ISSN 1997-0935

научно-технический журнал

ВЕСТНИК МГСУ

1/2007

материалы оборудование технологии

ДЕКАНАТ
ФАКУЛЬТЕТА ОБЩЕНАУЧНЫХ КАФЕДР

Декан ФОК - профессор, кандидат физико-математических наук Лукашов Александр Васильевич.

В 1967 году с отличием окончил физико-математический факультет Университета в г. Душанбе.
После окончания аспирантуры с 1973 года работает в МГСУ на кафедре физики, с 1995 года в должности профессора. В 1985-88 годах преподавал в Национальном институте нефти, газа и химии (Алжир).
Автор более 100 научных трудов. Более 20 лет является руководителем с российской стороны совместной с Техническим университетом Берлина темы :
«Физико-механические свойства полимерных материалов».
Длительное время работал в должности заместителя деканов факультетов ТЭС, ОТФ и ПГС, ответственным секретарем приемной комиссии ВУЗа.
С 2004 года – декан факультета общенаучных кафедр, директор Учебного центра Управления дополнительного профессионального образования МГСУ, председатель учебно-методической комиссии по естественно-научным дисциплинам АСВ и УМО вузов РФ по образованию в области строительства.
Почетный работник Высшего профессионального образования, Почетный строитель России.

Заместители декана :
Сафонова Наталья Сергеевна, ст. преподаватель кафедры физики - по дневному отделению.
Купавцев Владимир Владимирович, профессор кафедры теоретической механики – по заочному отделению.
Ляпин Антон Валерьевич, научный сотрудник – по региональному развитию.
Труханов Степан Викентьевич, доцент кафедры физики – по научной работе.
Борисов Владимир Викторович, ст. преподаватель кафедры физического воспитания и спорта - по физическому воспитанию и спорту.

Совет факультета общенаучных кафедр :
Председатель – проф. А.В.Лукашов
Секретарь – ст.преп. О.М. Ворожейкина
Члены Совета : проф. М.В. Самохин, проф. О.О. Егорычев, проф. В.Н.Сидоров, проф. Г.С.Варданян, проф. В.И.Сидоров, проф.Н.И.Прокофьева, проф. Т.М.Кондратьева, проф.В.В.Купавцев, проф. В.И.Ширинский, проф. М.А.Беляева, проф. Ю.В.Осипов, проф. В.А.Григорьев, проф. Т.П.Никифорова, доц. А.Г.Паушкин, ст. преп. Н.С. Сафонова, доц. А.Ю. Борисова

ФАКУЛЬТЕТУ ОБЩЕНАУЧНЫХ КАФЕДР – 15 ЛЕТ

Факультет общенаучных кафедр (ФОК) был образован в октябре 1991 года, т.е. в этом году мы отмечаем свой 15-летний юбилей. Несмотря на такой небольшой срок, факультет успел заявить о себе, как о жизнеспособной и развивающейся структуре ВУЗа.

У истоков образования и становления факультета стоял доктор технических наук, профессор Егорычев Олег Александрович, который в течение 13 лет был его первым деканом. Высокий профессионализм, организаторский талант и большой педагогический опыт работы снискали ему заслуженное уважение сотрудников и студентов факультета.

Егорычев О.А.

Большой вклад в развитие факультета сделали заведующие кафедрами ФОК, профессора Самохин М.В., Варданян Г.С., Сидоров В.И., Сидоров В.Н., Прокофьева Н.И., Кондратьева Т.М.

Этот год является юбилейным не только для университета и факультета. 85-летие отмечают старейшие кафедры ВУЗа – высшей математики (зав. кафедрой, проректор МГСУ, проф. Самохин М.В.), теоретической механики (зав. кафедрой, проректор МГСУ, проф. Егорычев О.О.) и физики (зав. кафедрой, проф. Прокофьева Н.И.). Кафедра начертательной геометрии (зав. кафедрой, проф. Кондратьева Т.Н.) празднует свой 75-летний юбилей, кафедра сопротивления материалов (зав. кафедрой, почетный проф. МГСУ Варданян Г.С.) – 55 – летний юбилей, а кафедре информатики и прикладной математики (зав. кафедрой, проф. Сидоров В.Н) в этом году исполняется 40 лет.

В состав факультета входят 7 кафедр и учебно-вычислительная лаборатория. Кроме того, на кафедрах действуют 6 учебных лабораторий, а также центр дистанционного обучения. Общая численность преподавателей факультета в настоящее время составляет 233 человека, из них профессоров - 52, доцентов - 125, старших преподавателей - 48, ассистентов - 8. Вспомогательный персонал (инженеры, лаборанты) - 61 человек.

Преподаватели факультета ведут учебные занятия во всех корпусах университета и на всех специализированных факультетах МГСУ. Занятия ведутся по очной, очно - заочной (вечерней) и заочной формам обучения на 1, 2 и 3 курсах, т.е. преподаватели ФОК в общей сложности обучают более 6200 студентов.

