодезия в строительстве».

**УДК 621.311.22**  
**ББК 31.37+38.728**

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из 6 разделов. В конце каждого раздела приводятся решения типовых примеров, задачи и вопросы для самоконтроля.

В основу изложения раздела «Теория погрешностей» положен учебник профессора Ю.В. Кемница «Теория ошибок измерений», «Недра», Москва, 1967 год. Однако в раздел пришлось внести ряд изменений и дополнений.

Раздел «Теория погрешностей» в настоящее время излагается на основе дисциплин «Теория вероятностей» и «Математическая статистика». Поэтому представляется уместным поместить в начале разделы «Справочные сведения из теории вероятностей» (Раздел I) и «Справочные сведения из математической статистики» (Раздел II). Целый ряд понятий, таких как «математическое ожидание», «дисперсия», «оценка параметра» и прочие, связанных с указанными математическими дисциплинами, вводится без каких-либо дополнительных пояснений или определений.

Объединены разделы «Математическая обработка ряда равноточных результатов измерений» и «Математическая обработка ряда неравноточных результатов измерений», традиционно помещаемых раздельно во всех учебниках по теории погрешностей. При совместном рассмотрении этих разделов равноточные измерения рассматриваются как частный случай неравноточных измерений, и все формулы для этого случая легко вытекают из общего случая.

В предлагаемом учебном пособии свойства случайных погрешностей сформулированы в виде аксиом. Доказательства теорем теории погрешностей результатов геодезических измерений выполнены на базе соответствующих положений математической статистики. Приведены примеры использования методов теории погрешностей и дисперсионного анализа при исследовании геодезических приборов. Уточнены в соответствии с ГОСТами многие определения. Рассмотрены некоторые приемы априорной оценки точности.

Дополнительно введен раздел «Теория погрешностей зависимых результатов измерений» с примерами обработки GPS-измерений и раздел по основополагающим принципам метода наименьших квадратов в применении к уравниванию геодезических сетей и составлению эмпирических формул.

Авторы выражают большую благодарность всем, кто в той или иной форме принял участие в создании настоящего учебного пособия. Прежде всего это заведующий кафедрой геодезии и геоинформатики ГУЗа профессор Владимир Николаевич Баранов и профессор кафедры геодезии и геоинформатики ГУЗа Михаил Исаакович Перский, сделавшие много замечаний и предложений, учет которых значительно повлиял на качество пособия.

\*\*\*

Александр Борисович Беликов был видным ученым в области геодезии, землеустройства и кадастров, профессором Государственного университета по землеустройству.

Имея огромный опыт преподавания таких дисциплин, как теория вероятностей, математическая статистика и теория погрешностей измерений, А.Б. Беликов решил отразить его в учебном пособии, позволяющем в целом лучше освоить материал данных курсов.

К сожалению, Александр Борисович не успел в полной мере это осуществить. Являясь его учеником, я посчитал своим долгом продолжить эту работу и подготовить учебное пособие к изданию.

Доц., к.т.н. В.В.Симонян

# Раздел I . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

### 1.1. Основные понятия

Исходным пунктом построения теории вероятностей как любой теоретической науки являются экспериментальные факты, на основе которых формируются соответствующие абстрактные понятия. Чтобы разобраться в таких фактах, введем некоторые термины и определения.

Будем называть *опытом* любую реализацию некоего фиксированного комплекса условий  $S$ , который должен строго повторяться при повторении одного и того же опыта.

Результаты опыта можно характеризовать качественно и количественно.

Качественная характеристика опыта состоит в регистрации какого-нибудь факта. Любой такой факт называется *событием*. При этом говорят, что «событие появилось (произошло)» или «событие не появилось (не произошло)» в результате опыта. Будем обозначать события прописными латинскими буквами  $A, B, C$ .

Два события  $A$  и  $B$  называют *равными* ( $A = B$ ), если осуществление одного из них, неважно, какого, влечет за собой наступление другого.

События  $A$  и  $B$  называются *несовместными*, если осуществление одного из них, неважно, какого, исключает наступление другого. События  $A$  и  $B$  будут *совместными*, если осуществление одного из них, неважно, какого, не исключает наступление другого.

Событие  $\bar{A}$  называется противоположным (дополнительным) событию  $A$ , если его осуществление означает неосуществление события  $A$ .

Объединением (суммой) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , означающее осуществление хотя бы одного из событий  $A$  и  $B$ .  $C$  помощью специального знака объединения  $\cup$  можно написать  $C = A \cup B$ . Объединяться может и большее число событий, например, объединением событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будет событие

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Совмещением (пересечением, произведением) событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , означающее наступление и события  $A$ , и события  $B$ .  $C$  помощью знака совмещения  $\cap$  можно написать  $C = A \cap B$ . Совмещаться может и большее число событий, например, совмещением событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будет событие

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^n A_i.$$

Разностью событий  $A$  и  $B$  называется событие  $C$ , означающее, что происходит событие  $A$ , но не происходит событие  $B$ . Это обычно записывают как  $C = A \setminus B$ .

