

# МАТЕМАТИКА

# 2017

Под редакцией И. В. Яценко

# ЕГЭ

профильный уровень

**ЗАДАЧА 18**

С. А. Шестаков

## ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

**ФГОС**

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
Ш51

**Шестаков С. А.**

Ш51 ЕГЭ 2017. Математика. Задачи с параметром. Задача 18 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2017. — 288 с.

ISBN 978-5-4439-1088-8

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2017. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 18.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по темам «Уравнения и системы уравнений», «Неравенства и системы неравенств», «Задачи с параметром».

По сравнению с прошлым годом книга существенно доработана и дополнена.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует новому Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

*Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.*

ISBN 978-5-4439-1088-8

© Шестаков С. А., 2017.  
© МЦНМО, 2017.

## Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром и нестандартных задачах

Эта глава посвящена своего рода знакомству с уравнениями, неравенствами и их системами, содержащими параметры: здесь представлены задачи, для решения которых не требуются какие-то специальные знания, алгоритмы или идеи — достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений и неравенств, умения выполнять стандартные алгебраические преобразования и делать не слишком сложный и разветвлённый логический перебор. Так, например, уравнение  $(a^2 - a)x^2 + 2ax - 3a^2 + 4a = 0$  при  $a = 1$  является линейным уравнением  $2x + 1 = 0$  с единственным корнем  $x = -0,5$ ; при  $a = 0$  обращается в тождество  $0 = 0$ , которое выполняется при любом значении  $x$  (это означает, что корнем данного уравнения при  $a = 0$  является любое действительное число); при значениях  $a$ , отличных от 0 или 1, данное уравнение является квадратным и либо не имеет действительных корней (если дискриминант уравнения отрицателен), либо имеет один корень (если дискриминант уравнения равен нулю), либо имеет два корня (при положительном дискриминанте). Уже из приведённого примера ясно, что для успешного решения подобных задач требуются наряду с базовыми навыками решения линейных и квадратных уравнений внимательность и скрупулёзность при анализе условия и логическом переборе возможных значений параметра.

### § 1.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром

К числу самых простых задач с параметром относятся линейные уравнения и неравенства, а также их системы. Любое линейное уравнение с параметром может быть сведено к виду  $f(a) \cdot x = g(a)$ , а неравенство — к виду  $f(a) \cdot x \vee g(a)$  (здесь  $a$  — параметр,  $f(a)$  и  $g(a)$  — алгебраические выражения, « $\vee$ » — один из четырёх возможных знаков неравенств: « $>$ », « $<$ », « $\geq$ », « $\leq$ »). Такой вид линейного уравнения (неравенства) с параметром будем называть стандартным. Линейные уравнения и неравенства после приведения к стандартному виду обычно решаются с помощью логического перебора. В некоторых задачах, прежде чем перейти к исследованию линейного уравнения или неравенства, необходимо сделать замену переменной.

Для того чтобы ответить на вопрос о числе корней уравнения  $f(a) \cdot x = g(a)$  (и при необходимости найти эти корни), достаточно рассмотреть два случая: 1)  $f(a) = 0$ ; 2)  $f(a) \neq 0$ . В первом случае число корней уравнения зависит от  $g(a)$ : если  $f(a) = 0$ , а  $g(a) \neq 0$ , то корней нет; если  $f(a) = 0$  и  $g(a) = 0$ , уравнение принимает вид  $0 \cdot x = 0$ , и его корнем является любое действительное число. Во втором случае уравнение имеет единственный корень  $x = \frac{g(a)}{f(a)}$ .

Для ответа на вопрос о решениях неравенства  $f(a) \cdot x < g(a)$  нужно рассмотреть три случая: 1)  $f(a) > 0$ ; 2)  $f(a) < 0$ ; 3)  $f(a) = 0$ . В первом случае при делении обеих частей неравенства на положительное число  $f(a)$  знак неравенства не меняется, и тогда  $x < \frac{g(a)}{f(a)}$ , т. е. решение неравенства — промежуток  $\left(-\infty; \frac{g(a)}{f(a)}\right)$ . Во втором случае при делении обеих частей неравенства на отрицательное число  $f(a)$  знак неравенства меняется на противоположный, и тогда  $x > \frac{g(a)}{f(a)}$ , т. е. решение неравенства — промежуток  $\left(\frac{g(a)}{f(a)}; +\infty\right)$ . В третьем случае получаем неравенство  $0 \cdot x < g(a)$ , и если  $g(a) \leq 0$ , то решений нет, если же  $g(a) > 0$ , то решением неравенства является любое действительное число. Исследование неравенств  $f(a) \cdot x > g(a)$ ,  $f(a) \cdot x \leq g(a)$  и  $f(a) \cdot x \geq g(a)$  проводится аналогично (каждый раз рассматриваются три случая: 1)  $f(a) > 0$ ; 2)  $f(a) < 0$ ; 3)  $f(a) = 0$ ).

