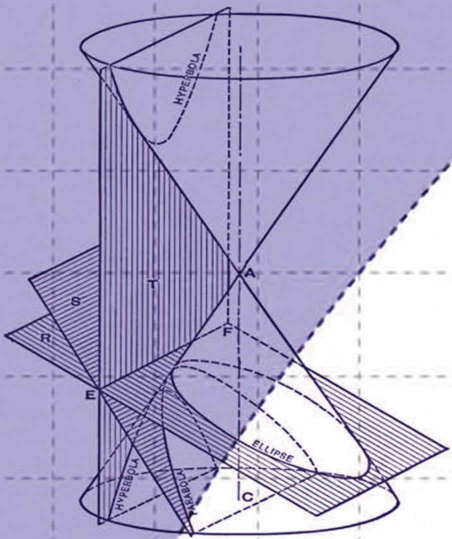
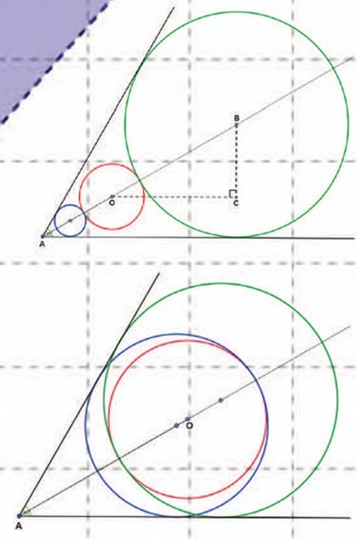
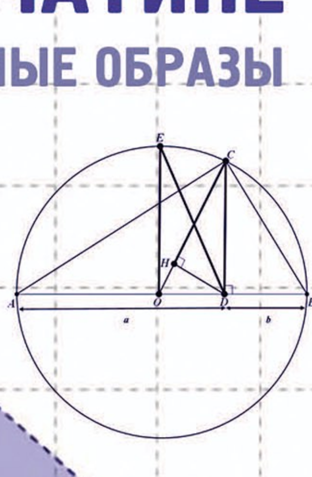
С. М. Крачковский





ДИВЕРГЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ И ИХ ВИЗУАЛЬНЫЕ ОБРАЗЫ



ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

УДК 37.025.7(075.8)
ББК 74.202.66я79
88.251.311.5я79
К 78

Рецензент:
Гусев Валерий Александрович,
доктор педагогических наук, профессор,
кафедра элементарной математики и методики обучения
математике, МПГУ.

Крачковский, Сергей Михайлович.
К 78 Дивергентные задачи по математике и их визуальные образы.
Учебно-методическое пособие. – Москва : Прометей, 2016. – 166 с.

Многие математические задачи и понятия допускают целый спектр интересных и эффектных способов своего представления и наглядного восприятия. Нередко эти способы существенно отличаются друг на друга – как идейно, так и визуально. В других же задачах условие содержит некоторую неоднозначность, также приводящую к возможности их различных интерпретаций. Такие задачи называются дивергентными. Знакомясь с ними, учащиеся получают возможность «увидеть» сущность задачи с разных сторон, запечатлеть для себя несколько зрительных образов одной и той же ситуации, провести их сопоставление.

В пособии рассматриваются различные типы дивергентных задач по математике, приводятся многочисленные примеры и задачи. Их рассмотрение стимулирует творческое восприятие математики, вырабатывает широту подходов и неформальное понимание предмета, наполняет жизнью многие задачи, казавшиеся до этого «сухими» и однообразными, освещая их с разных сторон и заставляя блестеть множеством красок. Издание адресуется преподавателям математики, школьникам старших классов и всем интересующимся математикой и вопросами её преподавания.

ISBN 978-5-9908018-0-6

Содержание

§ 1. ВАРИАТИВНОЕ МЫШЛЕНИЕ И ДИВЕРГЕНТНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Всякий раз мы смотрим на вещи не только с другой стороны, но и другими глазами — поэтому и считаем, что они переменились.