Если при испытании событие  $A$  должно наступить обязательно, с неизбежностью, то такое событие называют *достоверным*. В противоположном случае, когда событие  $A$  при испытании не должно осуществиться, оно называется *невозможным*.

Событие будет *случайным*, если при испытании оно может наступить, но может и не наступить. Ясно, что случайное событие занимает промежуточное положение между событиями достоверным и невозможным.

Анализируя комплекс условий  $S$ , осуществляемый при проведении испытаний, можно выделить так называемое *множество  $\Omega$  элементарных исходов*  $\omega$ . Это множество включает в себя единственно возможные и попарно несовместные элементарные исходы. Например, пусть испытание состоит в фиксации числа очков, выпавших на грани игральной кости. Здесь множество  $\Omega$  состоит из 6 единственно возможных и несовместимых элементарных исходов, соответствующих граням кости, помеченным в соответствии с цифрами 1, 2, ..., 6.

Рассмотрим некоторое случайное событие  $A$ , которое при испытании, порождающем множеством элементарных исходов  $\Omega$ ,

может наступить лишь в случае, когда реализуется какой-либо элементарный исход  $\omega$ , принадлежащий подмножеству  $\Omega_A$  множества  $\Omega$  ( $\omega \in \Omega_A \subseteq \Omega$ ). Например, пусть событие  $A$  заключается в выпадении на грани игральной кости четного числа очков. Тогда  $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$ , и реализация любого из трех элементарных исходов, являющихся элементами этого множества, влечет за собой наступление случайного события  $A$ . В подобных случаях случайное событие  $A$  можно формально отождествить с множеством  $\Omega_A$ , т.е. записать, что  $A = \Omega_A$ .

Если  $A = \Omega$ , то событие  $A$  будет достоверным. Если же  $A = \emptyset$ , где  $\emptyset$  — символ пустого множества, то событие  $A$  будет невозможным.

Говорят, что случайное событие  $A$  влечет за собой наступление события  $B$ , когда  $A$  содержится в  $B$ , т.е.  $A \subseteq B$ . Например, пусть событие  $A$  есть выпадение на грани игральной кости 2 очков, а событие  $B$  — выпадение на грани не менее 4 очков. Тогда  $A \subset B$ .

## 1.2. Частость и вероятность случайного события

Пусть при неизменном комплексе условий  $S$  проведена серия из  $n$  испытаний и при каждом из них фиксировалось появление или не появление случайного события  $A$ . Допустим, что случайное событие  $A$  осуществилось при этом  $m$  раз. Тогда говорят, что частота этого события равна  $A$ , а частость

$$H(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.1)$$

Пусть при неизменном комплексе условий  $S$  осуществлено значительное число таких серий испытаний достаточно большой длины и при этом оказалось, что частости  $H(A)$ , вычисленные для всех серий испытаний, будут числами, близкими одно к другому. Тогда говорят, что случайное событие  $A$  обладает *устойчивой частостью* (или просто *устойчивой частотой*). Число, около которого колеблется устойчивая частость, называется *вероятностью* случайного события  $A$  и обозначается через  $P(A)$ .

Вероятность численно выражает степень объективной возможности наступления случайного события и является абстрактным отражением его устойчивой частоты. Соотношение между  $H(A)$  и  $P(A)$  аналогично соотношению между физическими объектами



и их математическим образом. Например, между физическими точками (прямыми), поставленными или проведенными на доске мелом или на бумаге карандашом, и их абстрактными геометрическими образами — математическими точками (прямыми). Как операции с абстрактными геометрическими образами отражают свойства реального физического пространства, так и операции с вероятностями случайных событий должны отражать свойства устойчивых частот этих случайных событий. Поэтому  $H(A)$  часто называют *статической вероятностью* в отличие от близкой к ней величины — математической вероятности  $P(A)$ .

Из самого определения  $H(A)$ , задаваемого формулой (1.1), следует, что  $0 \leq H(A) \leq 1$ . Поэтому и на  $P(A)$  целесообразно наложить условие

$$0 \leq P(A) \leq 1. \quad (1.2)$$

Если событие достоверно, то при всех испытаниях оно неизбежно осуществится, и потому согласно (1.1) его частота будет равна 1.

Поэтому полагают

$$P(\Omega) = 1. \quad (1.3)$$

Если случайные события  $A$  и  $B$  несовместные, то при надлежаще исполненной серии испытаний можно подсчитать, что  $H(A \cup B) = H(A) + H(B)$ . Потому для несовместных случайных событий  $A$  и  $B$  принимают, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (1.4)$$

Наложенные требования (1.2) — (1.4) на вероятности случайных событий можно рассматривать как систему аксиом, лежащих в основе теории вероятностей.