С 2001 года на факультете ведётся подготовка бакалавров по уникальному для строительных ВУЗов направлению «Прикладная механика». В 2005 году произведён первый выпуск дипломированных специалистов по этому направлению с присвоением выпускникам звания бакалавра техники и технологии. Многие из выпускников показали хорошие знания и нацеленность на дальнейшую учёбу и научную работу. Все студенты, успешно закончившие бакалавриат, продолжают обучение в магистратуре. Многое для развития этой специальности делает кафедра сопротивления материалов и лично её заведующий проф. Варданян Г.С.

Уже в этом году мы прошли аккредитацию и приступили к обучение по магистерской программе 553302 «Механика деформируемого твердого тела». К обучению магистрантов, наряду со специалистами нашего Вуза, привлекаются ведущие учёные из Института проблем механики и Института машиноведения РАН. Один день в неделю магистранты обучаются непосредственно в лабораториях этих Институтов, используя современную научную базу.

Кроме этого на факультете проводится профессиональная подготовка инженеров-математиков по специальности «Прикладная математика».

За последние 2 года на факультете значительно увеличен прием студентов на заочную форму обучения. Так в прошлом году на ФОК принято более 400 студентов-заочников. Развивается сеть представительств и консультационных пунктов МГСУ как в Подмосковье, так и в более отдаленных регионах для помощи проживающим там студентам заочной формы обучения.

Планируя дальнейшее увеличение приема заочников, будем параллельно развивать методическую базу, материально-техническое обеспечение, организационную сторону вопроса. Большое значение здесь имеет координация действий по обучению заочников в ВУЗе в целом. Имеющаяся на факультете база для обучения заочников и опыт, концентрация усилий и чёткая организация даст возможность развивать современные формы обучения, в том числе дистанционные.

Профессорско-преподавательский и учебно-вспомогательный состав факультета является его золотым фондом. Невозможно перечислить всех сотрудников факультета, которые в течение многих лет передавали и продолжают передавать студентам базовые знания, необходимые им для успешного овладения строительными специальностями.

Наряду с основной преподавательской деятельностью со студентами, сотрудники факультета активно участвуют во многих программах, реализуемых в Вузе, от работы на подготовительных курсах и проведении вступительных экзаменов, до чтения лекций на курсах повышения квалификации профессиональных специалистов.

Факультет и его учебно-методическая комиссия (председатель – проф. Беляева М.А.), совместно с комиссиями кафедр ведёт постоянную методическую работу, направленную на улучшение качества преподавания учебных дисциплин. Кафедрами факультета издаются учебники, учебные пособия, регулярно перерабатываются и обновляются расчетно-графические работы и методические указания.

На факультете разработана концепция развития информатизации, процесс которой идет по пути создания локальных сетей и установки программного обеспечения на каждой кафедре. На кафедрах физики, начертательной геометрии, сопротивления материалов, прикладной математики и информатики функционирует 11 компьютерных классов, объединенных в единую сеть, разработаны программы для выполнения учебных заданий различного типа.

Большое внимание на факультете уделяется научно-исследовательской работе студентов. На базе ряда кафедр проводятся студенческие олимпиады для строительных специальностей ВУЗов России (физика, химия, сопротивление материалов и др.). Студенты факультета занимаются в научных кружках по линии СНО, участвуют в городских, региональных и федеральных олимпиадах по различным дисциплинам, выступают на научно-технических конференциях.

Совет ФОК

Факультет обладает высоким научным потенциалом, на его кафедрах работают 22 доктора и 127 кандидатов наук. Успешно действуют несколько научно-педагогических школ, в том числе «Численное моделирование и методы прикладной математики в задачах строительства» (руководители: профессора Золотов А.Б., Сидоров В.Н., Варапаев В.Н., Белостоцкий А.М., Осмоловский Н.П.), «Теория расчета сооружений и элементов конструкций» (проф. Филиппов И.Г.), «Теоретические и экспериментальные исследования прочности, жесткости и надежности строительных конструкций» (проф. Варданян Г.С.), «Реакционная способность кремнийорганических соединений по отношению к составляющим строительных материалов» (проф. Сидоров В.И.) и др..

За последние пять лет преподавателями факультета защищено 2 докторские (Егорычев О.О. и Акимов П.А.) и 5 кандидатских диссертаций. В настоящее время на кафедрах ФОК обучаются 17 аспирантов и 1 докторант.

Ведется активная научно-исследовательская работа, развиваются международные научные связи. Ведущие профессора факультета приглашаются для чтения лекций в университеты Европы и Америки (Андреев В.И., Сидоров В.Н., Филиппов И.Г., Золотов А.Б. и др.), ведут совместные экспериментальные и теоретические исследования (Самохин М.В., Сидоров В.И., Егорычев О.О., Лукашов А.В., Белостоцкий А.М. и др.). Преподаватели факультета регулярно выступают на отечественных и международных конференциях, многие из них являются членами специализированных советов МГСУ и других научных организаций.

Заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, директор Института фундаментального образования проф. Сидоров В.Н. является главным редактором журнала «International Journal for Computational Civil and Structural Engineering».

На факультете регулярно и плодотворно работает Совет, на котором решаются не только текущие дела, но и вырабатывается общая стратегия его дальнейшего развития.

На ФОК успешно действует Учебный центр дополнительного профессионального образованию (директор - проф. Лукашов А.В.). На курсах повышения квалификации руководителей и специалистов организаций строительного комплекса РФ реализуются различные учебные программы, в том числе уникальные для нашей страны, такие как «Строительство высотных зданий» и «Проектирование высотных зданий». Только за последний год обучение по программам Центра прошло более 2000 специалистов. Эта деятельность, проводящаяся в рамках УДПО МГСУ, не только получила высокую оценку на различных уровнях строительного комплекса Москвы, но и принесла заметную прибавку в бюджет Вуза и вывела факультет в лидеры по этому показателю.

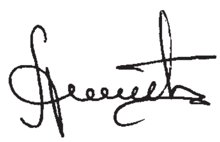
С октября 2005 года ФОК входит в состав Института фундаментального образования МГСУ (ИФО). С образованием этой структуры мы связываем своё будущее. Развивая инновационную составляющую, факультет будет и впредь активно участвовать в обеспечении подготовки нового поколения специалистов, способных сочетать высокий профессионализм и новый взгляд на развитие строительного комплекса страны. Понятно, что достичь этого можно только в результате совместной, координированной работой всего факультета. Мы представляем собой единый коллектив, ставящий перед собой реальные цели и, несмотря на встречающиеся трудности, настойчиво реализовываем свои программы.

Отмечая свой юбилей, факультет уверенно смотрит в будущее, понимая свою роль в деле дальнейшего повышения престижа МГСУ в области высшего профессионального образования.

В апреле 2006 года в МГСУ прошла 5-ая юбилейная научно-практическая и учебно-методическая конференция факультета общенаучных кафедр «Фундаментальная наука в современном строительстве». Результатом этой конференции и посвящены материалы, публикуемые в этом номере журнала.

Поздравляю всех преподавателей, сотрудников, аспирантов и студентов факультета общенаучных кафедр с 15-летним юбилеем ФОК и желаю всем крепкого здоровья, счастья и больших творческих успехов!

Декан факультета
Лукашов А.В.



КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики возникла сразу же при создании МИСИ и имеет давние научные и педагогические традиции.

В 1954-1958 гг. кафедрой заведовал проф. А. Ф. Бермант – известный ученый и педагог. Его учебник по математическому анализу выдержал в разных вариантах свыше 15 изданий и до сих пор является одним из лучших учебников по курсу высшей математики.

Под руководством М. И. Сканави, заведовавшим кафедрой в 1958 – 1964 гг., коллективом преподавателей был составлен задачник для абитуриентов, получивший широкую известность и также многократно переиздававшийся.

Крупным ученым являлся проф. С. Я. Хавинсон, руководивший кафедрой с 1964 по 1996гг.

С 1996 г. кафедру возглавляет проф., д. ф. - м. н. М. В. Самохин, прошедший на кафедре все ступени академической лестницы: от ассистента до профессора, заведующего кафедрой. Здесь же на кафедре он окончил аспирантуру и докторантуру. С 2004 г. М. В. Самохин является проректором университета по учебной работе.

В настоящее время на кафедре работают четверо профессоров – докторов наук, шесть профессоров – кандидатов наук, тридцать доцентов, восемнадцать старших преподавателей и четыре ассистента. При кафедре имеется аспирантура по математике, действуют научный и методический семинары.

Наряду с представителями теоретической математики на кафедре есть специалисты по ее разнообразным инженерным приложениям.

На кафедре высшей математики начинал свою педагогическую деятельность профессор Г. С. Варданян – ныне заведующий кафедрой сопротивления материалов МГСУ. Профессор кафедры Егорычев О. А. длительное время был деканом факультета общенаучных кафедр.

Ученые кафедры активно работают в различных областях математики и ее приложений, разрабатывают и издают учебники учебные пособия, регулярно публикуются сборники научных трудов кафедры.

Научная работа, проводимая коллективом ученых кафедры по ряду приоритетных для кафедры направлений (функциональный анализ, теория функций комплексного переменного, теория потенциала, различные задачи аппроксимации, равномерные алгебры и ряд других), поддерживается грантами Российского фонда фундаментальных исследований, Министерства образования Российской Федерации, Международного научного фонда.

Особо следует отметить большую педагогическую и научную деятельность крупного ученого Почетного профессора МГСУ д. ф. – м. н. С. Я. Хавинсона, выдающегося педагога и ученого с мировым именем.

