МАТЕМАТИКА

2017 ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

задача 15

С. А. Шестаков

НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

ФГОС

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2017. Математика. Неравенства и системы неравенств. Задача 15 (профильный уровень). — М.: МЦНМО, 2017. — 352 с.

ISBN 978-5-4439-1085-7

Пособия по математике «ЕГЭ 2017. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 15 профильного уровня.

По сравнению с прошлым годом книга существенно доработана и дополнена.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики и родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

Шестаков Сергей Алексеевич

ЕГЭ 2017. Математика. Неравенства и системы неравенств.
Задача 15 (профильный уровень)

Подписано в печать 01.08.2016 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 19. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.
E-mail: mittelpress@mail.ru

ISBN 978-5-4439-1085-7

Содержание

Глава 1. Общие методы решения неравенств

§1.1. Основные понятия и факты

В школьном курсе математики можно выделить шесть следующих основных числовых и функционально-алгебраических линий (в порядке их появления в учебниках), в соответствии с которыми и структурирована основная часть этого пособия:

- целые числа, степени с натуральным показателем, целые алгебраические выражения (многочлены), целые рациональные функции,
- дроби, степени с целым отрицательным показателем, алгебраические дроби, дробно-рациональные функции,
- корни, степени с дробным показателем, иррациональные алгебраические выражения, иррациональные функции,
- тригонометрические выражения, тригонометрические функции,
- степени с действительным показателем, показательные выражения, показательная функция,
- логарифмы, логарифмические выражения, логарифмическая функция.

Чтобы сделать классификацию однозначной и облегчить поиск нужных задач, условимся, что хронология изучения темы является ключевым признаком классификации, т. е. если, например, в некотором уравнении или неравенстве переменная содержится и под знаком корня, и под знаком логарифма, будем считать его логарифмическим, а не иррациональным, поскольку логарифмы изучаются позже корней.

Тем самым любое уравнение или неравенство школьного курса математики можно однозначно отнести к одному из следующих типов в соответствии с перечисленными функционально-алгебраическими линиями: целое рациональное (слово «рациональное» в дальнейшем для экономии места будем опускать), дробно-рациональное, иррациональное, тригонометрическое, показательное, логарифмическое. Прежде чем переходить к изложению общих методов решения неравенств, напомним основные понятия, определения и факты, связанные с неравенствами и уравнениями (решение уравнений часто является составной частью решения неравенств).

Значение любого алгебраического выражения $f(x)$ при любом допустимом значении переменной x либо положительно (в этом случае пишут $f(x)>0$), либо отрицательно (в этом случае пишут $f(x)<0$), либо равно нулю (в этом случае пишут $f(x)=0$). Любая математическая формула является высказыванием, предложением, написанным на математическом языке. Высказывания $f(x)>0$ (читается: $f(x)$ больше нуля), $f(x)<0$ (читается: $f(x)$ меньше нуля), $f(x)\geqslant 0$ (читается: $f(x)$ больше или равно нулю или $f(x)$ не меньше нуля) и $f(x)\leqslant 0$ (читается: $f(x)$ меньше или равно нулю или $f(x)$ не больше нуля) называют неравенствами с одной переменной, а высказывание $f(x)=0$ (читается: $f(x)$ равно нулю) — уравнением с одной переменной. Неравенства $f(x)>0$ и $f(x)<0$ называются *строгими*, а неравенства $f(x)\geqslant 0$ и $f(x)\leqslant 0$ — *нестрогими*. Заметим, что правая часть неравенства (уравнения) может быть отличной от нуля. В этом случае строгое неравенство записывается в виде $f(x)>g(x)$ или $f(x)<g(x)$, нестрогое неравенство — в виде $f(x)\geqslant g(x)$ или $f(x)\leqslant g(x)$, а уравнение — в виде $f(x)=g(x)$.