Блез Паскаль

В психологии под вариативным мышлением понимается сформированная установка мыслительной деятельности на отыскание различных способов достижения цели в отсутствие непосредственного указания на это, способность осуществлять мысленное преобразование объекта, находить различные его черты. Развитый вариативный компонент в мышлении есть показатель его гибкости, самостоятельности, творческих возможностей и умения генерировать новые знания.

Другой распространенный в психологии термин – дивергентное (от лат. divergere – расходиться) мышление, которое «заключается в поиске множества решений одной и то йже проблемы». Дополнением к нему служит так называемое конвергентное (от лат. convergere - сходиться)мышление, которое «основано на стратегии точного использования предварительно усвоенных алгоритмов решения определенной задачи, т.е. когда дана инструкция по последовательности и содержанию элементарных операций по решению этой задачи» [18]. Разработаны специальные тесты на дивергентные способности, где от испытуемого требуется найти как можно больше разнообразных практических применений ряда повседневных предметов, таких как кирпич, ведро, веревка, полотенце и др. Иногда подобные задания включаются в общие тесты способностей и креативного мышления, например, при приеме на работу в некоторые компании. Далее дивергентной мы будем называть задачу, обладающую хотя бы одним из следующих свойств:

- наличие разных способов решения (при этом важно, чтобы каждый новый способ отличался по своей идее и не был искусственным или неоправданно трудным по сравнению с другими);

- возможность различных трактовок условия или требования задачи, присутствие в них неоднозначности;

- возможность интерпретации представленных в задаче объектов и явлений в нескольких формах, при помощи разных моделей, включения задачи в разный контекст.

В настоящее время чрезвычайно востребованы навыки поиска новых, с первого взгляда неочевидных, путей выхода из какой-либо проблемы, сравнения возможных вариантов действий, анализа их последствий, умение принимать оптимальное решение в условиях множественного выбора. В современном обществе с ситуациями, требующими всего перечисленного, приходится сталкиваться представителям самых разных профессий – инженеру и управленцу, врачу и юристу, страховому агенту и общественному деятелю. Так, известный отечественный математик Е. С. Вентцель, в статье о методологии современной прикладной математике, писала следующее: «Для того чтобы разобраться в сложном явлении, его надо рассмотреть с различных сторон, под разными углами зрения, пробовать, сравнивать результаты, обсуждать их, сопоставлять. Часто бывает полезно вернуться к модели и внести в нее исправления после того, как первый тур расчетов уже произведен. Более того, часто оказывается плодотворным своеобразный спор моделей, когда одно и то же явление описывается не одной, а несколькими моделями. Чрезвычайно важно выявить устойчивость результатов исследования (рекомендаций) по отношению к модели. Если выводы оказываются одними и теми же (приблизительно) при разных моделях, разных методах исследования, — это веское свидетельство в пользу их объективности. К сожалению, такие приемы пока еще мало распространены» [6]. Эти же слова можно в значительной мере отнести ко многим другим сферам человеческой деятельности. Вообще, привычка и способности к широкому и многоплановому восприятию действительности открывают новые горизонты, как в профессиональной деятельности, так и в личном мировосприятии всякого человека. Определяются эти способности как раз уровнем развития вариативного мышления.

Исходя из этого, становится понятна огромная важность целенаправленного развития данного типа мышления. Особенно если учесть то, как мало внимания обычно уделяется этому в школе, в том числе на уроках математики, где, к сожалению, нередко безраздельно властвует и навязывается единообразный образ мыслей и действия – «делай, как было показано», «решай по заданному образцу». Часто учащиеся просто не знают, что многие задачи можно решать совсем по-разному – в частности, с опорой на наглядные образы, за счет чего решения становятся проще и красивее. А изучаемые математические объекты часто допускают альтернативные интерпретации, позволяющие узнать много нового об их свойствах, выявить важные взаимосвязи и произвести обобщения. Всего этого на уроках зачастую вообще не показывают. Случается даже, что преподаватель вообще запрещает использовать какие-либо методы, кроме тех, что были показаны на занятиях. Такая ситуация особенно сильно ударяет по учащимся с ярко выраженными творческими способностями, у которых она подчас может полностью «убить» интерес к математике.