Сидят слева направо: Проф. Петелина В.Д., доц. Вейл И.Г., ст. пр. Петрова Л.С., доц Григорьева А.Д., ст. преп. Мацеевич М.А., проф. Беляева М.А.
Стоят: доцент Попов В.А.., лаб. Федосеева А., ст. преп. Медведева Н.А., доц. Ситникова Е.Г., лаб. Лызо П., доц. Бабылева Т.Н., ст. преп. Гулимова Г.А., проф. Арефьев В.И., зав. каф., проф. Самохин М.В., проф. Ширинский В.И., доц. Лучников Л.А., доц. Чередниченко Р.А., доц. Яковлев В.И. проф. Осиленкер Б.П.
В последнем ряду стоят: доц. Лемин А.Ю., доц. Иванов В.П., ст преп. Серова А.И.

Хавинсон Семен Яковлевич (1927 – 2003)

Работал в МИСИ – МГСУ с 1965 г., прошел путь от ассистента до профессора. В 1965 – 1996 гг. заведовал кафедрой высшей математики. Автор свыше 175 научных и методических работ. Его научные исследования по теории функций и теории аппроксимации пользуются мировой известностью, неоднократно переводилось на иностранные языки.

Написанные С. Я. Хавинсоном оригинальные учебники интегрального и дифференциального исчислений, а также методические работы, посвященные взаимосвязям преподавания курса математики и других дисциплин, внесли существенный вклад в дело подготовки инженеров – строителей в вузах страны. За достижения в науке и педагогике С. Я. Хавинсон был удостоен высоко звания “Почетный профессор МГСУ”.

Решением Совета факультета общенаучных кафедр с 2006 года именная стипендия студентов ФОК носит имя Хавинсона С.Я.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НОРМЫ СИММЕТРИЧНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА - СОБОЛЕВА

Осиленкер Б.П.

Рассмотрим дискретное пространство Соболева с нестандартным скалярным произведением:

$$< f,g >= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + M[f(1)g(1)+f(-1)g(-1)] + N[f'(1)g'(1)+f'(-1)g'(-1)](M>0, N>0).(1)$$

Обозначим через $B_n(x)=B_n(x;M,N)(n\in Z_+)$ симметричные полиномы Лежандра - Соболева, ортогональные по отношению к скалярному произведению (1) и нормированные условием $B_n(x;0,0)=P_n(x)$, где $P_n(x)(n\in Z_+)$ - классические полиномы Лежандра с $P_n(1)=1(n\in Z_+)$.

Эти полиномы являются частными случаями полиномов Гегенбауэра – Соболева (ультрасферических полиномов Соболева), введенных в [1], [2].

В последние годы они привлекают внимание в связи с рядом задач теории функций, функционального анализа, математической физики и вычислительной математики (детали см.в [3] - [11] и литературу в них).

Важную роль дискретные полиномы Соболева играют в приложениях при исследовании нагруженных систем.

Несмотря на тесную связь с полиномами Лежандра (в которые они переходят в случае $M=N=0$), полиномы Лежандра - Соболева обладают рядом существенно отличных свойств. Приведем некоторые из них.

1. Полиномы $B_n(x)$ являются собственными функциями линейного дифференциального оператора десятого порядка в случае $M>0, N>0$, четвертого порядка-при $M>0, N=0$, и восьмого порядка, когда $M=0, N>0$ [12] (напомним, что классические полиномы Лежандра являются собственными функциями линейного дифференциального оператора второго порядка [13],[14].
2. Нули $B_n(x)$ - вещественные и простые, при достаточно больших N полиномы $B_n(x)$ имеют два вещественных и симметричных нуля вне $(-1,1)$ (остальные (n-2) нуля лежат в (-1,1)), в то время как все нули полинома $P_n(x)$ - вещественные, простые и лежат в $(-1,1)$ (13],[14]).
3. В случае $N>0$ для полиномов $B_n(x)$ не выполняется трехчленное рекуррентное соотношение (как для полиномов Лежандра ([13],[14]), а наименьший порядок рекуррентного соотношения для них равен семи [15].

Следующее представление, устанавливающее связь между классическими полиномами Лежандра и полиномами Лежандра -Соболева установлено в [1].

Лемма. Для симметричных ортогональных полиномов Лежандра-Соболева имеет место формула

$$B_n(x)=a_n(1-x^2)^2P_n^{(4)}(x)+$$
$$+b_n(1-x^2)P_n''(x)+c_nP_n(x), n=0,1,...; B_0(x)=1, B_1(x)=x, (2)$$

где

$$a_n=\frac{MN}{48}(n-1)_4+\frac{N}{24}n(n+1)(n=2,3,...; a_0=0, a_1=\frac{N}{12}), (3)$$

$$b_n=-\frac{N}{12}(n-2)n(n+1)(n+3)-M\left(n\in Z_+\right), (4)$$

$$c_n=1-\frac{N}{24}(n-2)_6(n=3,4,...; c_0=c_1=c_2=1), (5)$$

и $(a)_k$ здесь сдвинутый факториал, определяемый по формуле

$$(a)_k := a(a+1)...(a+k-1)(a\in N, k=1,2,...), (a)_0 := 1.$$

В частности,

$$B_0(x) = 1, B_1(x) = x, B_2(x) = \frac{3}{2}(2M+1)x^2 - \frac{1}{2}(6M+1)x, B_3(x) =$$
$$= \frac{5}{2}(6M+6N+1)x^3 - \frac{3}{2}(10M+30N+1).(6)$$

