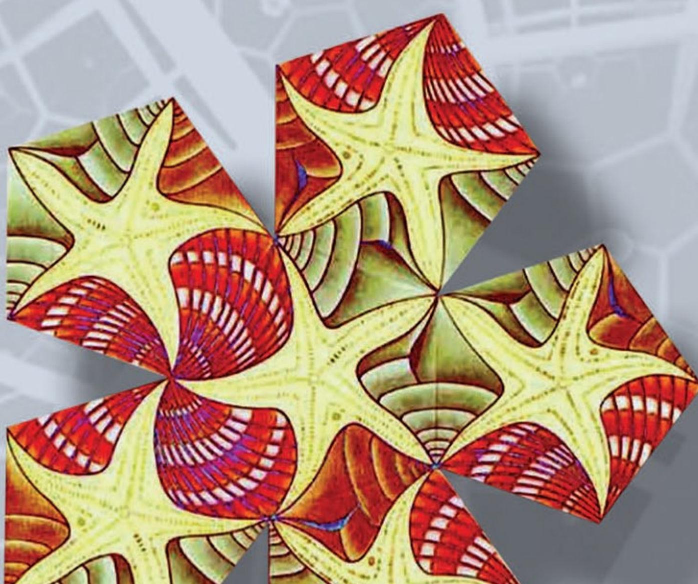
Н. С. ДЕНИСОВА
О. Ю. ТЕСЛЯ

ПОСТРОЕНИЕ ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ ВЕЙЛЯ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПРОМЕТЕЙ

УДК 514.01(075.8)
ББК 22.151.1я73
Д 332

Денисова, Наталья Серафимовна.

Д332 **Построение евклидовой геометрии на основе системы аксиом Вейля.** *Учебное пособие* / Н. С. Денисова, О. Ю. Тесля. – Москва: Прометей, 2016 – 82 с.

В учебном пособии на основе системы аксиом Вейля вводятся основные понятия и отношения евклидовой геометрии, доказываются основные теоремы евклидовой геометрии, связанные со взаимным расположением точек, прямых и плоскостей, а также теоремы, связанные с равенством отрезков и углов. Пособие содержит задачи с указаниями к решению, которые помогут освоить теоретические положения. Для студентов и магистрантов учреждений высшего профессионального образования, а также для желающих овладеть способом построения элементарной геометрии на основе аксиоматики Вейля.

ISBN 978-5-9907986-1-8

Содержание

Учебное пособие содержит задачи на доказательство, которые снабжены указаниями и позволяют студентам освоить теоретический материал.

В заключении обосновывается утверждение об эквивалентности системы аксиом Гильберта и системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.

Данное учебное пособие может быть использовано для проведения курса дисциплина по выбору «Построение евклидовой геометрии на основе аксиоматики Вейля», для написания курсовых работ и выпускных квалификационных работ студентами математического факультета педвуза. Это пособие может представлять интерес и для учителей математики.

§ 1. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства, ее непротиворечивость и полнота

1. Непустое множество V называется *векторным пространством* над полем вещественных чисел, а его элементы называются *векторами*, если заданы отображения f_1: $V \times V \to V$ (для любых двух векторов , $\vec{b} \in V$ вектор $f_1(\vec{a}, \vec{b})$ называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается $\vec{a} + \vec{b}$), и f_2: $\mathbb{R} \times V \to V$ (для любого вещественного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\vec{a}$ V вектор $f_2(\lambda, \vec{a})$ называется *произведением числа* λ *на вектор* и обозначается $\lambda\vec{a}$). Отображения f_1 и f_2 удовлетворяют аксиомам сложения векторов $\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_4$ и аксиомам произведения вектора на число $\mathrm{II}_1 - \mathrm{II}_4$ (см. [7] § 6.1).

Векторное пространство V, называется *евклидовым векторным пространством*, если в нем задано отображение g: $V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим условиям:

III_1. Для любых векторов $\overrightarrow{a}$ и $g(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{b}, \overrightarrow{a})$

III_2. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ $g(\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}) = g(\vec{a}, \vec{b}) + g(\vec{c}, \overrightarrow{b})$;

III_3. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого вещественного числа λ

$g(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda\, g(\vec{a}, \vec{b})$.

III_4. Для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ $g(\vec{a}, \vec{a}) > 0$.

Из этих условий следует, что $g(\vec{0}, \vec{0}) = 0$.

Значение $g(\vec{a}, \vec{b})$ на любой паре векторов и $\vec{b}$ называется *скалярным произведением* векторов и $\vec{b}$. Будем обозначать скалярное произведение векторов и $\vec{b}$ так: $\vec{b}$.

Длиной вектора $\vec{a}$ называется число $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}}$. Векторы $\vec{a}$ и называются *перпендикулярными*, если скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно нулю, т.е. $\vec{a}\,\vec{b} = 0$.

Евклидово векторное пространство называется *n-мерным* и обозначается V_n, если выполняются две аксиомы:

IV_1. В векторном пространстве V существует линейно независимая система, состоящая из n векторов.