С помощью приведенных аксиом можно доказать следующие положения.

1. Вероятность случайного события  $\bar{A}$ , противоположного событию  $A$ , равна дополнению  $P(A)$  до единицы, т.е.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (1.5)$$

2. Вероятность невозможного события равна нулю, т.е.

$$P(\emptyset) = 0. \quad (1.6)$$

3. Вероятность разности событий  $A$  и  $B$  равна

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B). \quad (1.7)$$

4. Если случайные события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно несовместны, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i). \quad (1.8)$$

5. Если случайные события  $A$  и  $B$  совместны, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \quad (1.9)$$

### 1.3. Классическое определение вероятности

Пусть при данном комплексе условий конечное множество  $\Omega$  состоит из  $n$  равновероятных элементарных исходов  $\omega$ . Далее положим, что случайное событие  $A$  наступает тогда, когда из всех  $n$  элементарных исходов реализуется любой из  $m$  элементарных исходов, принадлежащих множеству  $\Omega_A \subset \Omega$ . Элементы множества  $\Omega_A$  называют элементарными исходами, благоприятствующими наступлению события  $A$ . Тогда вероятность наступления события  $A$  определится как отношение

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.10)$$

т.е. будет равна отношению числа благоприятствующих элементарных исходов к общему числу единственно возможных равновероятных элементарных исходов.

Например, событие  $A$  есть выпадение четной цифры при бросании игральной кости. Если кость представляет собой правильный куб с изотропным распределением массы в его теле, то существует уверенность, что при ее бросании может с одинаковой возможностью выпасть любая из цифр от 1 до 6. Тогда полагаем  $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ ,  $n = 6$ ,  $\Omega_A = \{2, 4, 6\}$ ,  $m = 3$ , и поэтому  $P(A) = 1/2$ .

Так определялась вероятность случайного события с момента возникновения теории вероятности как науки. В дальнейшем оказалось, что такое определение вероятности недостаточно общее, и потому формула (1.10) не всегда применима. Действительно, решающим этапом в применении этой формулы является анализ комплекса условий, приводящий к выделению множеств  $\Omega$  и  $\Omega_A$ .

Однако этот анализ не всегда приводит к желаемым результатам. В примере с игральной костью такое выделение множеств  $\Omega$  и  $\Omega_A$  не удастся провести, если распределение масс в ее теле не будет изотропно и центр тяжести кости будет смещен относительно геометрического центра. Несмотря на это, классическое определение вероятности при решении практических задач часто позволяет получать приемлемые результаты.

## 1.4. Связь между случайными событиями. Условная вероятность

Случайные события  $A$  и  $B$  называются *независимыми*, если осуществление одного из них никак не повлияет на то, что появится или нет второе; в противном случае они будут *зависимыми*.

Пусть  $P(A)$  и  $P(B)$  — вероятности осуществления случайных событий  $A$  и  $B$ , посчитанные еще до испытания; их называют *безусловными*. Если события  $A$  и  $B$  зависимы и, например, событие  $A$  уже произошло, то вероятность наступления события  $B$  уже изменится; обозначим ее через  $P(B/A)$ . Эту вероятность называют *условной*, и обозначение  $P(B/A)$  читают так: вероятность события  $B$ , рассчитанная при условии, что событие  $A$  произошло.

Проводя испытания над зависимыми случайными событиями и вычисляя частоты их появления, можно установить закономерности, которые в абстрактной форме найдут отражение в виде формул:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{и} \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad (1.11)$$

которые и определяют условные вероятности зависимых случайных событий.

Из (1.11) вытекает правило подсчета вероятности совмещения двух зависимых случайных событий:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B/A) = P(B) P(A/B). \quad (1.12)$$

Для того чтобы два события  $A$  и  $B$  были независимы, необходимо и достаточно, чтобы вероятность их совмещения была произведением их безусловных вероятностей, т.е.

$$P(A \cap B) = P(A) P(B). \quad (1.13)$$

Условные вероятности обладают следующими свойствами.

1.  $0 \leq P(A/B) \leq 1$ .
2. Если  $A$  и  $B$  несовместны, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A/B) = 0$ .
3.  $P(\Omega/A) = 1$ .
4.  $P(A/A) = 1$ .
5. Если  $B \cap C = \emptyset$ , то  $P(B \cup C/A) = P(B/A) + P(C/A)$ .
6. Если  $B \subseteq A$ , то  $P(A/B) = 1$ .

Если случайные события  $A_1, A_2, \dots, A_n$  попарно несовместимы, а  $B$  — некоторое произвольное случайное событие, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i / B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i / B). \quad (1.14)$$

Если совмещаются случайные события, число которых более двух, то формула (1.12) принимает более обобщенный вид

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1A_2) \dots P(A_n / A_1A_2 \dots A_{n-1}), \quad (1.15)$$

где под  $P(A_n / A_1A_2 \dots A_{n-1})$  следует понимать условную вероятность события  $A_n$ , вычисленную в предположении, что события  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  уже произошли.