Пусть $\widehat{B}_n(x;M,N) = \widehat{B}_n(x)(n \in Z_+, x \in [-1,1])$ - ортонормированные полиномы Лежандра – Соболева

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\widehat{B}_n(x)\widehat{B}_m(x)dx + M[\widehat{B}_n(1)\widehat{B}_m(1) + \widehat{B}_n(-1)\widehat{B}_m(-1)] + N[\widehat{B}'_n(1)\widehat{B}'_m(1) + \widehat{B}'_n(-1)\widehat{B}'_m(-1)] = \delta_{n,m}(n,m \in Z_+).$$

Тогда

$$\widehat{B}_n(x) = \overset{(n)}{\lambda_n} B_n(x)(n \in Z_+), (\overset{(n)}{\lambda_n})^{-2} = \left\langle B_n(x;M,N), B_n(x;M,N) \right\rangle (n \in Z_+).(7)$$

Теорема. [16](M=0),[17](N=0). Для нормы симметричных ортогональных полиномов Лежандра – Соболева справедливо следующее представление

$$< B_n(x;M,N), B_n(x;M,N) >= \frac{1}{2n+1}\Omega_n(M,N)\Omega_{n+2}(M,N)(n \in Z_+),(8)$$

где

$$\Omega_n(M,N) = \frac{MN}{48}(n-1)n(n-3)_6 + \frac{N}{12}(n-2)_4(n^2-n-3) + M(n-1)n + 1(n \in Z_+).(9)$$

Доказательство. Начнем со случая n=4,5,....
В силу (7) и [18],[7] (если
Имеем

$$(\lambda_n^{(n)})^{-2} =< B_n(x), B_n(x) >= 2Mc_n^2 + 2N[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{M}{4}(n-1)_4]^2 + \frac{1}{2n+1}[(n-3)_4(n+1)_4 a_n^2 + (n-1)_3(n+2)b_n^2$$
$$2(n-3)_6 a_n b_n - 2(n-1)n b_n c_n + 2(n-3)_4 a_n c_n].$$

Применяя соотношения (3) - (5), получаем

$$< B_n(x;M,N), B_n(x;M,N) >= \frac{1}{2n+1}\{[\frac{M^2}{2304}(n-3)_8(n-1)_4^2 + \frac{M}{288}[(n-2)_6(n-1)_4(n^4+2n^3-7n^2-8n-6)+$$
$$\frac{1}{144}(n-2)_6 n(n+1)(n^4+2n^3-7n^2-8n+3)]N^2 + [\frac{M^2}{24}(n-1)_4^2(n^2+n+9) + \frac{M}{24}(n-1)_4(5n^4+10n^3+31n^2+2$$
$$\frac{1}{6}n(n+1)(n^4+2n^3+11n^2+10n-6)]N + M^2(n-1)_4 + 2M(n^2+n+1)+1\}(n=4,5,...).$$

Положим по определению

$$\nu_n(M) = \frac{1}{48}(n-3)_6(n-1)n[M + \frac{4(n^2-n-3)}{(n-3)(n-1)n(n+2)}](n=4,5,...).$$

Тогда

$$\nu_n(M)\nu_{n+2}(M) = \frac{M^2}{48^2}(n-3)_8(n-1)_4^2 + \frac{M}{288}(n-1)_6(n-1)_4(n^4+2n^3-7n^2-8n-6)+$$
$$\frac{1}{144}(n-2)_6 n(n+1)(n^4+2n^3-7n^2-8n+3)(n=4,5,...).$$

И

$$(\lambda_n^{(n)})^{-2} = \frac{1}{2n+1}\{\nu_n(M)\nu_{n+2}(M)N^2 + [\frac{M^2}{24}(n-1)_4^2(n^2+n+9)+$$
$$\frac{M}{24}(n-1)_4(5n^4+10n^3+31n^2+26n+24) + \frac{1}{6}n(n+1)(n^4+2n^3+11n^2+10n-6)]N+$$
$$(n-1)_4[M + \frac{1}{n(n-1)}][M + \frac{1}{(n+1)(n+2)}]\}(n=4,5,...).$$

Нетрудно видеть, что выражение в квадратных скобках имеет следующие корни

$$N_1(n) = -\frac{M(n-1)n+1}{\nu_n(M)}, N_2(n) = N_1(n+2) = -\frac{M(n+1)(n+2)+1}{\nu_{n+2}(M)}.$$

Следовательно,

$$< B_n(x;M,N), B_n(x;M,N) >= \frac{1}{2n+1}\nu_n(M)\nu_{n+2}(M)[N+\frac{M(n-1)n+1}{\nu_n(M)}][N+\frac{M(n+1)(n+2)+1}{\nu_{n+2}(M)}]$$