Приведем в связи с этим некоторые высказывания известного психолога Макса Вертгеймера, активно занимавшегося исследованием структуры и свойств «продуктивного мышления», в качестве противоположности которого он называет «слепое вспоминание, слепое применение чего-то заученного, старательное выполнение отдельных операций, неспособность увидеть всю ситуацию в целом, понять ее структуру и ее структурные требования». Вот как Вертгеймер описывает традиционное положение на уроках математики. «Обычно ученики покорно следят за этапами доказательства, которое демонстрирует им учитель. Они повторяют, заучивают их. Создается впечатление, что идет «обучение». Ученики обучаются? Да. Мыслят? Возможно. И в самом деле понимают? Нет.». И еще: «…особенно трогательно видеть, с каким упорством, с какой готовностью ученики иногда стремятся повторять слова учителя, как гордятся, если им удается точно воспроизвести заученное, решить задачу именно тем способом, которому их учили. Для многих в этом и состоит преподавание и обучение. Преподаватель учит «правильной» процедуре. Ученики заучивают ее и могут применить ее в рутинных случаях. Вот и все» [7].

Однако, не следует думать, что подвигнуть обычного человека к творческому подходу к задачам и рассмотрению их с разных сторон так уж легко. Скорее наоборот. Укоренившаяся привычка действовать в любой ситуации по определенному образцу, единому шаблону присуща большинству учащихся, и отучить их от этого бывает совсем непросто. «Но легче усвоить тысячу новых фактов в какой-нибудь области, чем новую точку зрения на немногие известные уже факты» писал Л. С. Выготский [9]. По этой причине лучше всего, если уже с довольно раннего возраста дети приучаются к разнообразию идей, вариантов и их свободному выбору. Изучение математики предоставляет как раз широкие возможности по развитию вариативных качеств мышления. Перечислим кратко основные из них.

- Рассмотрение различных способов решения одной и той же задачи, формирование привычки перед началом решения «проигрывать» мысленно возможные подходы к нему – сопоставлять их и выбирать оптимальный.

- Регулярное решение задач с неоднозначностью в условии, требующих рассмотрения нескольких возможных ситуаций, что обычно приводит и к нескольким вариантам ответа.

- Демонстрация возможности различных интерпретаций одного и того же математического объекта. Кстати, даже занимаясь математикой или ее преподаванием долгое время, случается не задумываться о тех или иных интерпретациях таких вроде бы знакомых понятий, о скрытых образах, стоящих за ними. Поэтому всякий раз, встретившись с новой задачей и решив ее, интересно задать и своим ученикам и себе вопрос, достигнуто ли неформальное понимание полученных результатов. Нельзя ли как-то совсем по-другому посмотреть на данную задачу? А что, если попробовать использовать другие обозначения, применить полученные результаты в ином контексте, в измененных условиях т. д.? Стоит объяснить, что даже самая привычная математическая формула есть запись некоторого утверждения на строго определенном языке и в другом контексте может обладать совершенно иной смысловой нагрузкой. Возьмем простейший пример – прямую пропорциональность, скажем, линейное уравнение $s = 2t$. Если в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости оно задает прямую, то в пространстве – уже плоскость, а если под t и s понимать полярные координаты точки на плоскости, то получится спираль Архимеда и т.д.

Таким образом, одним из основных средств развития вариативного мышления служит использование дивергентных задач. Поэтому остановимся на них подробнее.