При расчетах вероятностей случайных событий большое значение имеет такая схема.

Пусть  $A$  — некоторое случайное событие,  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — попарно несовместимые случайные события, т.е.

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j),$$

такие, что  $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$ , и известны безусловные вероятности  $P(B_i)$  и условные вероятности  $P(A/B_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда справедливы следующие две формулы:

**формула полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i); \quad (1.16)$$

**формула Байеса**

$$P(B_j/A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)}, \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (1.17)$$

## 1.5. Схемы повторения испытаний

**Схема Бернулли.** Пусть в неизменном комплексе условий  $S$  проводится серия из  $n$  независимых испытаний и в результате каждого испытания фиксируется появление некоторого случайного события  $A$ . При этом положим, что вероятность осуществления события  $A$  при каждом отдельном испытании остается неизменной и равной  $p$ . Тогда вероятность того, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит ровно  $k$  раз, будет равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (1.18)$$

где  $q = 1 - p$  — вероятность события  $\bar{A}$ .

Здесь предполагается, что число испытаний  $n$  фиксировано.

При увеличении  $k$  от 0 до  $n$  вероятность  $P_n(k)$  сначала монотонно возрастает, а достигнув некоторого максимального значения  $P_n(k_0)$ , далее монотонно убывает. Число  $k_0$  называется наименее вероятным числом наступления случайного события  $A$ . Оно может быть найдено с помощью неравенств

$$np - q \leq k_0 \leq np + q \quad (1.19)$$

как единственное целое число, заключенное в указанных пределах.

Если число испытаний  $n$  велико, а вероятность  $p$ , наоборот, мала и произведение  $\lambda = np$  не мало, но и не велико, то в таком случае может быть использована приближенная формула Пуассона

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (1.20)$$

Если же число  $n$  велико и не мала вероятность  $p$ , то можно воспользоваться другим приближением, вытекающим из так называемой локальной теоремы Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_k), \quad (1.21)$$

где  $\varphi(x_k)$  по заранее вычисленной величине

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} \quad (1.22)$$

выбирается из помещенной в Приложении 1 таблицы значений функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.23)$$

**Полиномиальная схема.** В схеме испытаний Бернулли при каждом испытании было два возможных исхода: либо событие  $A$  наступит, либо, наоборот, не наступит. В рассматриваемой схеме испытаний возможны  $r > 2$  исходов  $B_1, B_2, \dots, B_r$  соответственно с вероятностями  $p_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ), причем

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1. \quad (1.24)$$

Тогда вероятность того, что при  $n$  независимых испытаниях исход  $B_1$  наступит  $k_1$  раз, исход  $B_2$  —  $k_2$  раз, ..., исход  $B_r$  —  $k_r$  раз, причем

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n, \quad (1.25)$$

будет равна

$$P_n(k_1, k_2, \dots, k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}. \quad (1.26)$$

Название рассматриваемой схемы испытаний объясняется тем, что правая часть равенства (1.26) есть общий член разложения  $n$ -й степени полинома, стоящего в левой части равенства (1.24). При  $r = 2$  полиномиальная схема обращается в схему Бернулли.

В случае использования формулы (1.26) при больших  $n$  приходится вычислять  $n!$ , что прямым путем затруднительно. Для этого можно воспользоваться приближенной формулой Стирлинга  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+0,5} e^{-n}$ .

**Схема Пуассона.** Пусть в неизменном комплексе условий  $S$  проводится достаточно большая серия испытаний  $n$  независимых испытаний. В результате каждого испытания фиксируется, произошло или нет некоторое событие  $A$ . Но теперь, в отличие от схемы Бернулли, будем считать, что при каждом испытании вероятность осуществления события  $A$  не остается постоянной, а от испытания к испытанию уменьшается в соответствии с формулой

$$p = \frac{\lambda}{n}, \quad (1.27)$$

где  $\lambda$  — некоторая константа.

Тогда вероятность, что при  $n$  испытаниях событие  $A$  наступит  $k$  раз, будет равна

$$p(k, \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.28)$$

## 1.6. Примеры решения типовых задач

### Пример 1.1

В ящике имеется  $a$  синих и  $b$  красных шаров. Вычислить вероятность того, что наугад вынутый шар окажется красным.

*Решение*

Пусть  $A$  — событие, состоящее в том, что вынут красный шар. Пространство элементарных исходов состоит из  $a+b$  событий, каждое из которых заключается в вытаскивании одного из шаров. Событию  $A$  соответствует  $b$  благоприятных исходов, следовательно

$$P(A) = \frac{b}{a+b}.$$

### Пример 1.2

В партии из  $n$  изделий  $k$  бракованных. Определить вероятность того, что среди выбранных наудачу  $m$  изделий ровно  $l$  изделий окажется бракованными.

