В. А. Плетюхов
В. М. Редьков
В. И. Стражев

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК БЕЛАРУСИ
Институт физики им. Б. И. Степанова

В. А. Плетюхов
В. М. Редьков
В. И. Стражев

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Минск
«Беларуская навука»
2015

УДК 539.12:530.145.6

Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск : Беларуская навука, 2015. – 326 с. – ISBN 978-985-08-1886-7.

В книге изложены основные положения теории релятивистских волновых уравнений с расширенным (включая кратные) набором неприводимых представлений группы Лоренца. На основе развитого подхода рассматривается возможность описания внутренних степеней свободы, а также структуры элементарных частиц. Исследованы способы совместного описания частиц с ненулевой и нулевой массой в рамках не распадающихся по группе Лоренца уравнений. Приведена схема вторичного квантования РВУ с внутренними степенями свободы, соответствующими некомпактным группам симметрии. Существенное внимание уделено уравнениям дираковского типа, в первую очередь уравнению Дирака–Кэлера, причем не только в континууме, но и в решеточном пространстве. В книгу включены необходимые сведения из теории РВУ в подходе Гельфанда – Яглома и ковариантные методы Ф. И. Федорова.

Предназначена для научных работников и аспирантов, занимающихся вопросами физики элементарных частиц, классической и квантовой теории поля. Может быть использована в качестве учебного пособия.

Табл. 2. Библиогр.: 175 назв.

Р е ц е н з е н т ы:
доктор физико-математических наук М. И. Левчук,
доктор физико-математических наук, профессор И. Д. Феранчук

ISBN 978-985-08-1886-7

Оглавление

Предисловие 7

1. Релятивистские волновые уравнения с минимальным набором представлений группы Лоренца 9

1.1. Основные положения теории РВУ 9

1.2. Релятивистские волновые уравнения для частиц с низшими спинами 17

1.3. К теории частиц со спином 3/2 23

1.4. Релятивистское волновое уравнение для частицы со спином 2 28

1.5. Частицы с переменным спином и составная структура адронов 34

2. Релятивистские волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца 43

2.1. Анализ условий распадения РВУ с кратными представлениями 43

2.2. РВУ с кратными представлениями для частиц со спинами 0 и 1 54

2.3. О физической неэквивалентности различных РВУ для частиц со спинами 0 и 1 61

2.4. Волновые уравнения для спина 1/2 70

2.5. РВУ с кратными представлениями для частицы со спином 3/2 77

2.6. РВУ с кратными представлениями для S = 2 82

3. Кратные представления и внутренние степени свободы частиц 91

3.1. Диракоподобные уравнения, поля с переменным спином 91

3.2. Уравнение Дирака–Кэлера как РВУ с кратными представлениями 97

3.3. Об описании дираковских частиц с внутренними степенями свободы посредством тензорных полей 104

3.4. Вещественное поле Дирака–Кэлера и дираковские частицы 111

3.5. Обобщения уравнения Дирака–Кэлера 117

3.6. Тензорная формулировка полевых систем с набором спиновых состояний 1, 2 и 0, 1, 2 127

3.7. Об алгебраических обобщениях уравнения Дирака–Кэлера 137

3.8. Внутренние степени свободы в теории частиц со спином 3/2 140

4. Безмассовые калибровочно-инвариантные массивные поля в теории обобщенных РВУ 149

4.1. О совместном описании безмассовых полей с различными спиральностями 149

4.2. Безмассовые поля в теории Дирака–Кэлера 172

4.3. Массивные калибровочно-инвариантные поля в теории РВУ 184

4.4. Совместное описание массивных и безмассовых полей. Выводы 189

4.5. Механизм Кальба–Рамонда и теория РВУ 193

5. О связи спина и статистики в теории РВУ с внутренними степенями свободы 201

5.1. К вопросу о вторичном квантовании РВУ с использованием индефинитной метрики 201