Число называется решением неравенства (корнем уравнения), если при его подстановке вместо переменной в данное неравенство (уравнение) получается верное числовое неравенство (равенство). *Решить неравенство* (*уравнение*) — значит найти множество всех его решений (корней). Поэтому в ответе предпочтительнее указывать именно множества чисел, используя для записи нескольких непересекающихся множеств знак объединения «$\cup$» либо просто точку с запятой. В этом смысле использование в качестве ответа, например, записи $x>1$ менее удачно по сравнению с записью $(1;+\infty)$, поскольку $x>1$ является неравенством, а $(1;+\infty)$ — множеством его решений.

Если неравенство (уравнение) не имеет ни одного решения (корня), то множество его решений (корней) не содержит ни одного элемента (такое множество называется пустым). Подобные ситуации время от времени встречаются — в том числе и на экзаменах, к ним надо быть готовыми. В таких случаях для записи ответа используют символ пустого множества $\varnothing$ либо просто пишут: «решений нет». Ответ в форме «$x\in\varnothing$» является математически не вполне грамотным, поскольку пустое множество по определению не содержит ни одного элемента. Для записи конечных числовых множеств используют фигурные скобки $\{\ \}$, в которых через точку с запятой (не через запятую — чтобы исключить путаницу, поскольку запятой отделяются дробные части десятичных дробей) записывают числа (обычно в порядке возрастания), являющиеся решениями неравенства (корнями уравнения).

Важной частью общей математической культуры, необходимой для решения неравенств, является умение делать логический перебор, проводить доказательные рассуждения, отвечать на вопросы о знаках и числе решений неравенства даже в тех случаях, когда решать неравенство не требуется или найти решение не представляется возможным. Развитию и тренировке навыков логического перебора, умения анализировать условие и делать обоснованные умозаключения и выводы, находить стратегию решения посвящена значительная часть упражнений этого параграфа.

Пример 1. Сеня сказал, что написанное на доске неравенство имеет менее 11 целочисленных решений, а Веня — что менее 12. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

Решение. Если утверждение Сени истинно и неравенство имеет менее 11 целочисленных решений, то и утверждение Вени истинно, что противоречит условию истинности только одного из утверждений. Значит, утверждение Сени ложно, а утверждение Вени истинно, т. е. неравенство имеет не менее 11, но менее 12 целочисленных решений. Единственное целое число, отвечающее такому требованию, — это 11.

Ответ: 11.

Пример 2. Неравенство $\frac{59}{\sqrt{4x^2+7}} > \frac{47}{\sqrt{5x^2+9}}$:

1) не имеет решений;
2) справедливо только при $x \neq 0$;
3) справедливо при любом действительном x;
4) справедливо только при $x = 0$.

Укажите номера истинных утверждений.

Решение. Числитель дроби в левой части неравенства больше числителя дроби в правой части неравенства, а знаменатель меньше знаменателя в правой части при любом значении переменной. Поэтому дробь в левой части неравенства больше дроби в правой его части. Следовательно, истинно утверждение 3.

Ответ: 3.

Пример 3. Укажите номера тех неравенств, которые не имеют отрицательных решений:

1) $(x+2)^2(7x^{18}-9x^5-5) \geqslant 0$;
2) $2x^2-7x+6<0$;
3) $2+7x^8-18x^{17}<0$;
4) $x^2-56789x-98765 \leqslant 0$;
5) $x^2-7777x+77777<0$.

Решение. Рассмотрим последовательно каждое из пяти данных неравенств. Число $x=-2$ является, очевидно, решением неравенства 1. Следовательно, это неравенство имеет по крайней мере одно отрицательное решение. Квадратное неравенство 2 легко решить стандартным способом; его решением является промежуток (1,5; 2). Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Неравенство 3 едва ли возможно решить школьными методами, но ответ на вопрос задачи этого и не требует. Действительно, если предположить, что какое-то отрицательное число является решением этого неравенства, то мы получим противоречие: ведь при любом отрицательном значении переменной левая часть неравенства заведомо принимает только положительные значения. Следовательно, это неравенство не имеет отрицательных решений. Решить квадратное неравенство 4, разумеется, можно, но это потребует несоразмерных ему арифметических подвигов. Поскольку находить решения вовсе необязательно, попробуем порассуждать. Графиком квадратичной функции