Крупнейший германский педагог и методист XIX века Адольф Дистервег писал о том, что «Больше приносит пользы рассмотрение одного и того же вопроса с десяти различных сторон, чем десяти вопросов с одной стороны». Его позицию почти дословно разделяет другой выдающийся ученый и педагог XX века Д. Пойа, говоря, что «Лучше решить одну задачу несколькими методами, чем несколько задач - одним». И эти слова не утрачивают своей значимости с течением веков. При регулярном рассмотрении и сравнительном анализе различных способов решения одних и тех же математических задач формируются многие весьма важные в современном обществе умения, черты личности, креативное мышление, а также научное мировоззрение учащихся. Данный прием обучения весьма ценен с точки зрения, как самой математики, так и методики ее преподавания. Помимо собственно формирования вариативного компонента мышления он позволяет достигать и многих других важных целей в обучении. Рассмотрим некоторые из них по порядку.

Формирование целостного восприятия математики. Речь здесь идет о выявлении внутрипредметных взаимосвязей в математике, интеграции различных ее разделов и понятий, осознании их многообразия и единства одновременно.

Вообще, слабое понимание взаимосвязей между явлениями является весьма распространенной и часто недооцениваемой проблемой в обучении, как математике, так и любых других предметов. Причем происходит это на всех уровнях – от начальной школы до вуза. Слишком многие темы и понятия оказываются для учащихся своеобразными «вещами в себе», никак не соотносящимися в их сознании ни с предыдущим материалом, ни с повседневным опытом. Между тем, хотя бы общее понимание истинного места тех или иных явлений в мире, осознание их взаимосвязей с другими явлениями важно любому современному человеку. Только увидев явление как бы «с высоты» и «в объеме», рассмотрев его сущность и проявления с разных сторон, проведя их сопоставление, мы сможем сформировать для себя сколько-то определенное, объективное и неформальное представление о нем, и научиться обращаться с ним. «Мир наполнен двойственностью, вещами, которые неразрывно связаны друг с другом, но дают возможность посмотреть на мир с двух разных сторон. И вот такими двумя разными сторонами являются алгебра и геометрия» - пишет российский математик и педагог В. М. Тихомиров [32]. Даже в повседневной жизни, сталкиваясь с некоторой проблемой, нам часто не удается решить ее из-за неумения взглянуть на создавшееся положение под другим углом, изменить что-то в своем восприятии и найти свежие подходы. Эти же трудности испытывают и учащиеся, сталкиваясь с новой, незнакомой математической задачей. «Что имеется в виду в условии?», «На какую тему эта задача?», «Можно ли здесь использовать вот тот метод, который мы проходили две недели назад?».

Задача 1.1. Определить, какие значения может принимать выражение $x+3y$ на множестве переменных x, y, удовлетворяющих условию $x^2+xy+4y^2 \le 3$.

Вводя вспомогательную переменную $x+3y=a$, переходим к равносильной задаче отыскания всех значений a, при которых система $\begin{cases} x+3y=a \\ x^2+xy+4y^2 \le 3 \end{cases}$ имеет решения.

Первый способ (наиболее «прямой»). Рассматриваем взаимное расположение эллипса $x^2+xy+4y^2=3$ вместе с его внутренней частью и прямой $a=x+3y$, передвигающейся параллельно себе в зависимости от значений a. Система имеет решения в точности тогда, когда эта прямая находится в полосе между двумя положениями касания (рис. 1).

Эти последние найти нетрудно, подставив $x=a-3y$ во второе уравнение системы и потребовав выполнения условия единственности корня ($D=0$) квадратного уравнения $10y^2-5ay+a^2-3=0$. Получаем в итоге: $a \in \left[-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right]$.