IV_2. В векторном пространстве V любая система, состоящая из n+1 векторов, линейно зависима.

Базисом n-мерного векторного пространства называется упорядоченная система n линейно независимых векторов. *Координатами вектора* в данном базисе называются коэффициенты разложения вектора по векторам базиса.

Базис евклидова векторного пространства называется *ортонормированным*, если длины всех базисных векторов равны 1 и любые два базисных вектора перпендикулярны.

В трехмерном евклидовом векторном пространстве V_3 имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1. *В трехмерном евклидовом векторном пространстве V_3 существует хотя бы один ортонормированный базис, который будем обозначать так*: $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Теорема 1.2. *Если в трехмерном евклидовом векторном пространстве V_3 даны два вектора $\vec{\imath}$ и $\vec{\jmath}$, длины которых равны единицы и которые перпендикулярны, то существует такой вектор $\vec{k}$, что базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ортонормированный.*

Теорема 1.3. *Если в трехмерном евклидовом векторном пространстве V_3 дан вектор $\vec{\imath}$, длина которого равна единицы, то существует такие векторы $\vec{\jmath}$ и $\vec{k}$, что базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ ортонормированный.*

В двумерном евклидовом векторном пространстве V_2 имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.4. *В двумерном евклидовом векторном пространстве V_2 существует хотя бы один ортонормированный базис, который будем обозначать так*: $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Теорема 1.5. *Если в двумерном евклидовом векторном пространстве V_2 дан вектор $\vec{\imath}$, длина которого равна единицы, то существует такой вектор $\vec{\jmath}$, что базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ортонормированный*.

Докажем, что для любых двух ненулевых векторов и

–1 —— 1, или —— 1 или $(\vec{a}\vec{b})^2$ ^{2} ^{2}. Для этого

рассмотрим ортонормированный базис $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ и найдем координаты векторов $\vec{a}$ и в этом базисе $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$. Легко проверить, что $(\vec{a}\vec{b})^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$,

^{2} $^2 + a_2^2 + a_3^2,$ $\vec{}^{\,2} =$ $+$ $+ b$.

По неравенству Коши-Буняковского имеем:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^{\,2} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\,2} \quad ,$$

откуда $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \quad (a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2})(b_1^{\,2} + b_2^{\,2} + b_3^{\,2})$,

а значит $(\vec{a}\vec{b})^2 \quad {}^{2}\ {}^{2}$ и -1 —— 1. Из этого следует, что для любых двух ненулевых векторов и $\vec{b}$ существует такое вещественное число φ, что $\cos\varphi =$ —— . Это число φ назовем величиной угла между ненулевыми векторами и $\vec{b}$.

Из этого следует, что два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол между ними равен π/2.

Непустое подмножество L_m векторного пространства V_{n} называется его *векторным подпространством*, если L_m – m-мерное векторное пространство.

Два *векторных подпространства* L_m и L_p векторного пространства V_{n} называются *перпендикулярными*, если любые ненулевые векторы $\vec{a} \in L_m$ и $\vec{b} \in L_p$ перпендикулярны.

Дано n-мерное ($n = 2, 3$) евклидово векторное пространство V_{n} над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел и непустое множество E_{n}, элементы которого называются *точками*.

Непустое множество E_{n} называется *n-мерным евклидовым пространством*, если задано отображение f: $E_{\text{n}} \times E_{\text{n}} \to V_{\text{n}}$ (вектор $f(M, N)$ будем обозначать $\overrightarrow{MN}$), удовлетворяющее следующим двум *аксиомам Вейля*:

I. Для любой точки M из множества E_{n} и любого вектора $\vec{p}$ из векторного пространства V_{n} существует единственная точка N из множества E_{n} такая, что $\overrightarrow{MN} = \vec{p}$.

II. Для любых трех точек M, N, P из множества E_n выполняется равенство $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

При $n = 3$ евклидово пространство E_3 называется *трехмерным евклидовым пространством,* при $n = 2$ евклидово пространство E_2 называется двумерным евклидовым пространством или *евклидовой плоскостью*.

Будем обозначать евклидово n-мерное пространство, определенное с помощью аксиоматики Вейля так: $E_n(W)$.

Свойства евклидова пространства

1°) *Для любой точки* $M \in E_n$

□ Из определения V_n следует, что существует вектор $\vec{p}$

Тогда из первой аксиомы Вейля следует, что существует точка

такая, что $= \vec{p}$. И для трех точек $M,$

(вторая аксиома Вейля). Тогда $\vec{p}$.

Следовательно, $\vec{0}$. ■

2°) *Если* *то* N.

□ Пусть $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$. По первому свойству $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$. Тогда из единственности точки в первой аксиомы Вейля следует, что

N. ■

3°) *Для любых двух точек*

□ Рассмотрим три точки тогда из второй аксиомы Вейля следует:

$M\vec{M}$. Из этого равенства по первому свойству следует, что Следовательно, $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$. ■