При решении линейных уравнений и неравенств с параметрами следует помнить и о графической интерпретации линейного уравнения или неравенства с двумя переменными: при каждом конкретном значении параметра  $a$  (для которого хотя бы одно из чисел  $f(a)$  или  $g(a)$  отлично от нуля) уравнение  $f(a)x + g(a)y = p(a)$  является уравнением прямой на плоскости  $Oxy$ , а неравенство  $f(a)x + g(a)y > p(a)$  задаёт на плоскости  $Oxy$  множество всех точек, расположенных выше или ниже (в зависимости от значения параметра) этой прямой. При этом нужно понимать, что при некоторых значениях параметра такое уравнение или неравенство может либо выполняться для любых  $x$  и  $y$ , либо не иметь решений вовсе.

**Пример 1.** Найдите все пары чисел  $(a; b)$ , для каждой из которых имеет не менее трёх корней уравнение

$$(a - 2)x + b(x - 2) = (2b - 1)x + (2x - 1)a.$$

**Решение.** Степень переменной  $x$  в каждой из частей данного уравнения равна 1. Значит, это уравнение является линейным от-

носителем  $x$ , и его можно привести к стандартному виду. Для этого раскроем скобки в обеих частях уравнения и запишем его в виде  $(a - 2 + b - 2b + 1 - 2a)x = 2b - a$ , откуда  $(a + b + 1)x = a - 2b$ . Если  $a + b + 1 \neq 0$ , уравнение имеет единственный корень  $x = \frac{a - 2b}{a + b + 1}$ . Если  $a + b + 1 = 0$ , но  $a - 2b \neq 0$ , уравнение не имеет корней. Если

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0, \\ a - 2b = 0, \end{cases}$$

уравнение принимает вид  $0 \cdot x = 0$  и его корнем является любое действительное число. Значит, не менее трёх корней уравнение имеет только в последнем случае. Решив систему, получим  $a = -\frac{2}{3}$ ,  $b = -\frac{1}{3}$ .

*Ответ:*  $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Пример 2.** При каждом значении параметра  $a$  решите неравенство

$$2xa^2 - (5x + 2)a + 2x + 1 \geq 0.$$

**Решение.** Данное неравенство является линейным относительно переменной  $x$ . Раскроем скобки, перегруппируем слагаемые и приведём его к стандартному виду:  $(2a^2 - 5a + 2)x \geq 2a - 1$ . Корнями квадратного трёхчлена в левой части полученного неравенства являются числа  $a = 0,5$  и  $a = 2$ , поэтому, разложив этот трёхчлен на линейные множители, придём к неравенству  $(2a - 1)(a - 2)x \geq 2a - 1$ . Коэффициент при переменной в левой части неравенства в зависимости от значений параметра может быть равен нулю, положителен или отрицателен. Рассмотрим все возможные случаи. Если  $a = 0,5$ , неравенство принимает вид  $0 \cdot x \geq 0$  и выполняется при любом значении переменной  $x$ . Если  $a = 2$ , неравенство принимает вид  $0 \cdot x \geq 3$  и не выполняется ни при каких значениях  $x$ . Если  $(2a - 1)(a - 2) > 0$ , т. е.  $a \in (-\infty; 0,5) \cup (2; +\infty)$ , то, разделив обе части неравенства на положительное число  $(2a - 1)(a - 2)$  и сократив дробь в правой части, получим  $x \geq \frac{1}{a - 2}$ , т. е.  $x \in \left[\frac{1}{a - 2}; +\infty\right)$ . Если  $(2a - 1)(a - 2) < 0$ , т. е.  $a \in (0,5; 2)$ , то, разделив обе части неравенства на отрицательное число  $(2a - 1)(a - 2)$  и сократив дробь в правой части, получим  $x \leq \frac{1}{a - 2}$ , т. е.  $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a - 2}\right]$ .

*Ответ:*  $\left[\frac{1}{a - 2}; +\infty\right)$  при  $a \in (-\infty; 0,5) \cup (2; +\infty)$ ;  $(-\infty; +\infty)$  при  $a = 0,5$ ;  $\left(-\infty; \frac{1}{a - 2}\right]$  при  $a \in (0,5; 2)$ ; нет решений при  $a = 2$ .

**Пример 3.** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых имеет не менее семи решений система уравнений

$$\begin{cases} (3a^2 - 13a)x + 8y = 3a^2 - 16a - 8, \\ 5x + 4y = 2. \end{cases}$$

**Решение.** Каждое уравнение системы является уравнением прямой на плоскости  $Oxy$ . Эти прямые либо параллельны (тогда они не имеют общих точек и, следовательно, система не имеет решений), либо пересекаются в одной точке (тогда система имеет единственное решение), либо совпадают (тогда система имеет бесконечно много решений). Не менее семи решений система будет иметь только в последнем случае. Напомним, что если  $a_2 \neq 0$ ,  $b_2 \neq 0$ ,  $c_2 \neq 0$ , то две прямые  $a_1x + b_1y = c_1$  и  $a_2x + b_2y = c_2$  совпадают в том и только том случае, если соответствующие коэффициенты пропорциональны, т. е. если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ . Таким образом,  $\frac{3a^2 - 13a}{5} = \frac{8}{4} = \frac{3a^2 - 16a - 8}{2}$ . Решив уравнение  $\frac{3a^2 - 13a}{5} = 2$ , получим  $a = 5$  или  $a = -\frac{2}{3}$ . Решив уравнение  $\frac{3a^2 - 16a - 8}{2} = 2$ , получим  $a = 6$  или  $a = -\frac{2}{3}$ . Единственным общим корнем этих уравнений является  $a = -\frac{2}{3}$ .

