МАТЕМАТИКА

2017 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

задача 19

Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич,
С. Е. Рукшин, К. М. Столбов,
И. В. Ященко

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ФГОС

УДК 373:51
ББК 22.1я72
В72

Авторы:
Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,
К. М. Столбов, И. В. Ященко

Вольфсон Г. И. и др.
В72 ЕГЭ 2017. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2017. — 112 с.

ISBN 978-5-4439-1089-5

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2017. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 19.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

ISBN 978-5-4439-1089-5

Диагностическая работа

1. На какие числа может быть сокращена дробь $\frac{2n+6}{3n+10}$, где n — натуральное число?

2. Дано натуральное число n. Его умножили на число m, полученное из n перестановкой цифр. Могло ли при этом получиться число 27812754?

3. Докажите, что число $21^{2012}+439^{2011}$ делится на 440.

4. Докажите, что если к произвольному трёхзначному числу приписать справа его же, то полученное шестизначное число будет делиться на 13.

5. НОК двух натуральных чисел в 7 раз больше, чем их НОД. Во сколько раз сумма этих чисел больше, чем их НОД?

6. Найдите все 4-значные чётные числа, у которых ровно 22 делителя.

7. Решите уравнение в целых числах: $x^2+10xy-5^y=3$.

8. Даны две группы натуральных чисел. В первой группе 3 числа и их среднее арифметическое равно 8, а во второй — 2 числа и их среднее арифметическое равно 13. Может ли произведение всех пяти данных чисел быть равным 100000?

9. Решите уравнение в целых числах: $5^n+12^n=13^n$.

10. Какое наибольшее количество членов может быть в арифметической прогрессии, все члены которой — натуральные числа, если известно, что каждый следующий член этой прогрессии не менее чем в полтора раза больше предыдущего?

Решения задач диагностической работы

1. Пусть эта дробь сократима на целое число d, большее 1. Тогда $(2n+6) \vdots d$ и $(3n+10) \vdots d$. Поэтому по свойствам делимости $2(3n+10)-3(2n+6) \vdots d$, т. е. $2 \vdots d$. Следовательно, d может быть равно только 2. Осталось подобрать хотя бы одно значение n, при котором дробь сократима на 2. Для этого достаточно выбрать любое чётное значение n.

Ответ. 2 (при чётных n).

2. Заметим, что 27812754 делится на 27, но не делится на 81. Разберём два случая.

1) Число n делится на 9. Значит, сумма цифр числа n делится на 9. Тогда и m делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n: эти числа отличаются лишь перестановкой цифр, а сами цифры — одни и те же. В этом случае произведение mn должно делиться на 81, а оно на 81 не делится.

2) Число n не делится на 9. Значит, сумма цифр числа n не делится на 9. Тогда и m не делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n. В этом случае произведение mn делится не более чем на вторую степень тройки, а оно делится на 27.

В каждом из случаев пришли к противоречию, значит, число 27812754 получиться не могло.

Ответ. Нет.

3. Решение 1.

1) Рассмотрим первое слагаемое: $21^{2012}=441^{1006}$. Так как $441 = 440+1$, то $441^{1006}=(440+1)^{1006}=440\cdot k+1$.

2) Рассмотрим второе слагаемое: $439^{2011}=(440-1)^{2011}=440\cdot n-1$.

3) Из п. 1, 2 получаем: $21^{2012}+439^{2011}=440\cdot k+1+440\cdot n-1 = 440\cdot(n-k)$, т. е. это выражение делится на 440, что и требовалось доказать.

Решение 2.

1) Рассмотрим первое слагаемое: $21^{2012}=441^{1006}$. Так как $441 \equiv 1 \pmod{440}$, то $441^{2012}\equiv 1^{2012}\equiv 1 \pmod{440}$.

2) Рассмотрим второе слагаемое. Так как $439\equiv -1 \pmod{440}$, то $439^{2011}\equiv(-1)^{2011}\equiv -1 \pmod{440}$.