*Решение*

Число возможных способов выбрать  $m$  изделий из  $n$  равно  $C_n^m$ . Благоприятствующими являются случаи, когда из общего числа  $k$  бракованных изделий взято ровно  $l$ , что можно сделать  $C_k^l$  способами, а остальные  $m-l$  изделий не бракованные. Они должны быть выбраны из оставшихся  $n-k$  стандартных деталей. Число вариантов такого отбора равно  $C_{n-k}^{m-l}$ . Общее число благоприятных исходов в этом случае будет равно произведению двух рассмотренных уже вариантов отбора  $C_k^l C_{n-k}^{m-l}$ , так как каждому возможному выбору бракованных изделий может соответствовать  $C_{n-k}^{m-l}$  вариантов выбо-

ра стандартных деталей. Тогда искомая вероятность будет равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу воз-

можных исходов, т.е. верно равенство  $p = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}$ .

## 1.7. Задачи для самостоятельного решения

1.1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадает четное число очков.

1.2. Замок с «секретом» имеет пять дисков, каждый из которых разделен на 6 дисков с нанесенными цифрами от 0 до 5. Замок открывается при определенном положении цифр относительно указателей. Определить вероятность того, что при произвольной установке цифр на дисках относительно указателей замок откроется.

1.3. В партии из 1000 деталей 10 бракованных. Наудачу выбирают 40 деталей. Определить вероятность того, что среди выбранных деталей будет ровно 4 бракованных.

1.4. В урне 3 белых и 5 черных шаров. Из урны наудачу вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что шары разного цвета.

1.5. При измерении 20 линий теодолитного хода в 3 из них были допущены грубые промахи. Наудачу выбраны 5 линий. Какова вероятность того, что 2 из них содержат грубые промахи.

1.6. Точка  $A$  появляется внутри эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Найти веро-

ятность того, что она окажется внутри эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k^2$  ( $|k| < 1$ ),

считая, что вероятность появления точки в некоторой области пропорциональна площади этой области и не зависит от места ее расположения внутри начального эллипса.

1.7. Имеется  $2n$  невязок в треугольниках сети триангуляции. Все невязки произвольно разбивают на две группы одинакового объема. Найти вероятность того, что две самые большие по абсолютной величине невязки окажутся: а) в одной группе; б) в разных группах. Как проконтролировать правильность вычисления искомых вероятностей?



# ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| ПРЕДИСЛОВИЕ .....   | 3         |
| <b>Раздел I . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ<br/>ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ .....</b>        | <b>5</b>  |
| 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ. ....  | 5         |
| 1.1. Основные понятия . . . . .   | 5         |
| 1.2. Частость и вероятность случайного события . . . . .                      | 7         |
| 1.3. Классическое определение вероятности . . . . .                           | 9         |
| 1.4. Связь между случайными событиями.<br>Условная вероятность . . . . .      | 10        |
| 1.5. Схемы повторения испытаний . . . . .                                     | 12        |
| 1.6. Примеры решения типовых задач . . . . .                                  | 14        |
| 1.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                            | 15        |
| 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ . . . . .   | 16        |
| 2.1. Основные понятия. Функция и плотность распределения . . . . .            | 16        |
| 2.2. Числовые характеристики случайных величин . . . . .                      | 21        |
| 2.3. Примеры случайных дискретных величин . . . . .                           | 26        |
| 2.4. Примеры случайных непрерывных величин. . . . .                           | 28        |
| 2.5. Центральная предельная теорема Ляпунова . . . . .                        | 37        |
| 2.6. Закон больших чисел . . . . .  | 38        |
| 2.7. Решение типовых задач . . . . .  | 40        |
| 2.8. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                            | 44        |
| 3. СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН . . . . .  | 49        |
| 3.1. Двумерная случайная величина . . . . .                                   | 49        |
| 3.2. Многомерный случайный вектор . . . . .                                   | 57        |
| 3.3. Примеры решения типовых задач . . . . .                                  | 59        |
| 3.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                            | 60        |
| 4. СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК<br>СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. . . . .              | 62        |
| 4.1. Свойства математических ожиданий . . . . .                               | 62        |
| 4.2. Свойства дисперсий . . . . .   | 63        |
| 4.3. Свойства третьих центральных моментов . . . . .                          | 64        |
| 4.4. Свойства четвертых центральных моментов . . . . .                        | 65        |
| 4.5. Свойства корреляционной матрицы случайного вектора . . . . .             | 66        |
| <b>Раздел II . СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ<br/>ИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ .....</b> | <b>68</b> |
| 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ. ....                           | 68        |
| 5.1. Понятие генеральной совокупности . . . . .                               | 68        |
| 5.2. Выборка из генеральной совокупности . . . . .                            | 69        |
| 5.3. Основные задачи математической статистики . . . . .                      | 71        |