Ответ:  $a = -\frac{2}{3}$ .

Иногда уравнение или неравенство можно свести к линейному с помощью замены переменной. Сделав замену переменной, нужно обязательно переформулировать задачу, ведь новая переменная во многих случаях принимает значения только из определённого множества. Например, при замене  $t = \cos x$  придётся учитывать, что переменная  $t$  может принимать значения только из отрезка  $[-1; 1]$ ; при замене  $t = \log_5(x^2 + 5)$  — только из промежутка  $[1; +\infty)$  и т. д. Переформулировка задачи для новой переменной в таких случаях является значимой частью решения.

**Пример 4.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} 12 \cos^2 x + 5 \cos^2 y + 11 = 6a, \\ 15 \cos^2 x + 4 \cos^2 y + 25 = 12a. \end{cases}$$

**Решение.** Данная система является системой линейных уравнений относительно  $u = \cos^2 x$  и  $v = \cos^2 y$ . Ясно, что  $u \in [0; 1]$ ,  $v \in [0; 1]$ . Задачу можно переформулировать так: найти все значения парамет-

ра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 12u + 5v + 11 = 6a, \\ 15u + 4v + 25 = 12a \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условиям  $u \in [0; 1]$ ,  $v \in [0; 1]$ . Поскольку коэффициенты при переменных не зависят от параметра, проще всего найти решение системы в общем виде. Умножим обе части первого уравнения на  $-4$ , обе части второго уравнения на  $5$  и рассмотрим почленную сумму полученных уравнений:  $-48u + 75u - 44 + 125 = -24a + 60a$ , откуда  $u = \frac{4a-9}{3}$ . Аналогично, умножив обе части первого уравнения на  $5$ , обе части второго уравнения на  $-4$  и рассмотрев почленную сумму полученных уравнений, после необходимых преобразований найдём  $v = 5 - 2a$ . Условия  $u \in [0; 1]$ ,  $v \in [0; 1]$  выполняются в том и только том случае, если

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{4a-9}{3} \leq 1, \\ 0 \leq 5-2a \leq 1. \end{cases}$$

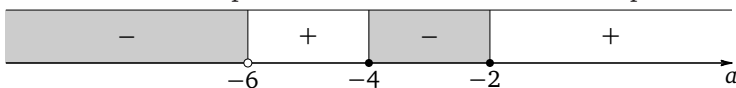
Из первого неравенства системы получим, что  $a \in [2,25; 3]$ , из второго — что  $a \in [2; 2,5]$ . Следовательно,  $a \in [2,25; 2,5]$ .

*Ответ:*  $a \in [2,25; 2,5]$ .

**Пример 5.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6 \log_{0,25} \sin x + a^2 + 6a + 8 = a \log_4 \sin x.$$

**Решение.** Приведём логарифм в левой части уравнения к основанию  $4$ . Получим  $-6 \log_4 \sin x + a^2 + 6a + 8 = a \log_4 \sin x$ , откуда  $(a+6) \log_4 \sin x = a^2 + 6a + 8$ . Пусть  $\log_4 \sin x = t$ . При всех допустимых значениях переменной  $\sin x \leq 1$ . Значит,  $t \leq 0$ . Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(a+6)t = a^2 + 6a + 8$  имеет хотя бы один неположительный корень. Корнями трёхчлена в правой части уравнения являются числа  $a = -4$  и  $a = -2$ . Разложив квадратный трёхчлен на множители, получим  $(a+6)t = (a+4)(a+2)$ . Если  $a = -6$ , корней нет. Если  $a \neq -6$ , то  $t = \frac{(a+4)(a+2)}{a+6}$ . Условию  $t \leq 0$  найденный корень удовлетворяет только в том случае, если  $\frac{(a+4)(a+2)}{a+6} \leq 0$ . Решение последнего неравенства найдём методом интервалов.



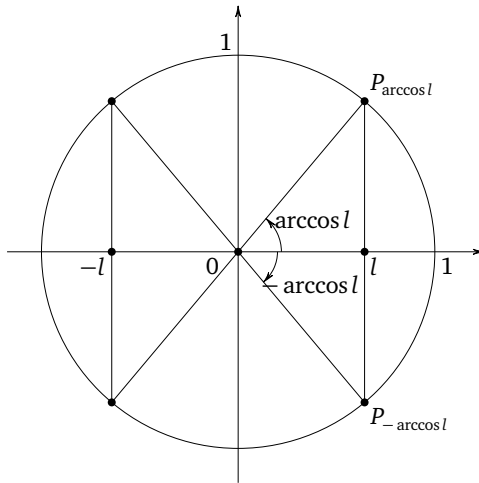
*Ответ:*  $(-\infty; -6) \cup [-4; -2]$ .

**Замечание.** Обратим внимание на то, что в двух последних примерах не требовалось делать обратную замену и возвращаться к прежней переменной. Эта ситуация является достаточно распространённой, и при правильной переформулировке с учётом необходимых ограничений на новую переменную возвращаться к старой не нужно, если, конечно, не требуется искать сами корни данного уравнения или решения данного неравенства. В последнем случае обратная замена является обязательной.