и соотношения (8) - (9) вытекают из определению чисел
Теорема доказана в случае n=4, 5, 6,...
Покажем, что формула (8)-(9) справедлива также и при n=0,1,2,3.
Действительно, из (9) при этих значениях n имеем

$$\Omega_0(M,N)=1; \Omega_1(M,N)=1; \Omega_2(M,N)=2M+1; \Omega_3(M,N)=6(M+N)+1;$$
$$\Omega_4(M,N)=180MN+12M+90N+1; \Omega_5(M,N)=2100MN+20M+510N+1.(10)$$

С другой стороны, из соотношений (1),(6) и (10) вытекает

$$< B_0(x), B_0(x) >= 2M+1 = \frac{1}{1}\Omega_0(M,N)\Omega_2(M,N);$$

$$< B_1(x), B_1(x) >= 2M+2N+\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\Omega_1(M,N)\Omega_3(M,N);$$

$$< B_2(x), B_2(x) >= 72M^2N+72MN+18N+\frac{24}{5}M^2+\frac{14}{5}M+\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\Omega_2(M,N)\Omega_4(M,N);$$

$$< B_3(x), B_3(x) >= 1800MN^2+1800M^2N+\frac{5280}{7}MN+\frac{3060}{7}N^2+\frac{120}{7}M^2+\frac{516}{7}N+\frac{26}{7}M+\frac{1}{7} =$$

$$\frac{1}{7}\Omega_3(M,N)\Omega_5(M,N),$$

что доказывает формулу (8)-(9) для n=0,1,2,3.
Теорема полностью доказана.
Следствие 1. [18], [7]($(\alpha = 0)$)

$$\left|\widehat{B}_n(x)\right| \le C(1-x^2)^{-\frac{1}{4}}(-1<x<1, n\in Z_+)$$

2) $\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|\widehat{B}_n(x)\right| \le C\sqrt{n+1}$

3) $\widehat{B}_n(\pm 1) \approx n^{-\frac{3}{2}}$

4) $\widehat{B}_n'(\pm 1) \approx n^{-\frac{7}{2}}$

Замечание. Отметим существенное отличие поведения ортонормированных
Лежандра – Соболева и их производных в концах промежутка ортогональности: для ортонормированных классических полиномов Лежандра справедливы асимптотики:

$$P_n(\pm 1) \approx n^{\frac{1}{2}}, P_n'(\pm 1) \approx n^{\frac{5}{2}}.$$

Это приводит к тому, что частные суммы ряда Фурье – Лежандра – Соболева лучше аппроксимируют функцию и ее производную, чем суммы Фурье - Лежандра.

Введем определитель Турана

$$G_n(x) = \frac{1}{16}\sum_{k=n+1}^{n+4}\{[B_k(x)]^2 - B_{k-4}(x)B_{k+4}(x)\} - \frac{1}{4}\sum_{k=n+1}^{n+2}[B_k(x)B_{k+2}(x) - B_{k-2}(x)B_{k+4}(x)].$$

Следствие 2. Для симметричных ортогональных полиномов Лежандра – Соболева равномерно на всех компактных подмножествах из (-1,1) справедлива следующая асимптотика определителя Турана

$$\lim_{n\to\infty} G_n(x) = \frac{32}{\pi}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} x^2 (1-2x^2).$$

Работа поддерживается РФФИ (проект 05-01-00192)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. H. Bavinck, H.G. Meijer. Orthogonal polynomials with respect to a symmetric inner product, Appl. Anal. 33 (1989), 103-117.
2. H. Bavinck, H.G. Meijer. On orthogonal polynomials with respect to an inner product involving derivatives: zeros and recurrence relations, Indag. Math., N.S., 1(1990), 7 – 14.
3. Ф. Аткинсон. Дискретные и непрерывные граничные задачи. Пер.с англ. -М.: Мир, 1968.
4. Р. Курант, Д.Гильберт. Методы математической физики, Т. 1. Пер. с нем. - М.: Гостехиздат. 1951.
5. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. 2004
6. Е.Г. Дьяконов. Энергетические пространства и их применения. - М.:МГУ, 2001
7. A. Foulquie Moreno, F. Marcellan, B.P. Osilenker. Estimates for polynomials orthogonal with respect to some Gegenbauer-Sobolev type inner product, J. Ineq. Appl. 3(1999), 401 – 419.
8. А.А. Гончар. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных ункций, Матем. сб., 97(139), (1975), 607 – 629.
9. A. Iserles, P.E. Koch, S.P. Norsett, J.M. Sanz-Serna. Orthogonality and approximation in a Sobolev space, Algoritms for Approximations (J.C. Masson and M.G. Cox, Ets), Chapman and Hall, 1990, 117 – 124.
10. A.M. Krall. Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials, Operator Theory: Advances and Applications, V.133, Birkhauser, Basel, 2002.
11. Г. Лопес. Сходимость аппроксимаций Паде мероморфных функций стилтьесовского типа и сравнительная асимптотика для ортогональных полиномов, Матем. сб., 64(1989), 204-227.
12. H. Bavinck. Differential operators, having Sobolev-type Gegenbauer polynomials as eigenfunctions, J. Comp. Appl. Math., 118 (2003), 23 – 42.
13. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. - М.: ГИФМЛ, 1962.
14. П.К. Суетин. Классические ортогональные многочлены. - М.: Физматлит, 2004.
15. W.D. Evans, Lance L. Littlewood, F.Marcellan, C.Markett, A.Ronveaux. recurrence relations for Sobolev orthogonal polynomials, SIAM J. Math. Anal. 26(1995), 446 – 467.
16. Б.П. Осиленкер. Симметричные полиномы Лежандра-Соболева в пространствах Понтрягина-Соболева, Матем. физика, Анализ, Геометрия, 9(2002), 385-393.
17. Б.П. Осиленкер. Симметричные ортогональные полиномы в пространствах с индефинитной метрикой, в сб.: Вопросы математики и механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве, Сб. научных трудов, вып. 10, МГСУ, 2003, 39 – 45.
18. Ф. Марчелан, Б.П. Осиленкер. Оценки для полиномов, ортогональных по отношению к некоторому скалярному произведению Лежандра – Соболева, Матем. заметки, 62(1997), 871 – 880.
19. G. Szego. On an inequality of P. Turan concerning Legendre polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 401 – 405.
20. A. Mate, P. Nevai, V. Totik. Asymptotics for orthogonal polynomials defined by a recurrence relation, Constr. Approxim., 1(1985), 231 – 248.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Ситникова Е.Г.