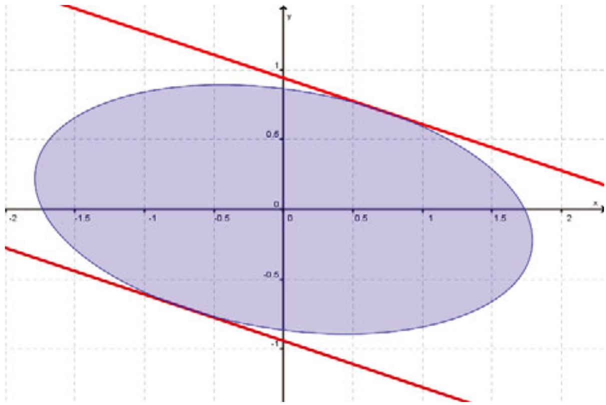


Рис. 1

Второй способ (наиболее простой). Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда полученное нами неравенство $10y^2 - 5ay + a^2 - 3 \le 0$ имеет решения. Учитывая, что ветви параболы $f(y) = 10y^2 - 5ay + a^2 - 3$ направлены вверх, это требование равносильно тому, что $D \ge 0$. Как видим, техника решения совершенно такая же, но идея и геометрический образ, стоящие за ней, иные – парабола вместо эллипса.

Представим теперь заданное условие в виде $\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y\sqrt{15}}{2}\right)^2 \le 3$. Произведя замену $\begin{cases} p = x + \frac{y}{2} \\ q = \frac{y\sqrt{15}}{2} \end{cases}$, выразим старые переменные: $\begin{cases} x = p - \frac{q}{\sqrt{15}} \\ y = \frac{2q}{\sqrt{15}} \end{cases}$ и подставим их в исходное выражение. Получим задачу нахождения области значений выражения $a = p + \frac{q\sqrt{15}}{3}$ на множестве $p^2 + q^2 \le 3$.

Третий способ. Сделанный переход позволяет снова применить рассуждения, использовавшиеся в первом способе решения, но уже на стандартном школьном материале – вместо эллипса теперь фигурирует окружность. В остальном ничего нового – ищем положения касания новых прямых с окружностью (рис. 2) и возвращаемся к старым переменным.

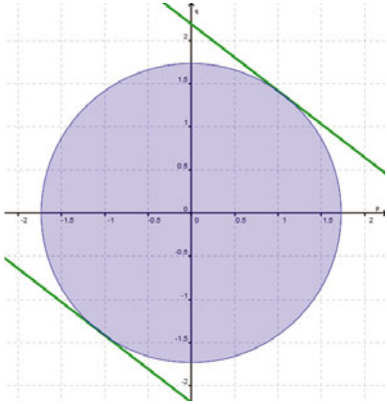


Рис. 2

Четвертый способ. Введем в рассмотрение векторы $\vec{m}(p;\, q)$ и $\vec{n}\left(1;\, \dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

Тогда $a = p + \dfrac{q\sqrt{15}}{3}$ есть их скалярное произведение, а условие $p^2 + q^2 \le 3$ выражает то, что длина вектора $\vec{m}$ не должна превосходить $\sqrt{3}$. Итак, надо найти возможные значения $\vec{m}\vec{n}$ при $|\vec{m}| \le 3$. Поскольку $\vec{m}\vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{m};|\vec{n}|}\right)$, $|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{8}{3}}$, а косинус угла между векторами может принимать любые значения от -1 до 1, то искомым множеством значений служит отрезок $a \in \left[\sqrt{3} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{3}} \cdot (-1);\ \sqrt{3} \cdot \sqrt{\dfrac{8}{3}} \cdot 1\right]$, то есть снова $a \in \left[-2\sqrt{2};\, 2\sqrt{2}\right]$. Очевидно, что геометрически границам этого отрезка соответствует ситуация, когда векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны (левая граница в случае, когда они противоположно направлены ($\cos \pi = -1$), правая – когда сонаправлены ($\cos 0 = 1$)). Таким образом, хотя здесь нам даже не потребовался чертеж, на сцене решения задачи появился совсем иной, по сравнению с предыдущими, геометрический образ – векторы и их взаимное расположение.