**Пример 6.** При каждом значении параметра  $a$  решите уравнение

$$a \cdot 5^{|\cos x|} + 1 = (a - 1)^2.$$

**Решение.** Раскроем скобки в правой части уравнения и приведём подобные слагаемые. Получим уравнение  $a \cdot 5^{|\cos x|} = a^2 - 2a$ . Если  $a = 0$ , уравнение обращается в тождество, справедливое при любом значении переменной, т. е. в этом случае  $x \in (-\infty; +\infty)$ . Если  $a \neq 0$ , то, разделив обе части уравнения на  $a$ , получим  $5^{|\cos x|} = a - 2$ . Пусть  $t = 5^{|\cos x|}$ . Так как  $0 \leq |\cos x| \leq 1$ , получим, что  $5^0 \leq t \leq 5^1$ , или  $1 \leq t \leq 5$ . Значит,  $1 \leq a - 2 \leq 5$ , откуда  $3 \leq a \leq 7$ . Сделав обратную замену при найденных значениях  $a$ , получим  $|\cos x| = \log_5(a - 2)$ . Решения уравнения  $|\cos x| = l$  (где  $0 \leq l \leq 1$ ) в наиболее компактной форме можно записать, воспользовавшись единичной окружностью.



Таким образом,  $x = \pm \arccos(\log_5(a - 2)) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

**Ответ:**  $\pm \arccos(\log_5(a - 2)) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ , при  $a \in [3; 7]$ ;  $(-\infty; +\infty)$  при  $a = 0$ ; при прочих  $a$  решений нет.



**Замечание.** При решении последнего примера можно было обойтись без формальной замены переменной, эта замена была сделана только для большей наглядности.

### Упражнения к § 1.1

1. а) Для каждого значения параметра  $a$  найдите число корней уравнения

$$9(5x - 1)a^2 - (59x - 55)a + 6(x - 1) = 0.$$

б) Для каждого значения параметра  $a$  найдите число корней уравнения

$$7(2x - 1)a^2 - (23x - 22)a + 3(x - 1) = 0.$$

2. а) Для каждого значения параметра  $a$  найдите множество решений неравенства

$$4xa^2 - (17x + 4)a + 4x + 1 \geq 0.$$

б) Для каждого значения параметра  $a$  найдите множество решений неравенства

$$5xa^2 - (26x + 1)a + 5x + 5 \leq 0.$$

3. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|9x + 7a - 3| = |4x + 3a + 4|$$

имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно  $-8$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|7x + 8a - 5| = |9x + 7a - 2|$$

имеет два различных корня, среднее арифметическое которых равно  $9$ .

4. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$|3x - 5a - 3| \leq 7 - 5a - x$$

имеет единственное решение.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство

$$|3x - 4a - 1| \leq 5 - 4a - x$$

имеет единственное решение.

5. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых имеет не менее трёх решений система уравнений

$$\begin{cases} (2a^2 - 11a)x - 25y = 2a^2 - 13a - 30, \\ 8x - 5y = 3. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых имеет не менее трёх решений система уравнений

$$\begin{cases} (9a^2 - 49a)x + 36y = 9a^2 - 58a + 44, \\ 9y - 5x = 5. \end{cases}$$

6. а) Для каждого значения параметра  $a$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + 7y = 2, \\ 3x + y = a, \\ 3x + 13y = a^2 + 3a. \end{cases}$$

б) Для каждого значения параметра  $a$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - y = a, \\ 4x - y = a^2 + 2a. \end{cases}$$

7. а) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 4a, \\ \frac{2}{x} - \frac{6}{y} = 3 + 4a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых имеет следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3a, \\ \frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 3 - a. \end{cases}$$

8. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x - 6y)^{-1} = -0,1, \\ 7x - 2y = 2a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 4x + y = 2a, \\ \frac{1}{x - 4y} = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при которых каждая из систем уравнений

$$\begin{cases} (x-5y)^{-1} = -\frac{1}{8}, \\ 3x+y = 3a \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 7x-3y = 3a, \\ \frac{1}{x-3y} = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение и эти решения совпадают.

9. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 12 \cos^2 x + 11 \cos^2 y + 33a = 31, \\ 33 \cos^2 x + 4 \cos^2 y + 151 = 198a. \end{cases}$$

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых следующая система уравнений хотя бы одно решение:

$$\begin{cases} 21 \sin^2 x + 8 \sin^2 y + 59 = 6a, \\ 24 \sin^2 x + 7 \sin^2 y + 91 = 9a. \end{cases}$$

10. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5^{x+2a} \leq 25^{x+a-4}, \\ 6^{x-3a-3} \geq 36^{x+a-3} \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 3.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений системы неравенств

$$\begin{cases} 7^{x+2a+1} \leq 49^{x+a+1}, \\ 3^{x-a-2} \geq 9^{x+a+2} \end{cases}$$

является отрезок числовой прямой, длина которого равна 1.

11. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$6 \log_7 \sin x + a \log_7 \sin x = a^2 + 5a + 4.$$

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых имеет следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$\log_{0,5} \cos x + 7a = a \log_{0,25} \cos x + a^2 + 12.$$

12. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(2^{\sin x} - 1)a^2 - (3 \cdot 2^{\sin x} - 1)a + 2^{\sin x + 1} = 0.$$

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень:

$$(3^{\cos x} - 1)a^2 - (5 \cdot 3^{\cos x} - 2)a + 2 \cdot 3^{\cos x + 1} = 0.$$

## §1.2. Нелинейные уравнения и неравенства с параметром

Круг задач, решение которых основывается на стандартных преобразованиях и логическом переборе, довольно широк, а их формулировки достаточно разнообразны. Ключевым признаком такой задачи является то, что её решение, как отмечалось выше, не предполагает знакомства с какими-то новыми идеями и методами, которых нет в школьных учебниках, а требует лишь умения выполнять преобразования, отвечать на вопросы о существовании корней уравнения или решений неравенства, удовлетворяющих определённым условиям, находить, если требуется, сами эти решения, выполнять необходимый логический перебор.

**Пример 1.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^3 - (a + 4)x^2 + 4ax = 0$  имеет ровно два различных корня.

**Решение.** Вынесем за скобку общий множитель левой части уравнения:  $x(x^2 - (a + 4)x + 4a) = 0$ , откуда  $x = 0$  или  $x^2 - (a + 4)x + 4a = 0$ . Корнями последнего уравнения являются  $x = 4$  и  $x = a$  (эти корни можно найти, воспользовавшись формулами Виета или формулой корней квадратного уравнения). Ровно два различных корня данное уравнение имеет, только если  $a = 0$  или  $a = 4$ .

*Ответ:*  $a = 0, a = 4$ .

**Пример 2.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $x^2 + 2x + a = 17$  и  $x^2 + 5x = 3a + 18$  имеют хотя бы один общий корень.

**Решение.** Пусть  $x_0$  — корень каждого из данных уравнений. Тогда справедливы тождества

$$x_0^2 + 2x_0 + a - 17 = 0 \tag{1}$$

и

$$x_0^2 + 5x_0 - 3a - 18 = 0. \tag{2}$$

Вычитая почленно равенство (1) из (2), получим  $3x_0 - 4a - 1 = 0$ , откуда  $x_0 = \frac{4a + 1}{3}$ . Таким образом, данные уравнения имеют не более

одного общего корня  $x_0 = \frac{4a+1}{3}$ . Подставим  $\frac{4a+1}{3}$  вместо  $x$  в любое из уравнений, например в первое. Получим

$$\left(\frac{4a+1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{4a+1}{3} + a - 17 = 0.$$

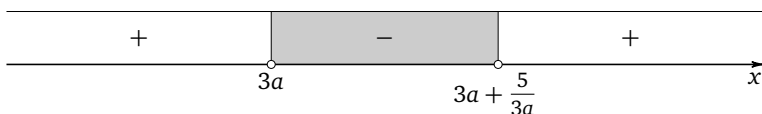
Это уравнение является квадратным относительно  $a$ . Выполнив преобразования, приведём его к стандартному виду:  $16a^2 + 41a - 146 = 0$ . Корнями последнего уравнения являются  $a = -\frac{73}{16}$  и  $a = 2$ .

Ответ:  $a = -\frac{73}{16}$ ,  $a = 2$ .

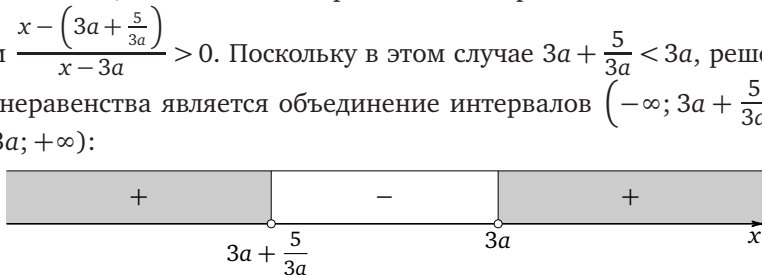
**Пример 3.** При каждом значении параметра  $a$  решите неравенство  $\frac{5}{x-3a} > 3a$ .

**Решение.** Перенеся  $\frac{5}{x-3a}$  в правую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придём к неравенству  $\frac{3ax - 9a^2 - 5}{x-3a} < 0$ . При  $a = 0$  неравенство примет вид  $-\frac{5}{x} < 0$ , откуда  $x \in (0; +\infty)$ . При  $a > 0$  можно разделить обе части неравенства

на положительное число  $3a$ . Получим  $\frac{x - \left(3a + \frac{5}{3a}\right)}{x-3a} < 0$ . Поскольку в этом случае  $3a + \frac{5}{3a} > 3a$ , решением неравенства является интервал  $\left(3a; 3a + \frac{5}{3a}\right)$ :



При  $a < 0$  можно разделить обе части неравенства на отрицательное число  $3a$ , изменив знак неравенства на противоположный. Получим  $\frac{x - \left(3a + \frac{5}{3a}\right)}{x-3a} > 0$ . Поскольку в этом случае  $3a + \frac{5}{3a} < 3a$ , решением неравенства является объединение интервалов  $\left(-\infty; 3a + \frac{5}{3a}\right) \cup \left(3a; +\infty\right)$ :



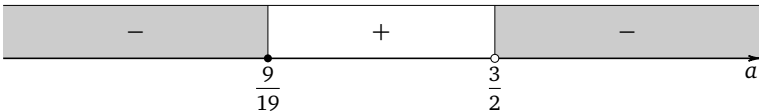
Ответ:  $\left(-\infty; 3a + \frac{5}{3a}\right) \cup \left(3a; +\infty\right)$  при  $a < 0$ ;  $(0; +\infty)$  при  $a = 0$ ;  $\left(3a; 3a + \frac{5}{3a}\right)$  при  $a > 0$ .