5.2. Вторичное квантование РВУ с внутренними степенями свободы 205
5.3. Вероятностная интерпретация теории 215
5.4. Квантование SU(1, 1)-инвариантных дираковского и скалярного полей 221
5.5. Квантование SU(2, 2)-инвариантного дираковского поля и поля Дирака–Кэлера 229
5.6. Квантовая формулировка алгебраических обобщений уравнения Дирака–Кэлера 235

6. Геометрические фермионы на решетке 241
6.1. Решеточное описание набора антисимметричных тензорных полей 241
6.2. Симметрийные свойства дирак-кэлеровского решеточного лагранжиана 246
6.3. Редукция решеточного лагранжиана и интерпретация внутренних степеней свободы 250
6.4. О решеточной форме 16-компонентной теории Дирака . . 254
6.5. Матричная форма тензорных обобщений уравнения Дирака–Кэлера в решеточном пространстве 256
6.6. Геометризованное введение массы и калибровочного взаимодействия в решеточной модели 264

7. Подход Гельфанда–Яглома в теории РВУ 271
7.1. Уравнения, инвариантные относительно собственной группы Лоренца 271
7.2. Уравнения, инвариантные относительно полной группы Лоренца 278
7.3. Лагранжева формулировка 284
7.4. Масса и спин частицы, РВУ и структура матрицы Γ_4 . . . 291
7.5. Два типа уравнений для полей с нулевой массой 294
7.6. 2-компонентное уравнение для поля с нулевой массой, анализ в подходе Гельфанда–Яглома 297

8. Метод проективных операторов Ф. И. Федорова 301
8.1. Усеченные минимальные полиномы 301
8.2. Проективные операторы 302
8.3. Дефинитность энергии и заряда 307
8.4. Расчет вероятности перехода частицы из одного состояния в другое 310

Литература 311

Предисловие

Уравнение Ньютона, уравнения Максвелла, уравнение Эйнштейна, уравнение Шредингера, уравнение Дирака, уравнения Янга–Миллса.

Каждое из вышеперечисленных уравнений являлось по-своему эпохальным событием в физике. Уравнение Ньютона положило начало теоретической физике. С уравнениями Максвелла связано введение принципиально нового физического понятия поля, объединение электрических и магнитных явлений, предсказание существования электромагнитных волн. Уравнение Эйнштейна соединило воедино свойства материи и пространства-времени, создало основу для описания Вселенной как единого физического объекта. Уравнение Шредингера привело к пониманию вероятностного характера физических явлений. Уравнение Дирака, вершина квантово-механического описания физических процессов, создало основу для квантовой теории поля, предсказало существование нового вида материи (античастиц). Уравнения Янга–Миллса лежат в фундаменте единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий, теории калибровочных полей. Вывод об огромной значимости этих уравнений в отыскании и объяснении физических законов природы очевиден. Кроме уравнений Ньютона и Шредингера, все они являются примерами релятивистских волновых уравнений. Уравнение Дирака послужило одновременно и примером для построения теории релятивистских волновых уравнений в матричной форме (РВУ), основой которой является взаимосвязь уравнения с соответствующими представлениями группы Лоренца.