$$y = x^2 - 56789x - 98765$$

является парабола, ветви которой направлены вверх. Так как $y(0) = -98765 < 0$, этот график пересекает ось абсцисс в двух точках, расположенных по разные стороны от начала координат, и при любом значении переменной, заключённом между ними, лежит ниже оси абсцисс. Следовательно, неравенство 4 имеет отрицательные решения. Этот же результат можно было получить, используя формулы Виета. Воспользуемся ими для ответа на вопрос о существовании отрицательных решений у неравенства 5. Если дискриминант квадратного трёхчлена в левой части неравенства 5 неположителен, то оно не имеет решений (в том числе и отрицательных). Если дискриминант положителен, то решением неравенства является интервал, концы которого — корни квадратного трёхчлена $x^2 - 7777x + 77777$. Из формул Виета следует, что оба корня этого трёхчлена (если они существуют) положительны, поскольку их произведение и сумма положительны. Поэтому и при положительном дискриминанте левой части неравенство 5 не имеет отрицательных решений. Заметим, что и в случае неравенства 2 можно было использовать рассуждения, аналогичные предыдущим.

Ответ: 2; 3; 5.

Навыки, полученные при решении подобных задач, помогут находить оптимальные пути решения, рассматривать меньшее число случаев, анализировать полученные ответы на возможные ошибки и т. п.

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является как решением неравенства $f(x) > 0$ (уравнения $f(x) = 0$), так и решением неравенства $g(x) > 0$ (уравнения $g(x) = 0$), то говорят, что задана *система неравенств* $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ (*система уравнений* $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$), а записывают и систему неравенств, и систему уравнений с помощью фигурной скобки:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{— система неравенств,}$$

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0 \end{cases} \text{— система уравнений.}$$

Знаки неравенств системы могут быть любыми из четырёх возможных, правые части неравенств (уравнений) системы могут быть отличны от нуля, система может состоять из трёх и более неравенств (уравнений), содержать наряду с неравенствами и уравнения (такие системы иногда называют *смешанными*). *Решить систему* неравенств (уравнений) — значит найти множество её решений. В большинстве случаев (но не всегда!) для этого ищут множество решений каждого из неравенств системы, а затем — пересечение (общую часть) полученных множеств. Что касается систем уравнений с одной переменной, здесь часто можно обойтись без решения всех уравнений системы, решив только одно — наиболее простое — из её уравнений и выполнив проверку найденных корней путём их подстановки в остальные уравнения системы. Разумеется, это касается только систем уравнений с одной переменной; для систем уравнений с двумя и более переменными такой приём «не работает».

Пример 4. Система неравенств $\begin{cases} x \geqslant -789, \\ 789x^{73} + 89x^{72} + 9 < 0 \end{cases}$:

1) не имеет решений;
2) не имеет положительных решений;
3) не имеет отрицательных решений;
4) имеет и отрицательные, и положительные решения;
5) выполняется при любом действительном x.

Укажите номера истинных утверждений.

Решение. Понятно, что решение второго неравенства данной системы едва ли возможно. Попробуем доказать или опровергнуть данные утверждения, подобрав, где необходимо, соответствующие примеры. Ясно, что, например, $x = -1$ является решением каждого из неравенств системы. Поэтому утверждения 1 и 3 ложны. Далее, при любом положительном значении переменной левая часть второго неравенства системы положительна. Поэтому это неравенство не имеет положительных решений. Следовательно, и вся система не имеет положительных решений. Значит, утверждения 4 и 5 ложны, а утверждение 2 истинно.

Ответ: 2.