**Пример 4.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x + \sqrt{x^2 - 4ax - 7a} = 3$  имеет хотя бы один корень.

**Решение.** Перепишем уравнение в виде  $\sqrt{x^2 - 4ax - 7a} = 3 - x$ . Левая часть уравнения неотрицательна в силу неотрицательности квадратного корня. Если правая часть уравнения отрицательна, корней оно не имеет. Если правая часть уравнения неотрицательна, возведение в квадрат обеих его частей является равносильным преобразованием, т. е. не приводит ни к потере корней, ни к приобретению посторонних корней. В этом случае приходим к системе

$$\begin{cases} x \leq 3, \\ x^2 - 4ax - 7a = 9 - 6x + x^2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x \leq 3, \\ (6 - 4a)x = 7a + 9. \end{cases}$$

При  $a = 1,5$  уравнение системы не имеет корней. При  $a \neq 1,5$  корнем уравнения системы является  $x = \frac{7a+9}{6-4a}$ . В этом случае данное уравнение имеет хотя бы один корень, только если  $\frac{7a+9}{6-4a} \leq 3$ . Перенеся 3 в левую часть неравенства и приведя полученную разность к общему знаменателю, придём к неравенству  $\frac{19a-9}{6-4a} \leq 0$ . Решив последнее неравенство методом интервалов, получим  $a \in \left(-\infty; \frac{9}{19}\right] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ :



*Ответ:*  $\left(-\infty; \frac{9}{19}\right] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

**Пример 5.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $3 \cos 2x - (a^2 - 8a + 6) \sin x = 3$  имеет на отрезке  $[0; 2\pi]$  ровно 4 корня.

**Решение.** Перенесём все слагаемые левой части уравнения в его правую часть и, воспользовавшись формулой  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ , приведём полученное уравнение к виду  $6 \sin^2 x + (a^2 - 8a + 6) \sin x = 0$ , откуда  $\sin x = 0$  или  $\sin x = -\frac{a^2 - 8a + 6}{6}$ . Корнями уравнения  $\sin x = 0$  являются числа  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Отрезку  $[0; 2\pi]$  принадлежат ровно 3 корня этого уравнения:  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ . Если  $a^2 - 8a + 6 = 0$ , корни уравнения  $\sin x = -\frac{a^2 - 8a + 6}{6}$  совпадают с корнями уравнения  $\sin x = 0$ , и только 3 корня данного уравнения принадлежат отрезку  $[0; 2\pi]$ . Если  $a^2 - 8a + 6 \neq 0$ , корни уравнения  $\sin x = -\frac{a^2 - 8a + 6}{6}$

не совпадают с корнями уравнения  $\sin x = 0$ , и данное уравнение будет иметь ровно 4 корня на отрезке  $[0; 2\pi]$  только в случае, если уравнение  $\sin x = -\frac{a^2 - 8a + 6}{6}$  имеет на этом отрезке единственный корень, что возможно, лишь если  $\sin x = -1$  или  $\sin x = 1$ . Таким образом,  $-\frac{a^2 - 8a + 6}{6} = 1$  (откуда  $a = 2$  или  $a = 6$ ) или  $-\frac{a^2 - 8a + 6}{6} = -1$  (откуда  $a = 0$  или  $a = 8$ ).

*Ответ:* 0; 2; 6; 8.

**Пример 6.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых ни одно из чисел  $-9$  и  $8$  не принадлежит множеству решений неравенства

$$(x^2 + x - 72) \sqrt{0,2 \cdot 5^{x^2+x-71} + a^2 - 3a + 1} \leq 0.$$

**Решение.** Заметим, что  $0,2 \cdot 5^{x^2+x-71} = \frac{1}{5} \cdot 5^{x^2+x-71} = 5^{x^2+x-72}$ . Корнями квадратного трёхчлена  $x^2 + x - 72$  являются числа  $-9$  и  $8$ . Разложив этот квадратный трёхчлен на множители, перепишем неравенство в виде  $(x + 9)(x - 8) \sqrt{5^{(x+9)(x-8)} + a^2 - 3a + 1} \leq 0$ . Условие задачи будет выполнено только в том случае, если при  $x = -9$  и при  $x = 8$  значение подкоренного выражения будет отрицательным, т. е. если  $a^2 - 3a + 2 < 0$ , откуда  $a \in (1; 2)$ .

*Ответ:* (1; 2).

**Пример 7.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\lg(ax^2 - (a + 2)x + 3) + \log_{0,1}(3x^2 - (a + 2)x + a) = 0$  имеет более двух корней.