Пятый способ. Немного модифицируем сделанную выше замену, и рассмотрим границу заданной области, определяемую уравнением $\left(\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{y\sqrt{5}}{2}\right)^2=1$. Тогда существует такой угол $\gamma\in[0;\,2\pi)$, что $\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{y}{2\sqrt{3}}=\cos\gamma$ и $\frac{y\sqrt{5}}{2}=\sin\gamma$. Выражая отсюда x и y, находим, что $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos\gamma-\dfrac{\sin\gamma}{\sqrt{5}} \\ y=\dfrac{2\sin\gamma}{\sqrt{5}} \end{cases}$ и, подставив эти значения в исходное выражение, получим $a=\sqrt{3}\cos\gamma+\sqrt{5}\sin\gamma=\sqrt{8}\sin\left(\gamma+\arcsin\sqrt{3}\right)$. Множеством значений такого выражения является отрезок $a\in\left[-\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2};\ \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}\right]$, то есть $a\in\left[-2\sqrt{2};\,2\sqrt{2}\right]$. Можно проиллюстрировать это построением графика функции $a(\gamma)=\sqrt{8}\sin\left(\gamma+\arcsin\sqrt{3}\right)$ (рис. 3).

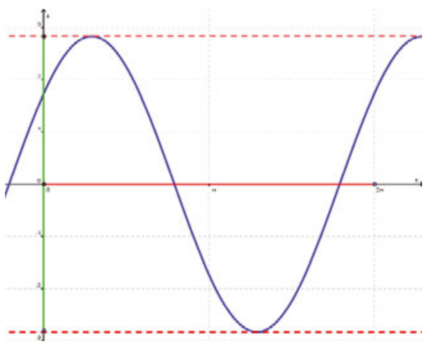


Рис. 3

Данный метод решения в целом алгебраический, но имеет выход и на наглядные представления – помимо, в общем-то, совсем необязательного, построения графика в конце, само использование тригонометрических функций всегда вызывает ряд геометрических ассоциаций.

Ответ: $\left[-2\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right]$.

Решив одну задачу разными способами, нередко удается выявить весьма неожиданные взаимосвязи, казалось бы, совсем далеких понятий и методов. Нередко возникает возможность сделать полезные и важные обобщения. Д. Пойа в своей книге «Как решать задачу» пишет о поисках новых подходов к уже решенной задаче следующее: «Рассматривая одну за другой различные части результата, смотря на них с различных точек зрения, мы можем, наконец, придти к тому, что весь результат в целом предстанет перед нами в новом свете» [25].

Вообще, само наличие целого веера или даже всего лишь двух-трех совсем разных решений одной и той же математической задачи всегда есть факт интересный, нетривиальный и способный создать дополнительную мотивацию к обучению. При этом многие задачи, казавшиеся до этого «сухими» и однообразными, наполняются жизнью, освещаясь с разных сторон и начиная блестеть множеством красок. Любые элементы удивления, неожиданности в обучении – это всегда надежные залоги интереса к нему. А нахождение принципиально нового пути решения задачи, особенно нестандартного, очень часто становится именно таким неожиданным, запоминающимся моментом. Увлечь может и сам процесс поиска и сопоставления разных решений, появляется желание думать над задачей, а не действовать только по шаблону. Известный психолог и специалист по личностно-ориентированному обучению И. С. Якиманская пишет, что «Познавательные способности характеризуются активностью субъекта, его возможностью выйти за пределы заданного, преобразовать его, используя для этого разнообразные способы» [40].

Посмотрим, например, какие визуальные образы и геометрические факты могут быть связаны с самым обычным квадратным уравнением. Скажем, $x^2+4x-12=0$.

1. Данное уравнение задает нули функции $y = x^2 + 4x - 12$, графиком которой является *парабола*.

2. Изображая множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют исходному уравнению, получим *две параллельные вертикальные прямыех=-6* и *х=2*.