|   |     |
|---|-----|
| 6. ТОЧЕЧНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ<br>ГЕНЕРАЛЬНОЙ СОВОКУПНОСТИ . . . . .                     | 72  |
| 6.1. Общие сведения . . . . .   | 72  |
| 6.2. Методы построения оценок . . . . .   | 74  |
| 6.3. Оценка математического ожидания . . . . .  | 75  |
| 6.4. Оценка дисперсии<br>и среднеквадратического отклонения . . . . .                   | 77  |
| 6.5. Оценка моментов . . . . .  | 81  |
| 6.6. Выборочный коэффициент корреляции . . . . .  | 81  |
| 6.7. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 82  |
| 6.8. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                      | 85  |
| 7. ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ . . . . .  | 85  |
| 7.1. Общие положения . . . . .  | 85  |
| 7.2. Доверительный интервал для математического ожидания . . . . .                      | 87  |
| 7.3. Доверительный интервал для дисперсии. . . . .                                      | 89  |
| 7.4. Доверительный интервал для среднеквадратического отклонения . . . . .              | 90  |
| 7.5. Доверительный интервал для выборочного коэффициента<br>корреляции . . . . .        | 90  |
| 7.6. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 91  |
| 7.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                      | 92  |
| 8. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. . . . .   | 93  |
| 8.1. Общие положения по проверке статистических гипотез. . . . .                        | 93  |
| 8.2. Сравнение двух средних . . . . .   | 97  |
| 8.3. Сравнение выборочной средней с гипотетической<br>генеральной средней . . . . .     | 100 |
| 8.4. Критерий Аббе . . . . .  | 101 |
| 8.5. Сравнение дисперсий . . . . .  | 102 |
| 8.6. Проверка гипотезы о значимости выборочного<br>коэффициента корреляции . . . . .    | 104 |
| 8.7. Проверка гипотезы о нормальном распределении<br>генеральной совокупности . . . . . | 106 |
| 8.8. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 109 |
| 8.9. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                      | 113 |
| 9. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ, РЕГРЕССИОННЫЙ<br>И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗЫ . . . . .                   | 115 |
| 9.1. Общие положения . . . . .  | 115 |
| 9.2. Корреляционный анализ . . . . .  | 115 |
| 9.3. Регрессионный анализ. . . . .  | 118 |
| 9.4. Однофакторный дисперсионный анализ. . . . .  | 121 |
| 9.5. Оценка автокорреляционной функции рядов<br>результатов наблюдений . . . . .        | 125 |
| 9.6. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 128 |
| 9.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .                                      | 130 |

|   |            |
|---|------------|
| <b>Раздел III. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ</b> . . . . .   | <b>132</b> |
| 10. ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ . . . . .  | 132        |
| 10.1. Основные определения . . . . .  | 132        |
| 10.2. Классификация измерений . . . . .   | 135        |
| 11. ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .   | 138        |
| 11.1. Двойственный характер процесса измерений . . . . .  | 138        |
| 11.3. Аддитивная гипотеза строения погрешности<br>результата измерения . . . . .                          | 140        |
| 11.4. Систематические и случайные погрешности . . . . .   | 143        |
| 11.5. Результат измерения и его погрешность<br>как случайная величина . . . . .                           | 146        |
| 11.6. Числовые характеристики точности измерения . . . . .  | 149        |
| 11.7. Закон распределения результатов измерений<br>и их погрешностей . . . . .                            | 150        |
| 11.8. Оценки числовых характеристик точности измерений . . . . .  | 151        |
| 11.9. Основные задачи, решаемые при помощи<br>теории погрешностей результатов измерений . . . . .         | 152        |
| 11.10. Оценка точности результатов измерений<br>по истинным (действительным) погрешностям . . . . .       | 154        |
| 11.11. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 156        |
| 11.12. Задачи для самостоятельного решения . . . . .  | 158        |
| 12. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ФУНКЦИЙ<br>РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .  | 159        |
| 12.1. Основные теоремы . . . . .  | 159        |
| 12.2. Накапливание погрешностей<br>в основных геодезических действиях . . . . .                           | 162        |
| 12.3. Примеры решения типовых задач . . . . .   | 169        |
| 12.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .   | 174        |
| 13. ВЕСА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .  | 177        |
| 13.1. Определение веса результата измерения . . . . .   | 177        |
| 13.2. Оценка относительной точности функций<br>результатов измерений . . . . .                            | 179        |
| 13.3. Расчет весов в основных геодезических действиях . . . . .   | 180        |
| 13.4. Примеры решения типовых задач . . . . .   | 184        |
| 13.5. Задачи для самостоятельного решения . . . . .   | 186        |
| 14. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЯДА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕ-<br>НИЙ ОДНОЙ И ТОЙ ЖЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ . . . . . | 187        |
| 14.1. Уравнивание ряда результатов измерений<br>одной и той же величины . . . . .                         | 187        |
| 14.2. Уравнивание ряда равноточных измерений<br>одной и той же величины . . . . .                         | 193        |