**Решение.** Перейдя к основанию 10, перепишем данное уравнение в виде  $\lg(ax^2 - (a + 2)x + 3) = \lg(3x^2 - (a + 2)x + a)$ . Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} ax^2 - (a + 2)x + 3 = 3x^2 - (a + 2)x + a, \\ 3x^2 - (a + 2)x + a > 0. \end{cases}$$

Уравнение системы приводится к виду  $(a - 3)x^2 = a - 3$ . Если  $a \neq 3$ , последнее уравнение является квадратным и более двух корней иметь не может. Если  $a = 3$ , корнем уравнения является любое действительное число. При этом неравенство системы принимает вид  $3x^2 - 5x + 3 > 0$  и выполняется при любом значении переменной в силу отрицательности дискриминанта и положительности старшего коэффициента квадратного трёхчлена в левой части неравенства.

*Ответ:* 3.

**Пример 8.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых любое решение неравенства  $\log_2 x^2 \leq \log_2 (3x + 4)$  является решением неравенства  $81x^2 \leq 16a^4$ .

**Решение.** Неравенство  $\log_2 x^2 \leq \log_2 (x + 2)$  равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 \leq 3x + 4, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства системы является отрезок  $[-1; 4]$ , поэтому решение системы есть  $[-1; 0) \cup (0; 4]$ . Из неравенства  $81x^2 \leq 16a^4$  получаем  $|x| \leq \frac{4a^2}{9}$ . Требование задачи будет выполнено, если

$$\begin{cases} -\frac{4a^2}{9} \leq -1, \\ 4 \leq \frac{4a^2}{9}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a^2 \geq \frac{9}{4}, \\ a^2 \geq 9, \end{cases}$$

т. е.  $a^2 \geq 9$  и, значит,  $a \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ .

**Пример 9.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых любой корень уравнения

$$a \cos 2x + |a| \cos 4x + \cos 6x = 1 \quad (1)$$

является корнем уравнения

$$2 \sin x \cos 2x + \sin 5x = 2 \sin 2x \cos 3x \quad (2)$$

и, наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1).

**Решение.** Уравнение (2) не содержит параметра, поэтому целесообразно начать именно с его решения. Преобразовав в сумму произведение в правой части уравнения, получим

$$2 \sin x \cos 2x + \sin 5x = \sin 5x - \sin x,$$

откуда  $2 \sin x (\cos 2x + 0,5) = 0$ , и, значит,  $\sin x = 0$  (откуда  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ) или  $\cos 2x = -0,5$  (откуда  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ). Все найденные корни можно записать в более компактном виде (например, рассмотрев соответствующие им точки единичной окружности):  $x = \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Таким образом, нужно найти все значения параметра  $a$ , при каждом из которых корнями уравнения (1) являются числа  $x = \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и только они. Подставим  $x = \frac{\pi n}{3}$  в уравнение (1):

$$a \cos \frac{2\pi n}{3} + |a| \cos \frac{4\pi n}{3} + \cos 2\pi n = 1.$$



Поскольку при любом  $n \in \mathbb{Z}$  справедливы равенства

$$\cos 2\pi n = 1, \quad \cos \frac{4\pi n}{3} = \cos \frac{2\pi n}{3} \neq 0$$

(что легко доказать, воспользовавшись единичной окружностью, применив перебор или формулы приведения), получим  $a + |a| = 0$ , откуда  $a \leq 0$ . Следовательно, если числа  $x = \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , являются корнями уравнения (1), то  $a \leq 0$ . Но из этого вовсе не следует, что при  $a \leq 0$  уравнение (1) не имеет других корней. Поэтому нужно рассмотреть, какие корни имеет уравнение (1) при  $a \leq 0$ . В этом случае оно принимает вид  $a \cos 2x - a \cos 4x + \cos 6x = 1$ . Применив формулы разности косинусов и косинуса удвоенного аргумента, после упрощений получим  $2a \sin 3x \sin x - 2 \sin^2 3x = 0$ , откуда либо  $\sin 3x = 0$ , либо  $a \sin x - \sin 3x = 0$ . Корнями уравнения  $\sin 3x = 0$  являются числа  $x = \frac{\pi m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , совпадающие с корнями уравнения (2). Уравнение  $a \sin x - \sin 3x = 0$  преобразуется к виду  $a \sin x - 3 \cos^2 x \sin x + \sin^3 x = 0$ , откуда

$$\sin x(a - 3 \cos^2 x + \sin^2 x) = 0.$$

Из последнего уравнения получим, что либо  $\sin x = 0$ , либо  $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$ . Корни уравнения  $\sin x = 0$  принадлежат множеству чисел  $x = \frac{\pi m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Значит, чтобы уравнение (1) не имело других корней, кроме этих чисел, нужно чтобы либо уравнение  $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$  вовсе не имело корней, либо его корнями были только числа  $x = \frac{\pi m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Если  $x = \frac{\pi m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , то либо  $\cos^2 x = \frac{1}{4}$  (и тогда  $a = 0$ ; ясно, что при  $a = 0$  других корней нет), либо  $\cos^2 x = 1$  (что при  $a \leq 0$  невозможно). Уравнение  $\cos^2 x = \frac{a+1}{4}$  не имеет корней, если либо  $\frac{a+1}{4} < 0$  (откуда  $a < -1$ ), либо  $\frac{a+1}{4} > 1$  (что при  $a \leq 0$  невозможно). Таким образом, требование задачи выполнено, только если  $a = 0$  или  $a < -1$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -1) \cup \{0\}$ .