Пример 5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2+(x^2-5)(x^2-4)\leqslant 4,\\ x^{27}+2x^{26}+7x+13\leqslant 0.\end{cases}$$

Решение. О втором неравенстве данной системы можно сказать только одно: оно не имеет ни одного неотрицательного решения, поскольку при любом неотрицательном значении переменной его левая часть положительна. Поэтому решениями второго неравенства системы могут быть только отрицательные числа. Решим первое неравенство, перенеся 4 в левую часть и выполнив разложение на множители:

$$x^2-4+(x^2-5)(x^2-4)\leqslant 0 \iff (x^2-4)(x^2-5+1)\leqslant 0,$$

и, значит, $(x^2-4)^2\leqslant 0$. Если $x^2-4\neq 0$, то $(x^2-4)^2>0$ и первое неравенство не имеет решений. Значит, $x^2-4=0$, откуда $x=\pm 2$. Таким образом, первое неравенство данной системы имеет ровно два решения. Поскольку никакое положительное число не может быть решением второго неравенства системы, её единственным возможным решением является $x=-2$. При $x=-2$ левая часть второго неравенства системы принимает вид

$$(-2)^{27}+2(-2)^{26}+7(-2)+13=-2^{27}+2^{27}-14+13=-1.$$

Значит, $x=-2$ является решением и второго неравенства системы.

Ответ: -2.

Замечание. В некоторых пособиях, преимущественно издаваемых подготовительными отделениями университетов и других вузов (но не только), можно встретить записи вида

$$\begin{cases} f(x)>0,\\ g(x)=0,\\ x\in[a;b],\end{cases}$$

т. е. записи, в которых наряду с уравнениями и неравенствами в систему включаются и другие высказывания (в приведённом примере: $x\in[a;b]$). С формальной точки зрения такую запись именно в пособиях для средней школы следует признать не вполне удачной: ведь ни в одном из учебников не вводится понятие системы высказываний, и, несмотря на то что интуитивно понятно, какой смысл вкладывается в подобные записи, их лучше избегать, заменяя высказывания вида $x\in[a;b]$ неравенствами (в данном случае неравенством $a\leqslant x\leqslant b$).

Если нужно найти все значения переменной, каждое из которых является или решением неравенства $f(x)>0$ (уравнения $f(x)=0$), или решением неравенства $g(x)>0$ (уравнения $g(x)=0$), то говорят, что задана *совокупность неравенств* (*совокупность уравнений*), а записывают и совокупность неравенств, и совокупность уравнений с помощью квадратной скобки:

$$\left[\begin{array}{l} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{array}\right. \text{— совокупность неравенств,}$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0 \end{array}\right. \text{— совокупность уравнений.}$$

Знаки неравенств совокупности могут быть любыми из четырёх возможных, правые части неравенств (уравнений) совокупности могут быть отличны от нуля, совокупность может состоять из трёх и более неравенств (уравнений), содержать наряду с неравенствами и уравнения. *Решить совокупность* неравенств (уравнений) — значит найти множество решений каждого из неравенств (уравнений) совокупности, а затем найти объединение полученных множеств. Итак, совсем коротко: система — пересечение, совокупность — объединение. Поэтому, например, высказывание $x\in[a;b]$ можно заменить системой неравенств $\begin{cases} x\geqslant a, \\ x\leqslant b, \end{cases}$ а высказывание $x\in(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$ можно заменить совокупностью неравенств $\left[\begin{array}{l} x\leqslant a, \\ x\geqslant b. \end{array}\right.$

При каждом допустимом значении переменной значение любого алгебраического выражения является числом, поэтому далее для краткости и экономии места будем иногда — если это не противоречит смыслу предложения — вместо словосочетания «значение выражения $g(x)$» использовать словосочетание «число $g(x)$». Например, при любом допустимом значении переменной из двух чисел $f(x)-5$ и $f(x)-8$ меньшим, очевидно, является число $f(x)-8$. Произведение двух чисел отрицательно в том и только том случае, если это числа разных знаков, т. е. меньшее из этих чисел отрицательно, а большее — положительно. Поэтому неравенство $(f(x)-5)(f(x)-8)<0$ можно заменить системой неравенств

$$\begin{cases} f(x)-8<0, \\ f(x)-5>0. \end{cases}$$

Произведение двух чисел положительно в том и только том случае, если это числа одного знака, т. е. если меньшее из этих чисел положительно (тогда и большее число положительно) или большее из этих чисел отрицательно (тогда и меньшее число отрицательно). Поэтому неравенство $(f(x)-5)(f(x)-8)>0$ можно заменить совокупностью неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x)-8>0, \\ f(x)-5<0. \end{array}\right.$$

Разумеется, такие замены возможны только при допустимых значениях переменной.