3) Из п. 1, 2 получаем: $21^{2012}+439^{2011}\equiv 1-1\equiv 0 \pmod{440}$, что и требовалось доказать.

4. Пусть данное трёхзначное число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда после приписывания получится число $\overline{abcabc}$. Это число можно представить в виде $1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$. Значит, это шестизначное число делится на 1001, а так как 1001 делится на 13, то и шестизначное число делится на 13, что и требовалось доказать.

5. Обозначим данные в условии задачи натуральные числа через x, y, а их НОД — через d. Тогда исходные числа можно представить в виде kd и nd, где $\text{НОД}(k, n) = 1$. В этом случае

$$\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)} = \frac{nd \cdot kd}{d} = knd.$$

Из условия следует, что $\text{НОК}(x, y) = 7 \cdot \text{НОД}(x, y)$, из чего с учётом введённых обозначений следует, что $knd = 7d$, $kn = 7$. Произведение двух натуральных чисел может быть равно 7 в том и только в том случае, если это числа 1 и 7, а значит, исходные числа равны d и $7d$. Тогда их сумма равна $8d$, т. е. она в 8 раз больше, чем их НОД.

Ответ. 8.

6. По формуле количества делителей числа (см. с. 34) можно представить 22 в виде произведения скобок вида $(k_i + 1)$, где k_i — натуральный показатель степени простого делителя, входящего в каноническое разложение исходного числа. Таких скобок может быть либо одна (само число 22), либо две (числа в них будут равны 2 и 11), а в виде произведения трёх и более натуральных чисел, больших 1, число 22 представить невозможно. Разберём эти два случая.

1) Пусть есть всего одна скобка. Значит, $k_1 + 1 = 22$, и тогда искомое число имеет вид p^{21}, где p — простое число. Искомое число по условию чётно, следовательно, $p = 2$, но в числе 2^{21} больше 4 цифр. Следовательно, в этом случае решений нет.

2) Пусть произведение состоит из двух скобок, равных 2 и 11. Тогда в разложении искомого числа присутствуют ровно два простых числа, степени которых равны 1 и 10. Известно, что одним из простых сомножителей должно быть число 2, значит, искомое число имеет вид $2 \cdot p^{10}$ или $2^{10} \cdot p$, где p — простое число, не равное 2. Первый случай не подходит, так как даже при наименьшем возможном значении p, равном 3, число $2 \cdot 3^{10}$ не является четырёхзначным. Во втором же случае нужно отобрать все такие простые числа p, не равные 2, что $1024p$ — четырёхзначное число. Последовательно убеждаемся, что числа 3, 5 и 7 подходят, а 11 — уже нет.

Следовательно, искомые числа — $2^{10} \cdot 3$, $2^{10} \cdot 5$ и $2^{10} \cdot 7$, т. е. 3072, 5120 и 7168.

Ответ. 3072, 5120 и 7168.

7. Разберём три случая для переменной y.

1) Если число y отрицательно, то 5^y — нецелое, а все остальные слагаемые в левой части — целые, а значит, сумма целой быть не может. Поэтому в этом случае решений нет.

2) Если $y=0$, то $x^2=4$, $x=\pm 2$.

3) Если число y положительно, то, перенося из левой части второе и третье слагаемые вправо, получаем $x^2=5^y-10xy+3$.

Заметим, что 5^y оканчивается на 5, $10xy$ — на 0, а значит, сумма в правой части равенства оканчивается на 8. Но тогда и x^2 должен оканчиваться на 8, а квадраты натуральных чисел на 8 не оканчиваются. Следовательно, в этом случае решений нет.

Ответ. $(-2; 0)$, $(2; 0)$.