На плоскости Oxy рассмотрим правильный восьмиугольник Ω со стороной a, ограниченный прямыми

$$l_1: y=0, l_2: y=x-a(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), l_3: x=a(1+\sqrt{2}), l_4: y=-x+a(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+atg\frac{135°}{2},$$

$$l_5: y=atg\frac{135°}{2}, l_6: y=x+a(1+\frac{\sqrt{2}}{2}), l_7: x=0, l_8: y=-x+a\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть П- область в пространстве R^3≡Otxy, П=Ω×Ot, ∂П- её граница и $\overline{П}$=П∪∂П. Будем также обозначать $t=x_1, x=x_2, y=x_3$ и $X(x_1,x_2,x_3)$ – точка в пространстве R^3. В области П рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}[a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_j}]=0 \qquad /1/$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами $a_{ij}, a_{ij}(X)=a_{ji}(X), i,j=1,2,3,$

и постоянной эллиптичности $\alpha = \sup\limits_{X\in\overline{П},|\xi|=1}\frac{\sum_{i=1}^{3}a_{ii}(X)}{\sum_{i,k=1}^{3}a_{ik}(X)\xi_i\xi_k}$ (в R^3 α≥3).

u(X)- слабое решение уравнения /1/: $u\in H_1^{loc}(П)$,

$$\int_П \sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(X)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dX \equiv 0 \qquad /2/$$

при любой функции $\varphi(X)\in C_0^\infty$, носитель которой компактно принадлежит П.

Пусть G- ограниченная область в R^3, ∂G- её граница, $\overline{G}=G\cup\partial G$, a l-замкнутое множество, $l\in\overline{G}$. Функция $\varphi(X)\in C_l^\infty(G), если \varphi(X)\in C^\infty(G\setminus l), \varphi(X)=0$ в некоторой окрестности множества l. $H_{1,l}(G)-$ пространство, полученное из $C_l^\infty(G)$ замыканием по норме пространства $H_1(G)$. Пусть $E_i\subset(\bigcup_{j=1}^{4}l_{2j-1})\times Ot, i=1,2,...,-$ замкнутые множества (число множеств E_i может быть конечно). Обозначим $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i, \bigcup_{j=1}^{4}l_{2j-1}=\hat{l}, \bigcup_{j=1}^{4}l_{2j}=\tilde{l}.$

Функция $\psi(X)\in H_{1,E}^{loc}(П)$, если для любой ограниченной области G⊂R^3, такой, что граница пересечения П∩G содержится в $\overline{П}, \psi(X)\in H_{1,\hat{E}}(П\cap G), где \hat{E}=G\cap E.$

Функция $u\in H_1^{loc}(П)$ является в П обобщённым решением однородной смешанной краевой задачи

$$Lu=0, u|_E=0(причёми|_{\tilde{l}\times Ot}=0), \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\hat{l}\setminus E}=0(\frac{\partial}{\partial \nu}-производнаяпонормалик\partial П);$$
$$u(X)\in H_{1,E}^{loc}(П) \qquad /3/$$

и тождество /2/ справедливо в G∩П при любой функции $\varphi(X)\in C_0^\infty(G)\cap C_{\hat{E}}^\infty(G).$

Обозначим через F множество, полученное из Е симметричным отражением относительно плоскостей $x_k = mh, k = 2,3.m = 0,\pm1,..., h = atg\frac{135^\circ}{2}$;