Определение 1. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения или неравенства будем называть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей уравнения или неравенства. Областью допустимых значений (ОДЗ) системы уравнений или неравенств будем называть пересечение областей допустимых значений каждого из уравнений или неравенств системы, т. е. множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей каждого уравнения или неравенства системы.

Из шести основных типов алгебраических выражений школьного курса три дают ограничения на переменную. Эти ограничения и определяют ОДЗ уравнения, неравенства, системы или совокупности.

Таблица 1

Алгебраическое выражение	*Ограничение*
алгебраическая дробь $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$
иррациональное алгебраическое выражение $\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x)\geqslant 0$
степень с дробным показателем $(f(x))^{\frac{m}{n}}$ ($n\in\mathbb{N}$, $n>1$, $m\in\mathbb{Z}$, $\dfrac{m}{n}$ — несократимая дробь)	$f(x)\geqslant 0$ при $\dfrac{m}{n}>0$, $f(x)>0$ при $\dfrac{m}{n}<0$
логарифмическое выражение $\log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ g(x)\neq 1 \end{cases}$

Замечание. Помимо основных приведённых в таблице алгебраических выражений ограничения на переменную дают ещё $\arcsin f(x)$ и $\arccos f(x)$, ОДЗ которых определяется неравенством $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$.

В некоторых задачах именно исследование ОДЗ даёт ключ к решению, и без такого исследования решить задачу попросту невозможно.

Пример 6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 13^{x-6} + \ln^2(x-7) \geqslant 13, \\ 7 + \sqrt{13-x} \geqslant 7^{x-12}. \end{cases}$$

Решение. Поскольку $\ln^2(x-7)$ определён при $x > 7$, а $\sqrt{13-x}$ — при $x \leqslant 13$, ОДЗ данной системы неравенств — промежуток $(7; 13]$. Если $x > 7$, то $13^{x-6} > 13$, а $\ln^2(x-7) \geqslant 0$. Поэтому $13^{x-6} + \ln^2(x-7) > 13$, и первое неравенство данной системы выполнено при любом $x > 7$. Если $x \leqslant 13$, то $\sqrt{13-x} \geqslant 0$, $7 + \sqrt{13-x} \geqslant 7$, а $7^{x-12} \leqslant 7$. Поэтому второе неравенство данной системы выполнено при любом $x \leqslant 13$. Таким образом, именно ОДЗ данной системы неравенств является её решением.

Ответ: $(7; 13]$.

Пример 7. Решите неравенство

$$x^2 + \sqrt{x^2-81} \leqslant 81 + \sqrt{x^2-81}.$$

Решение. Левая и правая части неравенства определены при условии неотрицательности подкоренного выражения, т. е. при $x^2 - 81 \geqslant 0$, откуда $x^2 \geqslant 81$. При допустимых значениях переменной неравенство приводится к виду $x^2 \leqslant 81$. Приходим к системе

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 81, \\ x^2 \leqslant 81, \end{cases}$$

откуда $x^2 = 81$, и $x = \pm 9$.

Ответ: $\{\pm 9\}$.

Замечание. Как видно из рассмотренного примера, в некоторых случаях можно обойтись без формального решения неравенств, задающих ОДЗ. Как правило, это применимо к задачам, в которых ОДЗ нужна преимущественно для отбора корней уравнения или — в некоторых случаях — решений неравенства.

В тех случаях, когда вариант ЕГЭ по математике содержит систему двух неравенств с одной переменной, за её верное решение обычно даётся три первичных балла: по баллу за правильное решение каждого из неравенств системы и третий балл — за правильно найденное решение всей системы. Однако существуют системы неравенств, для которых нельзя решить одно из неравенств системы (или даже нельзя найти множество решений ни одного из неравенств системы), а множество решений всей системы найти, тем не менее, удаётся.