Теория релятивистских волновых уравнений первого порядка, записанных в матричной форме, предполагает в своей исходной формулировке возможность описания только одной, спиновой, внутренней степени свободы элементарных частиц. Математическим отражением этого обстоятельства является использование минимального набора неприводимых представлений группы Лоренца, который необходим для описания частицы с заданным значением спина (уравнение Дирака для спина 1/2, уравнения Даффина–Кеммера для спинов 0 и 1, уравнение Фирца–Паули для спина 3/2). Однако в 1955–1957 гг. Петрашем и Улеглой было построено уравнение для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом, которое возникает за счет привлечения дополнительных по отношению к биспинору неприводимых компонент в пространстве представлений волновой функции частицы. Еще ранее, в 1928 году, английским физиком Дарвином было предложено уравнение (впоследствии получившее название уравнения Дирака–Кэлера), которое содержит двукратные скалярную и векторную компоненты. Данное уравнение допускает трактовку как РВУ для спина 1/2 и дополнительной внутренней степенью свободы. Уравнения Дирака–Кэлера и Петраша–Улеглы можно считать первыми РВУ, которые выходят за рамки стандартных положений теории поля. Они продемонстрировали, что в подходе теории РВУ при отказе от условия минимальности используемого набора представлений группы Лоренца можно описывать внутреннюю структуру частиц, включая дополнительные степени свободы. С конца 1960-х – начала 1970-х годов данное направление начинает активно развиваться в нашей республике с работ академика Ф. И. Федорова и его учеников А. А. Богуша, С. И. Лобко, В. А. Плетюхова, В. И. Стражева, В. В. Киселя, С. И. Круглова и др. За прошедшие десятилетия был накоплен богатый материал по развитию теории релятивистских волновых уравнений с расширенными наборами неприводимых представлений группы Лоренца. В работе будет показано, что отказ от требования минимальности используемых наборов представлений группы Лоренца существенно расширяет возможности метода релятивистских волновых уравнений с точки зрения пространственно-временного описания как внутренней структуры, так и изоспиновых степеней свободы частиц. Получение новых уравнений с более богатой структурой для частицы с заданным спином s возможно либо за счет включения представлений с более высокими спинами, либо за счет использования повторяющихся (кратных) представлений группы Лоренца. Книга подводит определенный итог работе, проделанной в этом направлении белорусской школой теоретической физики, и является данью памяти нашему учителю академику Ф. И. Федорову.

Глава 1.

Релятивистские волновые уравнения с минимальным набором представлений группы Лоренца

1.1. Основные положения теории РВУ

Одним из наиболее распространенных и общих способов описания элементарных частиц в классической и квантовой теории поля является теория релятивистских волновых уравнений (РВУ), основы которой были заложены Дираком [1], Фирцем и Паули [2, 3], Баба [4, 5], Хариш-Чандра [6, 7], Гельфандом и Ягломом [8, 9], Федоровым [10, 11].

Сформулируем в сжатом виде основные положения данной теории, содержащиеся в упомянутых работах. В дальнейшем теорию, базирующуюся на этих положениях, будем называть стандартной теорией РВУ. Ее подход заключается в том, что описание частиц (полей) как с ненулевой, так и нулевой массой всегда может быть сведено к системе дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, представимой в матричной форме

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0)\psi = 0 \qquad (\mu = 1, ..., 4). \tag{1.1}$$

Здесь ψ – многокомпонентная волновая функция, Γ_μ и Γ_0 – квадратные матрицы; выбрана метрика $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$, $x_4 = ict$. В случаях, когда матрица Γ_0 – неособенная ($\det \Gamma_0 \neq 0$), система уравнений (1.1) умножением на $m\Gamma_0^{-1}$ может быть приведена к виду

$$(\Gamma_\mu \partial_\mu + mI)\psi = 0, \tag{1.2}$$

где m – скалярный параметр, связанный с массой, I – единичная матрица (как правило она опускается).

Обычно на системы (1.1) и (1.2) накладываются следующие обязательные требования:

(a) инвариантность относительно преобразований собственной группы Лоренца;

(b) инвариантность относительно пространственных отражений;

(c) возможность лагранжевой формулировки на основе вариационного принципа.

Системы вида (1.2), удовлетворяющие условиям (a)–(c), называются релятивистскими волновыми уравнениями; системы вида (1.1), где матрица Γ_0 может быть как неособенной, так и особенной, в том числе нулевой, при выполнении тех же условий (a)–(c) называются обобщенными релятивистскими волновыми уравнениями. РВУ (1.2) описывают частицы с ненулевой массой, обобщенные РВУ (1.1) могут описывать частицы (поля) с ненулевой и нулевой массой.