$пусть \tilde{E} = E \cup F.$

Теорема о продолжении. Обобщённое решение u(X) краевой задачи /3/

и коэффициенты $a_{ij}(X)$ оператора L можно так продолжить на всё пространство R^3 до функции z(X) и коэффициентов $c_{ij}(X)$, соответственно, что z(X) является в $R^3 \setminus \tilde{E}$ слабым решением задачи Дирихле

$\tilde{L}z \equiv \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}[c_{ij}(X)\frac{\partial z}{\partial x_j}] = 0, z|_{\tilde{E}} = 0, \tilde{L} -$ оператор с постоянной эллиптичности α, коэффициенты которого $c_{ij}(X)$- измеримые ограниченные в R^3 функции, $c_{ij}(X)=c_{ji}(X)$.

Укажем, как строится оператор $\tilde{L}$ и как u(X) продолжается с П до функции z(X) в R^3. Обозначим восьмиугольник $\Omega=\Omega_{00}$. Ω_{ko}, Ω_{-k0}, Ω_{0k}, Ω_{0-k}- восьмиугольники, полученные из Ω_{k-1o}, $\Omega_{-(k-1)0}$, Ω_{0k-1}, $\Omega_{0-(k-1)}$ симметричным отражением относительно прямых

$$x = a(1+\sqrt{2}) + (k-1)a(1+\sqrt{2}), x = -a(1+\sqrt{2}) - (k-1)a(1+\sqrt{2}), y = atg\frac{135^\circ}{2} +$$

$$+(k-1)a(1+\sqrt{2}), y = -atg\frac{135^\circ}{2} - (k-1)a(1+\sqrt{2}), k = 1,2,...,$$

соответственно. Пусть $D = \bigcup_{i,j=-\infty}^{+\infty} \Omega_{ij}$. Дополнение Oxy\D есть объединение бесконечного числа квадратов, которое мы обозначим через H. Продолжим функцию u(t, x, y) и коэффициенты $a_{ij}(t,x,y)$ оператора L с области П=Ω×Ot≡Ω_{00}×Ot на D×Ot до функции $\tilde{u}(t,x,y)$ и коэффициентов $\tilde{a}_{ij}(t,x,y)$, соответственно, по формулам: при

$$\tilde{x}_k = (-1)^{s_k} x_k + hs_k + \frac{1}{2}h[1+(-1)^{s_{k+1}}], k = 2,3, h = atg\frac{135^\circ}{2}, x_2 = x, x_3 = y,$$

$$\tilde{u}(x_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3) = u(x_1,x_2,x_3); \tilde{a}_{ij}(x_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3) = (-1)^{s_i+s_k} a_{ij}(x_1,x_2,x_3), x_1 = t, i \neq j, i \neq 1,$$

$$\tilde{a}_{i1}(x_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3) = (-1)^{s_i} a_{i1}(x_1,x_2,x_3), i \neq 1, s_k = 0,\pm1,..., i, j = 2,3.$$

Чтобы доопределить решение u и коэффициенты оператора L в дополнении к D×Ot, т.е. на множестве H×Ot, введём сначала на K×Ot, где K- квадрат со сторонами

$y \pm a\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\left|x - -a - a\sqrt{2}\right|$, функцию v(t, x, y)=

$$= \sin\frac{\pi}{a\sqrt{2}}(x - y + a\frac{\sqrt{2}}{2})\sin\frac{\pi}{a\sqrt{2}}(-y - x + a\frac{\sqrt{2}}{2})chRt, R = \frac{\sqrt{2}\pi}{a\sqrt{\alpha-2}},$$

которая в K×Ot является решением уравнения

$L_K v \equiv b_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2\pi^2}{R^2a^2}b_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ с некоторой постоянной b_{22}>0.

Постоянная эллиптичности оператора L_K $\alpha_K = 2 + \frac{2\pi^2}{a^2R^2}$; при этом α_K=α.

В объединении H квадратов на плоскости Oxy все квадраты получаются из K сдвигом вдоль оси Ox на mh, m=±1,±2,…, и вдоль оси Oy на qh, q=±1,±2,… Выделим один из таких квадратов, полученный из K сдвигом на m_0h вдоль Ox и q_0h вдоль Oy. Обозначим его $K_{m_0q_0}$. Стороны этого квадрата имеют уравнения $y \pm a\frac{\sqrt{2}}{2} - q_0h = \pm\left|x - a - a\sqrt{2} - m_0h\right|$.

В $K_{m\,q_0} \times Ot$ введём функцию

$$v_{m_0q_0}(t,x,y) = \sin\frac{\pi}{a\sqrt{2}}[x - y + a\frac{\sqrt{2}}{2} + h(1+m_0+q_0)]\sin\frac{\pi}{a\sqrt{2}}[-y - x + a\frac{\sqrt{2}}{2} + h(-1-m_0-q_0)]chRt,$$

$$R^2 = \frac{2\pi^2}{a^2(\alpha-2)}, m_0, q_0 = \pm1,\pm2,...,$$