|   |     |
|---|-----|
| 14.3. Апостериорная оценка точности при обработке рядов измерений одной и той же величины . . . . .                                     | 194 |
| 14.4. Порядок математической обработки рядов результатов измерений одной и той же величины . . . . .                                    | 200 |
| 14. 5. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 201 |
| 14. 6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .  | 206 |
| 15. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО НЕВЯЗКАМ УСЛОВНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .  | 208 |
| 15.1. Общие принципы . . . . .  | 208 |
| 15.2. Оценка точности угловых измерений по невязкам в полигонах и ходах . . . . .   | 213 |
| 15.3. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Пересеченная местность . . . . .                                   | 216 |
| 15.4. Оценка точности нивелирования по невязкам в полигонах и ходах. Равнинная местность . . . . .                                      | 217 |
| 15.5. Примеры решения типовых задач . . . . .   | 219 |
| 15.6. Задачи для самостоятельного решения . . . . .   | 222 |
| 16. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПО РАЗНОСТЯМ ДВОЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ . . . . .  | 223 |
| 16.1. Общие положения . . . . .   | 223 |
| 16.2. Исследование коллимационной погрешности прибора . . . . .   | 225 |
| 16.3. Оценка точности угловых измерений по разностям в полуприемах . . . . .  | 226 |
| 16.4. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Непосредственное измерение линий . . . . .           | 228 |
| 16.5. Оценка точности линейных измерений по разностям прямых и обратных измерений. Измерение линий свето- и радиодальномерами . . . . . | 229 |
| 16.6. Оценка точности нивелирования по разностям двойных измерений на станции . . . . .   | 229 |
| 16.7. Оценка точности нивелирования по разностям прямого и обратного превышений . . . . .   | 230 |
| 16.8. Примеры решения типовых задач . . . . .   | 231 |
| 16.9. Задачи для самостоятельного решения . . . . .   | 234 |
| 17. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ . . . . .  | 235 |
| 17.1. Критерий определения слабодействующих и превалирующих источников погрешностей . . . . .   | 235 |
| 17.2. Об искажении СКП систематическими погрешностями . . . . .   | 238 |
| 17.3. Априорная оценка точности . . . . .   | 239 |
| 17.4. Применение методов теории погрешностей при исследовании приборов . . . . .  | 243 |

|  |     |
|--|-----|
| 17.5. Использование дисперсионного анализа<br>при исследовании приборов .....  | 248 |
| <b>Раздел IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ<br/>ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ</b> .....   | 256 |
| 18. ПОНЯТИЕ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....  | 256 |
| 18.1. Общие соображения .....  | 256 |
| 18.2. Математические модели возникновения<br>физической корреляции .....   | 258 |
| 18.3. Случайный вектор и его числовые характеристики .....   | 262 |
| 18.4. Оценка точности функций зависимых<br>результатов измерений .....   | 265 |
| 18.5. Обработка ряда зависимых результатов<br>измерений одной величины .....   | 268 |
| 18.6. Примеры решения типовых задач .....  | 269 |
| 18.7. Задачи для самостоятельного решения .....  | 274 |
| 19. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ<br>ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ К ОБРАБОТКЕ<br>РЕЗУЛЬТАТОВ GPS-ИЗМЕРЕНИЙ .....                     | 276 |
| 19.1. Общие положения .....  | 276 |
| 19.2. Использование коэффициента корреляции<br>для оценки качества работы GPS-приемников<br>в дифференциальном режиме по разным созвездиям ..... | 278 |
| 19.3. Использование коэффициента корреляции для определения<br>совместимости различных типов GPS-приемников .....                                | 281 |
| 19.4. Использование коэффициента корреляции<br>для выявления эффекта многолучевости .....  | 283 |
| 20. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ<br>ПОГРЕШНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ .....   | 287 |
| 20.1. Передача дирекционного угла .....  | 287 |
| 20.2. Получение корреляционной матрицы координат точек<br>теодолитного хода .....  | 294 |
| 20.3. Учет зависимости между координатами точек теодолитного<br>хода при вычислении площади полигона .....                                       | 299 |
| 20.4. Задачи для самостоятельного решения .....  | 301 |
| <b>Раздел V. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ УРАВНИВАНИЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ<br/>СЕТЕЙ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ</b> .....   | 302 |
| 21. ПРИНЦИПЫ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.<br>УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ<br>ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ .....                                    | 302 |
| 21.1. Задачи и принципы уравнивания геодезических построений .....   | 302 |
| 21.2. Основные определения и обозначения .....   | 309 |