Определение 2. Если каждое решение первого неравенства является и решением второго, то второе неравенство называется *следствием* первого. Аналогично если каждый корень первого уравнения является и корнем второго, то второе уравнение называется *следствием* первого.

Из этого определения вытекает, что множество корней данного уравнения содержится в множестве корней уравнения-следствия. Перейдя от данного уравнения к уравнению-следствию, найдя корни последнего и проверив, какие из них являются корнями данного (такая проверка осуществляется непосредственной подстановкой найденных корней в данное уравнение), можно найти все корни данного уравнения. Корни уравнения-следствия (решения неравенства-следствия), не являющиеся корнями данного уравнения (решениями данного неравенства), часто называют посторонними корнями (решениями). Таким образом, одним из методов решения уравнений является переход к уравнению-следствию, который при записи решения обозначается стрелкой «$\Rightarrow$». Переход к уравнению-следствию, как правило, связан с расширением ОДЗ, которое обычно происходит после какого-либо алгебраического преобразования: возведения в чётную степень, освобождения от знаменателя, логарифма или модуля. Вместо непосредственной подстановки найденных корней в данное уравнение можно подставлять корни лишь в неравенства, невыполнение которых и приводит к появлению посторонних корней.

Таблица 2

Данное уравнение	*Уравнение-следствие*	*Проверяемые неравенства*
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$f(x)=0$	$g(x)\neq 0$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$f(x)=g^2(x)$	$g(x)\geqslant 0$ (неравенство $f(x)\geqslant 0$, задающее ОДЗ данного уравнения, проверять не нужно: оно выполняется для всех найденных значений переменной, поскольку при каждом из них $f(x)=g^2(x)$, а $g^2(x)\geqslant 0$)
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$f(x)=(a(x))^b$	$a(x)>0, \quad a(x)\neq 1$ (неравенство $f(x)>0$ проверять не нужно: оно следует из того, что $a(x)>0$ и, значит, $f(x)=(a(x))^b>0$)
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$f(x)=\pm g(x)$	$g(x)\geqslant 0$

Для неравенств рекомендовать аналогичный метод решения (переход к неравенству-следствию), как правило, нельзя: число корней уравнения в большинстве случаев конечно (именно это позволяет выполнить проверку и отобрать корни данного уравнения из множества корней уравнения-следствия), а число решений неравенства, как правило, бесконечно, и подобную проверку выполнить просто невозможно. Однако в некоторых случаях именно переход к неравенству-следствию помогает решить задачу. В таких случаях, как уже отмечалось, невозможно найти решение одного (а иногда и каждого) из неравенств системы, но решение всей системы найти, тем не менее, возможно, причём такую возможность даёт именно переход к неравенству-следствию.

Пример 8. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \leqslant 6x^2-9, \\ \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78} \geqslant x^4. \end{cases}$$

Решение. Если $a \leqslant b$ и $a \geqslant c$, то $c \leqslant b$. В нашем случае

$$a = \sqrt{x^{69}-3x^{67}-\sqrt{3}x+78}, \quad b = 6x^2-9, \quad c = x^4.$$

Следовательно, $x^4 \leqslant 6x^2-9$, откуда $x^4-6x^2+9 \leqslant 0$, т. е. $(x^2-3)^2 \leqslant 0$. Если $x^2-3 \neq 0$, то $(x^2-3)^2 > 0$. Поэтому полученное неравенство выполняется, только если $x^2=3$, откуда $x=\pm\sqrt{3}$. Таким образом, если данная система имеет решения, то этими решениями могут быть только числа из множества $\{-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\}$. Остаётся выполнить проверку. Пусть $x=\sqrt{3}$. Тогда правая часть каждого из неравенств системы равна 9. Найдём значение подкоренного выражения:

$$(\sqrt{3})^{69}-3\cdot(\sqrt{3})^{67}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+78 = (\sqrt{3})^{69}-(\sqrt{3})^{69}-3+78 = 75.$$