8. Обозначим числа первой группы через a_1, a_2, a_3, а числа второй группы — через a_4, a_5. По условию $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}=8$, а значит, $a_1+a_2+a_3=24$. Аналогично $\frac{a_4+a_5}{2}=13$, $a_4+a_5=26$. По неравенству о средних

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5} \geqslant \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5},$$

т. е.

$$\sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5} \leqslant \frac{50}{5}, \quad a_1a_2a_3a_4a_5 \leqslant 100000.$$

Если же $a_1a_2a_3a_4a_5=100000$, то в неравенстве о средних достигается равенство, что возможно только в том случае, когда $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$. Но тогда средние арифметические первого и второго наборов должны совпадать, что не соответствует условию задачи. Значит, произведение данных чисел не может быть равным 100000.

Ответ. Нет.

9. Заметим, что $n=2$ — решение данного уравнения. При увеличении переменной на 1 правая часть уравнения увеличивается в 13 раз, а левая — менее чем в 12, так как $5^{n+1}+12^{n+1}<12(5^n+12^n)$. Следовательно, при $n>2$ решений нет.

Аналогично, если уменьшить значение переменной на 1, то правая часть уменьшится в 13 раз, а левая — менее чем в 12 раз. Следовательно, и при $n<2$ решений нет.

Ответ. 2.

10. Докажем от противного, что в искомой прогрессии не более 3 членов. Пусть искомая прогрессия состоит хотя бы из четырёх членов и имеет вид $a_1, a_2, \ldots$, а её разность равна d. Тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$. Из условия следует, что $\dfrac{a_4}{a_3} \geqslant 1{,}5$, $a_4 \geqslant 1{,}5a_3$, или $a_1 + 3d \geqslant 1{,}5a_1 + 3d$, $0 \geqslant 0{,}5a_1$ — что противоречит тому, что a_1 — натуральное число.

Следовательно, в прогрессии не более трёх членов.

Осталось привести пример прогрессии, состоящей из трёх членов и удовлетворяющей условию задачи. Таким примером может служить прогрессия $\{1; 2; 3\}$.

Ответ. 3.

§1. Делимость и её свойства. Признаки делимости

Диагностическая работа 1

1. Число $\overline{134*}$ кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки? (Перечислите все возможные варианты.)

2. Делится ли число 314567891 на 11?

3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число $314159*6$ кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)

4. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?

5. Сумма и произведение двух натуральных чисел кратны 136. Докажите, что квадрат каждого из них кратен 136.

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Определение. Число a делится на число $b \neq 0$, если существует такое число c, что $a = bc$.

Обозначение: $a \vdots b$.

Свойства делимости

1. Если a делится на b, то для любого числа k число ka делится на b.
2. Если a делится на c и b делится на c, то сумма, разность и произведение чисел a и b делится на c.
3. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.
4. Если a делится на c и b делится на d, то ab делится на cd.

Признаки делимости для десятичной записи числа

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 3, как и само число.

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 9, как и само число.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11 (например, число 305792608 делится на 11, так как $(8+6+9+5+3)-(0+2+7+0)=22$ делится на 11).

Простые и взаимно простые числа

Определение. Натуральное число, отличное от 1, называется простым, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого.

Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными.

Важно! Единица не является ни простым, ни составным числом.

Определение. Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются взаимно простыми.

Если число a делится на числа b и c, причём числа b и c взаимно просты, то число a делится на их произведение bc. Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел (а именно: если число a делится на каждое из n чисел, причём любые два числа из данных n чисел взаимно просты, то число a делится на произведение данных n чисел).

1.1. Свойства делимости

Примеры решения задач

1. Найдите все такие $a\in\mathbb{N}$, что $\dfrac{2a+1}{a-2}$ — целое число.

Решение. Если число $\dfrac{2a+1}{a-2}$ целое, то это равносильно тому, что $2a+1 \,\vdots\, a-2$. Тогда и разность этих чисел тоже будет делиться на $a-2$: $(2a+1)-(a-2) \,\vdots\, a-2$, $a+3 \,\vdots\, a-2$. Но и разность этих чисел тоже должна делиться на $a-2$: $(a+3)-(a-2) \,\vdots\, a-2$, $5 \,\vdots\, a-2$. Значит, $a-2$ — делитель числа 5. Но у 5 не так много делителей — это $1, 5, -1, -5$.

Содержание