В стандартной теории РВУ считается, что элементарная частица как единый объект должна описываться не распадающимися по полной группе Лоренца уравнениями. Тогда из условия (a) вытекает, что волновая функция должна преобразовываться по некоторому приводимому представлению T группы Лоренца, состоящему из зацепляющихся неприводимых представлений.

Напомним[1], что неприводимые представления $\tau \sim (l_1, l_2)$ и $\tau' \sim (l_1', l_2')$ называются зацепляющимися, если $l_1' = l_1 \pm 1/2,\ l_2' = l_2 \pm 1/2$ (причем знаки $+$ и $-$ могут не коррелировать). Из условия (b) следует также, что в представлении T наряду с каждым неприводимым представлением $\tau \sim (l_1, l_2)$ должно присутствовать сопряженное представление $\dot{\tau} \sim (l_2, l_1)$.

[1] Пользуемся обозначениями неприводимых представлений группы Лоренца, принятыми в [12]

Наглядное изображение представления T осуществляется посредством так называемой схемы зацеплений, в которой зацепляющиеся неприводимые компоненты τ соединяются чертой, и при этом любые два представления (компоненты T) могут быть соединены цепочкой из зацепляющихся представлений, содержащихся в T. Если в используемой схеме зацеплений хотя бы одно неприводимое представление встречается два или более раз, то говорят об РВУ с кратными (повторяющимися) представлениями группы Лоренца.

Основную роль в РВУ (1.1), (1.2) играют матрицы Γ_4 и Γ_0; напомним, что матрицы Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ выражаются через Γ_4 и бусты J^{i4} лоренцевских преобразований в пространстве представления T:

$$\Gamma_i = [J^{i4}, \Gamma_4]. \tag{1.3}$$

Для установления спектра возможных значений массы и спиновых характеристик частицы, описываемого уравнением (1.2), удобно использовать базис Гельфанда–Яглома, в котором матрица Γ_4 имеет вид

$$\Gamma_4 = \oplus \sum_s C^{\,s} \otimes I_{2s+1}. \tag{1.4}$$

Здесь I_{2s+1} – единичная клетка размерности $2s + 1$; C^s – так называемый спиновый блок.

Блок C^s состоит из элементов $c^s_{\tau\tau'}$; τ, τ' – неприводимые представления, которые входят в T; возможные значения s удовлетворяют условиям

$$| \, l_1 - l_2 \, | \leq s \leq l_1 + l_2, \qquad | \, l'_1 - l'_2 \, | \leq s \leq l'_1 + l'_2. \tag{1.5}$$

При этом элементы $c^s_{\tau\tau'}$ отличны от нуля только для зацепляющихся представлений τ, τ'. Про представления, удовлетворяющие условиям (1.5), говорят, что они формируют спиновый блок C^s. Очевидно, что в используемой схеме зацеплений при описании спина s должно быть, как минимум, два зацепляющихся неприводимых представления, формирующих блок C^s.

Возможные значения массы частицы $m_k^{(s)}$ выражаются через параметр m и корни $\pm\lambda_k^{(s)}$ блока C^s согласно формуле

$$m_k^{(s)} = \frac{m}{| \, \lambda_k^{(s)} \, |}. \tag{1.6}$$

Требование (a) налагает следующие ограничения на элементы $c^s_{\tau\tau'}$:

$$c^s_{\tau\tau'} = c_{\tau\tau'}\ \sqrt{(s+l_+ +2)(s-l_+ -1)},\ \text{ если }\ l'_+ = l_+ + 1, \qquad l'_- = l_-,$$

$$c^s_{\tau\tau'} = c_{\tau\tau'}\ \sqrt{(s+l_- +1)(s-l_-)},\ \text{ если }\ l'_+ = l_+, \qquad l'_- = l_- + 1, \tag{1.7}$$

$$c^s_{\tau\tau'} = c_{\tau\tau'}\ (s+\frac{1}{2}),\ \text{ если }\ l'_+ = l_+, \qquad l'_- = l_-,$$

где

$$l_+ = l_1 + l_2,\ \ l_- = \mid l_1 - l_2 \mid, \qquad l'_+ = l'_1 + l'_2,\ \ l'_- = \mid l'_1 - l'_2 \mid;$$

здесь $c_{\tau\tau'}$ – произвольные (отличные от нуля) комплексные числа для зацепляющихся представлений и нулевые во всех остальных случаях.