|  |            |
|--|------------|
| 21.3. Вывод нормальных уравнений . . . . .   | 314        |
| 21.4. Уравнивание геодезических построений в случае<br>нелинейных параметрических уравнений связи . . . . .                                | 316        |
| 21.5. Порядок уравнивания геодезических построений<br>параметрическим методом . . . . .  | 318        |
| 21.6. Порядок составления нормальных уравнений<br>с контролем по суммам . . . . .  | 319        |
| 21.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .  | 322        |
| <b>22. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ . . . . .</b>  | <b>324</b> |
| 22.1. Общие соображения . . . . .  | 324        |
| 22.2. Точные методы . . . . .  | 324        |
| 22.3. Итерационные методы решения систем нормальных уравнений<br>(метод последовательных приближений) . . . . .                            | 336        |
| 22.4. Задачи для самостоятельного решения . . . . .  | 339        |
| <b>23. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ<br/>В ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ МЕТОДЕ УРАВНИВАНИЯ . . . . .</b>  | <b>341</b> |
| 23.1. Общие соображения . . . . .  | 341        |
| 23.2. Вычисление величины $\mu^2$ . . . . .  | 341        |
| 23.3. Нахождение обратных весов уравненных<br>значений неизвестных . . . . .   | 342        |
| 23.4. Вычисление обратной матрицы нормальных уравнений<br>в схеме Гаусса . . . . .   | 345        |
| 23.5. Вычисление обратных весов и СКП функций<br>уравненных значений неизвестных . . . . .   | 347        |
| 23.6. Примеры решения типовых задач . . . . .  | 348        |
| 23.7. Задачи для самостоятельного решения . . . . .  | 355        |
| <b>24. УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ<br/>КОРРЕЛАТНЫМ МЕТОДОМ (МЕТОД УСЛОВНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ). . . . .</b>                                     | <b>356</b> |
| 24.1. Основные определения и обозначения . . . . .   | 356        |
| 24.2. Вывод нормальных уравнений коррелат . . . . .  | 358        |
| 24.3. Вычисление поправок и уравненных значений результатов<br>измерений. Контроль уравнивания . . . . .                                   | 360        |
| 24.4. Уравнивание коррелатным методом<br>при нелинейных условных уравнениях . . . . .  | 362        |
| <b>25. АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ<br/>В КОРРЕЛАТНОМ МЕТОДЕ . . . . .</b>  | <b>364</b> |
| 25.1. Вычисление СКП единичного веса . . . . .   | 364        |
| 25.2. Вычисление весов функций<br>уравненных значений неизвестных . . . . .  | 365        |
| 25.3. Вычисление обратных весов функций уравненных<br>значений неизвестных в схеме Гаусса решения систем<br>нормальных уравнений . . . . . | 368        |

|  |            |
|--|------------|
| 25.4. Примеры решения типовых задач .....  | 369        |
| 25. 5. Задачи для самостоятельного решения .....   | 377        |
| <b>Раздел VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ<br/>ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ<br/>ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ .....</b>        | <b>380</b> |
| 26. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....                                       | 380        |
| 26.1. Общие положения .....  | 380        |
| 26.2. Общее решение задач по определению параметров<br>полуэмпирических формул .....                             | 381        |
| 27. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ<br>ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ .....                             | 385        |
| 27.1. Определение параметров полуэмпирической формулы<br>линейного вида .....                                    | 385        |
| 27.2. Определение параметров полуэмпирической формулы<br>нелинейного вида .....                                  | 391        |
| 27.3. Задачи для самостоятельного решения .....  | 399        |
| 28. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ<br>ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ<br>ПРИ НАЛИЧИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА ..... | 400        |
| 28.1. Построение эмпирической формулы<br>методом подбора .....   | 400        |
| 28.2. Построение эмпирической формулы методом<br>параболического интерполирования .....                          | 404        |
| Заключение .....   | 411        |
| Библиографический список .....   | 412        |
| ПРИЛОЖЕНИЯ .....   | 413        |

*Учебное издание*

**Беликов Александр Борисович,  
Симомян Владимир Викторович**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ  
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ**

Редактор *В.В. Космин*  
Компьютерная верстка и правка *И.Д. Бочаровой*  
Дизайн обложки *Д.Л. Разумного*

Подписано в печать 04.01.2016 г. И-269. Формат 60×84/16.  
Уч.-изд. л. 23,5. Усл.-печ. л. 25,11. Тираж 300 экз. Заказ 389

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Национальный исследовательский  
Московский государственный строительный университет»  
(НИУ МГСУ).

129337, г. Москва, Ярославское ш., д. 26.

Издательство МИСИ – МГСУ.

Тел. (495) 287-49-14, вн. 13-71, (499) 188-29-75, (499) 183-97-95.

E-mail: ric@mgsu.ru, rio@mgsu.ru.

Отпечатано в типографии Издательства МИСИ – МГСУ.

Тел. (499) 183-91-90, (499) 183-67-92, (499) 183-91-44