### Упражнения к § 1.2

1. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^3 - (a - 5)x^2 - 5ax = 0$  имеет ровно два различных корня.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $x^3 + 2(a + 3)x^2 + 12ax = 0$  имеет ровно два различных корня.

2. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $x^2 + 3x - 9a + 18 = 0$  и  $x^2 + 6x - 13a + 25 = 0$  имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $x^2 - x - 5a + 8 = 0$  и  $x^2 + x - 8a + 12 = 0$  имеют хотя бы один общий корень.

3. а) Найдите все значения параметра  $a \neq 0$ , при каждом из которых положительны все абсциссы общих точек графиков функций  $f(x) = \frac{7}{x^2 + 2x}$  и  $g(x) = \frac{3a}{x}$ .

б) Найдите все значения параметра  $a \neq 0$ , при каждом из которых положительны все абсциссы общих точек графиков функций  $f(x) = \frac{8}{x^2 + 9x}$  и  $g(x) = \frac{a}{x}$ .

4. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $\frac{x}{x-a} = -a$  и  $\frac{a}{x-a} = -x$  имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $\frac{4x}{x+a} = a$  и  $\frac{4a}{x+a} = x$  имеют хотя бы один общий корень.

5. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $\frac{8}{x} = \frac{ax}{8}$  и  $\frac{9}{x-a} = \frac{ax}{8}$  имеют хотя бы один общий корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнения  $\frac{4}{x} = -\frac{ax}{4}$  и  $\frac{5}{x+a} = -\frac{ax}{4}$  имеют хотя бы один общий корень.

6. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - (a-4)x - 4a} < 0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - (a-1)x - a} < 0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

7. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2 - (a-3)x - 3a}{x^2 - (a-5)x - 5a} < 0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\frac{x^2 - (a-4)x - 4a}{x^2 - (a+6)x + 6a} < 0$$

является объединение двух непересекающихся интервалов.

8. а) При каждом значении параметра  $a$  решите неравенство

$$\frac{3}{x-a} > a.$$

б) При каждом значении параметра  $a$  решите неравенство

$$\frac{1}{x-2a} > 2a.$$

9. а) При каждом значении параметра  $a$  решите неравенство

$$\frac{15}{ax+2a} > 1.$$

б) При каждом значении параметра  $a$  решите неравенство

$$\frac{3}{ax+3a} > \frac{2}{3}.$$

10. а) Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых функция

$$y = \frac{10x^2 + 9x + 8}{x^2 - (2b-7)x + 1}$$

определена на всей числовой прямой и принимает только положительные значения.

б) Найдите все значения параметра  $b$ , при каждом из которых функция

$$y = \frac{5x^2 - 6x + 7}{3x^2 - (5b-2)x + 3}$$

определена на всей числовой прямой и принимает только положительные значения.

11. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{5ax+7a} = 5x+7$  имеет хотя бы один корень.

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\sqrt{2ax+3a} = 2x+3$  имеет хотя бы один корень.

12. а) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $(x-3a+4)\sqrt{x+a+2} \leq 0$  является отрезок числовой прямой, длина которого равна  $|a|$ .

б) Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых множеством решений неравенства  $(x-2a+1)\sqrt{x+2a-1} \leq 0$  является отрезок числовой прямой, длина которого равна  $|a|$ .

## Содержание

Предисловие . . . . .	3
Глава 1. Логический перебор в задачах с параметром и нестандартных задачах . . . . .	5
§ 1.1. Линейные уравнения и неравенства с параметром . . . . .	5
§ 1.2. Нелинейные уравнения и неравенства с параметром . . . . .	14
§ 1.3. Задачи с целочисленными неизвестными . . . . .	26
Глава 2. Квадратный трёхчлен в задачах с параметром и нестандартных задачах . . . . .	53
§ 2.1. Исследование дискриминанта и формулы Виета . . . . .	53
§ 2.2. Расположение корней квадратного трёхчлена . . . . .	71
§ 2.3. Задачи, сводимые к исследованию квадратного трёхчлена . . . . .	87
Глава 3. Применение свойств функций к решению уравнений и неравенств . . . . .	108
§ 3.1. Монотонность . . . . .	108
§ 3.2. Ограниченность . . . . .	123
§ 3.3. Инвариантность . . . . .	146
Глава 4. Графические интерпретации . . . . .	165
§ 4.1. Метод областей . . . . .	165
§ 4.2. Преобразования графиков . . . . .	186
§ 4.3. Геометрические идеи . . . . .	203
Глава 5. Другие методы . . . . .	224
§ 5.1. Метод упрощающего значения . . . . .	224
§ 5.2. Параметр как переменная . . . . .	232
§ 5.3. Тригонометрические подстановки . . . . .	243
§ 5.4. Векторные интерпретации в алгебре . . . . .	251
Диагностическая работа 1 . . . . .	259
Диагностическая работа 2 . . . . .	260
Диагностическая работа 3 . . . . .	262
Диагностическая работа 4 . . . . .	264
Диагностическая работа 5 . . . . .	266
Ответы . . . . .	268