Требование (b) инвариантности РВУ относительно операции пространственного отражения налагает на числа $c_{\tau\tau'}$ ограничения:

$$c^s_{\tau\tau'} = c^s_{\dot\tau\dot\tau'}, \qquad \text{если }\ \dot\tau \neq \tau,\ \dot\tau' \neq \tau';$$

$$c^s_{\tau\tau'} = \pm c^s_{\dot\tau\dot\tau'}, \qquad \text{если }\ \dot\tau = \tau,\ \dot\tau' \neq \tau', \tag{1.8}$$

$$\text{либо }\ \dot\tau \neq \tau,\ \dot\tau' = \tau'.$$

Знак $(+)$ во втором условии (1.8) (для определенности считаем, что $\dot\tau = \tau,\ \ \dot\tau' \neq \tau'$) берется тогда, когда оператор пространственного отражения P действует в подпространствах $R^\tau, R^{\tau'}$ по формулам

$$P\xi^\tau_{sm} = (-1)^s \xi^\tau_{sm}, \qquad P\xi^{\tau'}_{sm} = (-1)^s \xi^{\dot\tau'}_{sm}, \tag{1.9}$$

а знак $(-)$ выбирается, если

$$P\xi^\tau_{sm} = (-1)^{s+1} \xi^\tau_{sm}, \qquad P\xi^{\tau'}_{sm} = (-1)^s \xi^{\dot\tau'}_{sm}. \tag{1.10}$$

Фактически, две возможности $(\pm)$ связаны с различающимися по внутренней четности типами частиц. При $\tau = \dot\tau,\ \ \tau' = \dot\tau'$ имеем $c_{\tau\tau'} \neq 0$ лишь тогда, когда оператор P действует одинаково в пространствах $R^\tau, R^{\tau'}$. Других ограничений на числа $c_{\tau\tau'}$ в этом случае не накладывается.

При построении лагранжиана

$$L = -\bar\psi\,(\Gamma_\mu \partial_\mu + m)\,\psi, \tag{1.11}$$

из которого может быть получено РВУ (1.2), используется лоренц-инвариантная вещественная форма $\bar{\psi}\psi = \psi^{+}\eta\psi$, где η – матрица билинейной формы. В базисе Гельфанда–Яглома матрица η имеет структуру, аналогичную (1.4):

$$\eta = \oplus \sum_{s} \eta^{s} \otimes I_{2s+1}. \tag{1.12}$$

В блоках η^{s} отличными от нуля являются лишь элементы $\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}$, причем

$$\eta^{s}_{\tau\dot{\tau}} = \eta^{s}_{\dot{\tau}\tau} = -\eta^{s\pm 1}_{\tau\dot{\tau}}. \tag{1.13}$$

Поскольку общий множитель при матрице η физического смысла не имеет, то, не уменьшая общности, можно нормировать ее так, что в блоках η^{s} будут встречаться только числа ± 1.

Требование (c) возможности лагранжевой формулировки уравнения (1.2) приводит к условию

$$c^{s}_{\tau\tau'}\, \eta^{s}_{\tau'\dot{\tau}'} = (c^{s}_{\dot{\tau}'\dot{\tau}})^{*}\, \eta^{s}_{\tau\dot{\tau}}. \tag{1.14}$$

Минимальный полином матрицы Γ_4 (а значит, и всех Γ_μ) в уравнении (1.2), описывающем частицы с ненулевой энергией и ненулевым зарядом, должен иметь следующий вид:

$$\Gamma_4^{n}\, (\Gamma_4^{2} - \lambda_1^{2})\, (\Gamma_4^{2} - \lambda_2^{2}) ... = 0, \tag{1.15}$$

где все λ_k – вещественны и различны, а n может быть любым целым положительным числом, включая нуль.