Содержание пунктов *1* и *2*, может показаться совсем уж тривиальным. Однако попробуйте, скажем, предложить учащимся построить области, заданные неравенствами вроде таких: $(y - x^2 - x + 2)(x^2 - 4x + 3)^2 \geq 0$; $|y - x^2 + 4x|(x^2 + x - 2) > 0$ и $\frac{x^2 + x + 2}{2y + x + x^2} \leq 0$. Ошибок, связанных с непониманием того, в каких случаях здесь следует изображать параболу, а в каких – две прямые или что-то еще, обычно оказывается полным-полно.

3. Следующая группа образов связана с возможностью перенесения слагаемых из одной части уравнения в другую и нахождения точек пересечения уже двух новых функций. Например, записав данное уравнение в виде $x^2 = 12 - 4x$, мы приходим к задаче поиска точек пересечения параболы и прямой.

4.(Геометрическое выделение полного квадрата). Данный способ, по-видимому, так или иначе, использовался для решения квадратных уравнений в древнем мире. Представляя исходное равенство как $x^2 + 4x = 12$, изобразим его в виде, указанном на рис. 4. Маленькие квадратики здесь имеют сторону длиной 1, а высота фигур равна неизвестной величине *х*. «Приклеивая» к смежным сторонам квадрата по две «полоски», получаем фигуру, которую можно дополнить до квадрата, вклеив в уголок четыре недостающих единичных квадратика. Геометрически приходим к уравнению $(x + 2)^2 = 16$, откуда $x + 2 = \pm 4$, то есть *х=-6* или*х=2*.

Интересно еще бывает посмотреть вместе с учащимися, какие математические или практические задачи могут привести к заданному уравнению. При этом намечаются малознакомые, к сожалению, большинству школьников маршруты «от математической модели к проектированию реальной ситуации, которая бы ею описывалась» и «от алгебраической задачи к связанной с ней геометрической». Обычно намного более привычны обратные маршруты.

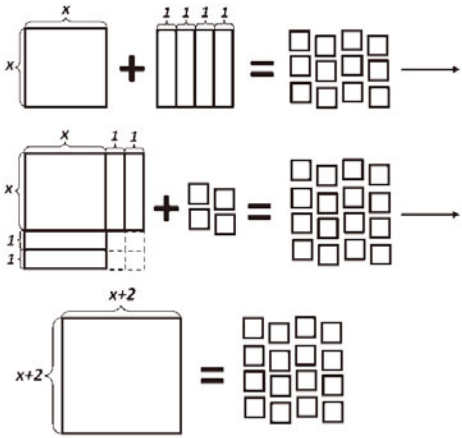


Рис. 4

5. К исходному уравнению можно придти, например, от уравнения, выражающего равенство отношений соответствующих сторон подобных треугольников: $\frac{x}{4}=\frac{3-x}{x}$ (рис. 5), – вот и еще один некоторым образом ассоциированный визуальный образ. А взяв уравнение $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}$, мы легко выходим на разговор о золотом сечении.