Поскольку $\sqrt{75} < 9$, первое неравенство системы выполнено, а второе — нет. Значит, $x=\sqrt{3}$ не является решением данной системы. Пусть $x=-\sqrt{3}$. Тогда правая часть каждого из неравенств системы равна 9. Найдём значение подкоренного выражения:

$$(-\sqrt{3})^{69}-3\cdot(-\sqrt{3})^{67}-\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})+78 = -(\sqrt{3})^{69}+(\sqrt{3})^{69}+3+78 = 81.$$

Поскольку $\sqrt{81}=9$, оба неравенства системы выполнены. Значит, $x=-\sqrt{3}$ является решением данной системы.

Ответ: $\{-\sqrt{3}\}$.

Замечание. Почленное сложение двух неравенств возможно, только если это неравенства одного знака. При таком сложении получается неравенство, являющееся следствием данных неравенств. Аналогично при почленном сложении двух уравнений получается уравнение, являющееся следствием данных. Поэтому решения неравенства (корни уравнения), полученного почленным сложением двух данных, должны быть проверены подстановкой в каждое из данных неравенств (уравнений), как это было сделано при решении примера 2, либо неравенство (уравнение), являющееся следствием данных, должно быть включено в данную систему.

Конечно, рассмотренную систему нельзя считать стандартной. При решении стандартных неравенств или их систем переход к неравенству-следствию не используется; здесь обычно применяют преобразования, которые не приводят к изменению множества решений данного неравенства или данной системы.

Определение 3. Два уравнения (неравенства) называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений (это множество, в частности, может быть пустым, т. е. уравнения, не имеющие корней, или неравенства, не имеющие решений, равносильны).

Равносильными могут быть не только два уравнения, два неравенства, две совокупности или две системы. В определении равносильности речь идёт лишь о множестве решений уравнения или неравенства. Поэтому неравенство может быть равносильно уравнению, совокупности или системе, и наоборот. Переход от данного уравнения (неравенства) к равносильному уравнению (неравенству), равносильной совокупности или равносильной системе называется *равносильным* и при записи решения обозначается двусторонней стрелкой «$\Longleftrightarrow$». Такой переход не приводит ни к потере решений (корней), ни к приобретению посторонних решений (корней), и алгебраические преобразования, которые делают такой переход возможным, также называются *равносильными*. Метод равносильных преобразований не требует проверки найденных решений путём их подстановки в данное уравнение или неравенство и является одним из основных методов решения уравнений и неравенств. Для уравнений приведённую выше таблицу 2 можно теперь заменить таблицей 3 (с. 18).

Замечание. Одной из наиболее распространённых ошибок при записи решений уравнений и неравенств является использование знаков следования и равносильности при переходе от уравнения (неравенства, системы) с одной переменной к уравнению (неравенству, системе) с другой переменной (как правило, после выполнения замены переменной). Приведём пример такого ошибочного использования:

«пусть $t = \sin x$, тогда $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0$».

Таблица 3

Данное уравнение	*Равносильная система*
$\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$	$\begin{cases} g(x)\neq 0, \\ f(x)=0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)=(g(x))^2 \end{cases}$
$\log_{a(x)} f(x)=b$	$\begin{cases} a(x)>0, \\ a(x)\neq 1, \\ f(x)=(a(x))^b \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert=g(x)$	$\begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x), \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}$

Ясно, что множества корней уравнений $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ и $2t^2 - 3t + 1 = 0$ различны, поэтому эти уравнения не являются равносильными. Использование знака равносильности в данном случае может быть расценено экспертами, проверяющими вариант ЕГЭ, как математическая ошибка, связанная с незнанием или непониманием определения равносильности. Неправильным в данном случае будет и использование знака следования: уравнение $2t^2-3t+1=0$ не является, очевидно, следствием уравнения $2\sin^2 x-3\sin x+1=0$, поскольку множество корней тригонометрического уравнения не содержится в множестве корней квадратного. К сожалению, в огромном потоке литературы для подготовки к экзаменам подобные ошибки встречаются сплошь и рядом — даже в тех из них, где приводится определение равносильности уравнений и неравенств. Едва ли это связано с недостаточной квалифицированностью авторов, скорее, речь идёт о некритическом подходе к употреблению подобной символики и подмене знаками равносильности и следствия таких слов и словосочетаний, как «тогда», «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно», «следовательно», «поэтому» и им подобных.