Для дефинитности энергии и заряда необходимо и достаточно выполнения соответственно неравенств

$$(-1)^{n+1} \left[\left(\text{Sp}\, (\Gamma_4^{n+1}\eta)\right)^{2} - \left(\text{Sp}\, (\Gamma_4^{n}\eta)\right)^{2} \right] > 0, \tag{1.16}$$

$$(-1)^{n} \left[\left(\text{Sp}\, (\Gamma_4^{n+1}\eta)\right)^{2} - \left(\text{Sp}\, (\Gamma_4^{n}\eta)\right)^{2} \right] > 0. \tag{1.17}$$

Матрица Γ_0 приводима к диагональному виду и при этом состоит из независимых скалярных блоков, отвечающих неприводимым представлениям τ. В случае, когда $\det \Gamma_0 = 0$, часть этих блоков являются нулевыми.

Из условия (b) следует, что ненулевые элементы a_τ матрицы Γ_0 удовлетворяют равенству

$$a_\tau = a_{\dot{\tau}}. \tag{1.18}$$

Условие (c) приводит опять-таки к соотношению (1.18). Важно отметить, что в стандартной теории РВУ уравнение (1.1) с особенной матрицей Γ_0 ассоциируется с описанием исключительно безмассовых частиц.

Как уже отмечалось в предисловии, характерной особенностью наиболее известных РВУ вида (1.2) (уравнение Дирака для спина $1/2$, уравнение Даффина–Кеммера для спинов 0 и 1, уравнение Фирца–Паули для спина $3/2$) является то, что в них используется набор неприводимых представлений группы Лоренца, минимально необходимый для построения теории данного спина.

Попытки применения кратных представлений в теории РВУ предпринимались различными авторами. Предложенный в работах [3, 13] способ устранения трудностей в теории Дирака–Фирца–Паули [1–3], который заключается во введении в лагранжиан дополнительных спин-тензоров, есть, по-существу, ни что иное как введение кратных представлений. Впервые предложенное Гинзбургом [14], затем спустя 10 лет переоткрытое Баба [15] и подробно изученное впоследствии Файнбергом [16] и Лобко [17] уравнение для частицы с переменным спином $1/2, 3/2$ базируется на наборе неприводимых представлений группы Лоренца

$$2(0, \frac{1}{2}) \oplus 2(\frac{1}{2}, 0) \oplus (\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2}). \tag{1.19}$$

Здесь неприводимые компоненты $(0, 1/2)$ и $(1/2, 0)$ имеют кратность, равную двум[2]. Этот же набор впервые был предложен для описания частиц со спином 3/2 Фрадкиным [13].

В работах [18, 19] исследовалась схема зацеплений

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma(0, \frac{3}{2}) & - & \beta(\frac{1}{2}, 1) & - & \beta(1, \frac{1}{2}) & - & \gamma(\frac{3}{2}, 0) \\ & & | & & | & & \\ & & \alpha(0, \frac{1}{2}) & - & \alpha(\frac{1}{2}, 0) & & \end{array} \tag{1.20}$$

[2]Благодаря этому обобщению, удается частично решить проблему расходимости в первом неисчезающем приближении теории возмущений [16].

на предмет построения всевозможных РВУ с одним значением спина $1/2$ или $3/2$, удовлетворяющих стандартным физическим требованиям (α, β, γ – кратности соответствующих неприводимых компонент в (1.20)). Подробно рассматривалось 40-компонентное уравнение для спина $3/2$. Тот же спин, описываемый 52-компонентной волновой функцией, изучался в работе [20]. Уравнение для частицы со спином 2 и расширенным набором неприводимых представлений, включая кратные, предлагалось в [21].

Общее исследование схем зацеплений с кратными представлениями для частиц с проивольным высшим спином в подходе Гельфанда–Яглома проводится в работах Капри [22, 23], Амара и Доццио [24, 25].