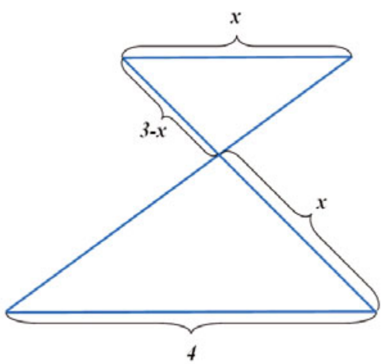


Рис. 5

6. Переместимся теперь на комплексную плоскость и рассмотрим на ней итерации квадратичного отображения $z_{n+1} \to z_n^2 + c$. При этом для каждого фиксированного значения параметра *c* все точки z_0 комплексной плоскости разбиваются на два множества. Первое состоит из точек, уходящих в бесконечность, то есть $|z_n| \to \infty$ при $n \to \infty$. Второе – из точек, стремящихся к некоторой *конечной* точке комплексной плоскости (аттрактору). Граница между этими множествами есть множество Жюлиа для данного значения параметра *c*. Множества Жюлиа выглядят весьма живописно и совершенно по-разному, в зависимости от *c*. Неподвижные относительно заданного отображения точки *z* есть корни квадратного уравнения $z = z^2 + c$ и они являются притягивающими и отталкивающими точками данного отображения. Подробнее об этих вопросах можно прочитать, например, в [23]. Для нас сейчас важно то, что обычное квадратное уравнение таким образом получает новое эффектное визуальное наполнение, – с ним ассоциируется некоторый квадратичный итератор на комплексной плоскости, точки неподвижные относительно него и соответствующее множество Жюлиа. Так уравнения $4z^2 - 4z - 5 = 0$ и $3z^2 - 3z + 1 = 0$ определяют неподвижные точки отображений $z_{n+1} = z_n^2 - 1{,}25$ и $z_{n+1} \to z_n^2 + \dfrac{1}{3}$ соответственно. Их множества Жюлиа представлены на рис. 6(а) и 6(б).

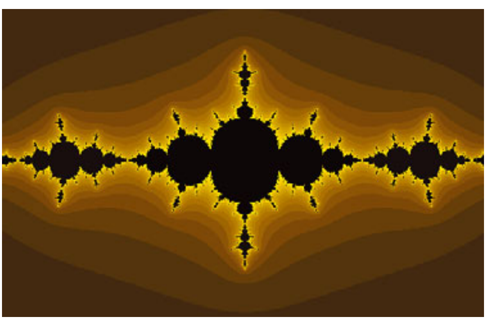


Рис.6(а)

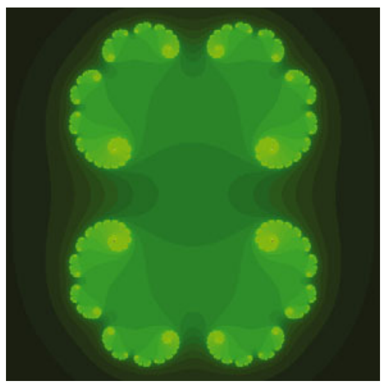


Рис.6(б)

Перечень таких геометрических ассоциаций к уравнению можно продолжить дальше. Может возникнуть мысль, что таким путем нетрудно притянуть к любой задаче слишком многое, даже слабо и лишь косвенно связанное с ней. Нам кажется, что подобные рассмотрения все-таки никогда не являются ненужной тратой времени, хотя, безусловно, следует сохранять чувство меры и вкуса. Часто на этом пути удается открыть новые грани в своем собственном понимании структуры и смысла различных математических понятий.

Результаты свежего взгляда на привычные вещи, рассмотрение их в другом контексте порой оказываются весьма неожиданными, значимыми и впечатляющими. В связи с этим интересно привести слова Бенуа Мандельброта. Говоря об исследованиях квадратичного отображения $z_{n+1} = z_n^2 - c$, он пишет, что несмотря на то, что для действительных значений c эти исследования были широко известны и до него, «но никто – и это поразительно – не стал заниматься их расширением на комплексную плоскость» [23]. Гениальная геометрическая интуиция Мандельброта дала ему возможность, рассмотрев с новой точки зрения этот простейший на вид алгебраический объект, казалось бы, не таящий в себе никаких интересных неизученных свойств, открыть целый океан новых фантастических образов. Таким образом, даже на передовых краях современной науки, оказываются возможными новые подходы к, казалось бы, давно изученным формулам, новые способы их графического восприятия, открывающие широкие горизонты для математического творчества.

Стимулирование интереса к математике. Поиск способов привлечения интереса и внимания учащихся к излагаемому материалу является важнейшей проблемой в преподавании как математики, так и других предметов. Именно нехватка заинтересованного, эмоционального отношения к учебе с одной стороны, и тщательного, вдумчивого - с другой, приводит к тому, что пройденные темы и методы усваиваются поверхностно, а забываются очень быстро. Одним из средств преодоления этих проблем является регулярное использование на уроках нестандартных задач и фактов, вызывающих эмоциональную реакцию у школьников и, тем самым, гораздо лучше