В работе [22] теория полуцелого спина $s + 1/2$ строится на основе набора неприводимых представлений

$$(\frac{s}{2}, \frac{s+1}{2}) \oplus (\frac{s+1}{2}, \frac{s}{2}) \oplus (\frac{s-1}{2}, \frac{s}{2}) \oplus (\frac{s}{2}, \frac{s-1}{2}) \oplus \\ \oplus \sum_{j=0}^{s-2} \left[\alpha_j (\frac{j}{2}, \frac{j+1}{2}) \oplus \alpha_j (\frac{j+1}{2}, \frac{j}{2}) \right], \qquad (1.21)$$

где кратности α_j подбираются так, чтобы обеспечить внутреннюю непротиворечивость уравнений, в частности, дефинитность метрики при квантовании. В качестве примера рассматривается РВУ для спина $3/2$ с $\alpha_0 = 2$. В [23] тот же подход используется для получения РВУ с заданным спектром масс и спинов, причем в отличие от метода Баба [4] без жесткой взаимосвязи между последними. Для целого спина аналогичные исследования проводятся в работах [24, 25].

Следует, однако, отметить, что методика Капри, Амара и Доццио обладает чрезмерной общностью, затрудняющей ее практическое применение. Отсутствуют какие-либо конкретные рекомендации для выбора чисел α_j в (1.21), поэтому построение РВУ с заданными характеристиками требует утомительного перебора различных вариантов.

Для частиц с низшими спинами задача получения РВУ с расширенной структурой представлений является не менее интересной, чем для высших, тем более что на таких уравнениях проще изучать механизм влияния кратных представлений на физические свойства частиц. Тем не менее указанных уравнений существует к настоящему времени сравнительно немного.

Для спина $1/2$, например, отличающееся от уравнения Дирака РВУ с набором представлений (1.19) было предложено в работе Петраша [26]. Его подробное исследование проведено в работах Улегла [27] и Форманека [28], где установлено, что новое уравнение описывает частицу с аномальным магнитным моментом. Позже это уравнение переоткрывается в работе Халила [29], в которой показано, что, несмотря на недиагонализируемый характер матрицы Γ_4, все его решения во внешнем электромагнитном поле носят причинный характер. РВУ, описывающее спин $1/2$ на основе представления

$$3(0, \frac{1}{2}) \oplus (\frac{1}{2}, 1) \oplus (1, \frac{1}{2}) \oplus 3(\frac{1}{2}, 0),$$

рассматривается в работе [30].

Неэквивалентные уравнениям Даффина–Кеммера РВУ для частиц с одним значением массы и спинами 0 и 1 с использованием кратных представлений группы Лоренца впервые были получены в работах [31, 32]. В работе [33] предложены два уравнения для частицы со спином 0, опирающиеся на набор представлений

$$(0, 0) \oplus 2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \oplus (0, 1) \oplus (1, 0);$$

второе из них эквивалентно уравнению, рассмотренному в [31].

В работах [34, 35] проанализированы различные классы схем зацеплений, содержащих до четырех неэквивалентных неприводимых представлений группы Лоренца произвольной кратности, с точки зрения возможности построения на их основе РВУ с одним низшим спином и одной массой. Там же приведено несколько конкретных уравнений, большинство из которых уже рассматривалось в упомянутых выше работах других авторов. Подходу, используемому в [34, 35], в значительной степени присущи недостатки, свойственные работам [22–25].

1.2. Релятивистские волновые уравнения для частиц с низшими спинами

Рассмотрим схему зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца

$$(0,0)-(\frac{1}{2},\frac{1}{2}), \tag{1.22}$$

где представление $(0,0)$ соответствует скалярной функции ψ_0, $(1/2,1/2)$ – векторной функции ψ_μ. Матрица Γ_4 РВУ, строящегося на основе схемы (1.22), в базисе Гельфанда–Яглома имеет вид

$$\Gamma_4=\begin{pmatrix} C^0 & \\ & C^1\otimes I_3 \end{pmatrix}. \tag{1.23}$$

Здесь C^0 и C^1 – блоки, отвечающие спинам 0 и 1.

Введем для удобства дальнейших обозначений нумерацию неприводимых компонент, содержащихся в (1.22):

$$(0,0)\sim 1, \quad (\frac{1}{2},\frac{1}{2})\sim 2.$$

Тогда для спиновых блоков $C^0,\ C^1$ получим

$$C^0=\begin{pmatrix} 0 & c^0_{12} \\ c^0_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad C^1=0. \tag{1.24}$$

При этом нетрудно видеть, что условия (1.8) – (1.10) никаких ограничений, кроме вещественности, на числа c^0_{12}, c^0_{21} не накладывают.

Элементы η^s_{ij} матрицы лоренц-инвариантной билинейной формы η, которая в базисе Гельфанда–Яглома имеет аналогичную (1.23) спиновую структуру

$$\eta=\begin{pmatrix} \eta^0 & \\ & \eta^1\otimes I_3 \end{pmatrix}, \quad \eta^0=\begin{pmatrix} \eta^0_{11} & 0 \\ 0 & \eta^0_{22} \end{pmatrix}, \quad \eta^1=\eta^1_{22}, \tag{1.25}$$

выберем следующим образом:

$$\eta^0_{11}=\eta^0_{22}=-\eta^1_{21}=1. \tag{1.26}$$

Такой выбор при наложении условия (1.14) приводит к ограничению

$$c_{21}^0 = c_{12}^0, \tag{1.27}$$

где учтено, что c_{12}^0 является вещественным числом. Полагая единственный независимый параметр матрицы Γ_4 (1.23), (1.24) равным 1 ($c_{12}^0 = 1$), получим окончательно

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.28}$$

Легко убедиться, что минимальное уравнение матрицы Γ_4 (1.28) имеет вид

$$\Gamma_4(\Gamma_4^2 - 1) = 0. \tag{1.29}$$

Вид остальных матриц Γ_i $(i = 1, 2, 3)$ находится из соотношений (1.3).

Для дефинитности энергии необходимо и достаточно в данном случае выполнения неравенства (см. (1.16))

$$(-1)^2 \left[\left(\text{Sp } (\Gamma_4^2 \eta) \right)^2 - \left(\text{Sp } (\Gamma_4 \eta) \right)^2 \right] > 0, \tag{1.30}$$

справедливость которого автоматически вытекает из выражений (1.25), (1.26), (1.28) для матриц η и Γ_4.

Из уравнений (1.28), (1.29) следует, что состояниям со спином 0 соответствует одно (с точностью до знака) значение массы, а состояния со спином 1 отсутствуют. Таким образом, построенное выше в подходе Гельфанда–Яглома РВУ описывает частицу с ненулевой массой и спином 0. В литературе его обычно называют уравнением Даффина–Кеммера для спина 0 (см., например, [36]), поскольку впервые было предложено в работах [37, 38].

Тензорная формулировка уравнения Даффина–Кеммера для спина 0 имеет вид

$$\partial_\mu \psi_\mu + m\psi_0 = 0, \quad \partial_\mu \psi_0 + m\psi_\mu = 0. \tag{1.31}$$

Научное издание

Плетюхов Владимир Анестиевич,
Редьков Виктор Михайлович,
Стражев Василий Иванович

РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВНУТРЕННИЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Редактор *Т. С. Климович*

Художественный редактор *Т. Д. Царева*

Технический редактор *О. А. Толстая*

Компьютерная верстка *В. М. Редьков*

Подписано в печать 09.07.2015. Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 26,65. Уч.-изд. л. 22,1.
Тираж 120 экз. Заказ 123.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Республиканское унитарное предприятие «Издательский дом «Беларуская навука».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/18 от 02.08.2013.
Ул. Ф. Скорины, 40, 220141, г. Минск.

ISBN 978-985-08-1886-7