Неравносильные преобразования уравнений и неравенств с одной переменной связаны в основном с сужением или расширением ОДЗ уравнения или неравенства. В случае сужения ОДЗ может произойти потеря решений (корней), в случае расширения ОДЗ — приобретение посторонних решений (корней). Поэтому при каждом преобразовании нужно внимательно следить за ОДЗ, не допуская сужения или расширения последней и руководствуясь следующими правилами.

1. *Перенос числа или одночлена из одной части уравнения или неравенства в другую с изменением знака (плюс или минус) перед этим числом или одночленом на противоположный — равносильное преобразование.*

2. *Приведение подобных слагаемых, не ведущее к изменению ОДЗ, — равносильное преобразование.*

3. *Умножение обеих частей неравенства на положительное число, а обеих частей уравнения на любое отличное от нуля число — равносильное преобразование.*

4. *Умножение обеих частей неравенства на отрицательное число с изменением знака неравенства на противоположный — равносильное преобразование.*

5. *Возведение обеих частей уравнения или неравенства в чётную степень (в частности, в квадрат) при условии неотрицательности каждой из этих частей и допустимых значениях переменной — равносильное преобразование.*

Например, если $g(x) \leqslant 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ не имеет решений в силу неотрицательности арифметического квадратного корня. Поэтому должно выполняться условие $g(x) > 0$. Но в этом случае обе части неравенства $\sqrt{f(x)} < g(x)$ неотрицательны, и возведение в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом,

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (g(x))^2. \end{cases}$$

Аналогично если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| \leqslant g(x)$ не имеет корней в силу неотрицательности модуля. Поэтому должно выполняться неравенство $g(x) \geqslant 0$. Но в этом случае обе части неравенства $|f(x)| \leqslant g(x)$ неотрицательны, и возведение в квадрат является равносильным преобразованием при допустимых значениях переменной. Таким образом, учитывая, что квадрат числа и квадрат модуля этого числа равны, получаем следующее равносильное преобразование:

$$|f(x)| \leqslant g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ (f(x))^2 \leqslant (g(x))^2. \end{cases}$$

Более подробно равносильные преобразования будут рассмотрены при изложении методов решения неравенств для каждой функционально-алгебраической линии школьного курса.

То, что приведение подобных слагаемых не должно вести к изменению ОДЗ, также весьма существенно. Например, если просто привести подобные слагаемые в неравенстве $x^2+\sqrt{x+2}\geqslant 4+\sqrt{x+2}$, то будут получены посторонние решения. Последнее связано с расширением ОДЗ: неравенство $x^2\geqslant 4$, в отличие от данного, не предполагает каких-либо ограничений на переменную, его решением является объединение промежутков $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Равносильное же преобразование будет таким:

$$x^2+\sqrt{x+2}\geqslant 4+\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geqslant 4,\\ x\geqslant -2.\end{cases}$$

С учётом второго неравенства системы получим правильный ответ: $\{-2\}\cup[2;+\infty)$.

Вообще, к изменению ОДЗ приводит не так много преобразований, поскольку входящих в школьную программу алгебраических выражений, требующих ограничений на переменную, всего три: это алгебраические дроби, иррациональные выражения с корнями чётной степени и логарифмические выражения. При преобразованиях, связанных с «освобождением» от корней чётной степени и логарифмов (т. е. с рационализацией иррациональных и логарифмических уравнений и неравенств), обычно происходит расширение ОДЗ, поэтому применение таких преобразований должно сопровождаться обязательным выписыванием соответствующих ограничений (условие неотрицательности алгебраического выражения под знаком корня чётной степени, условие положительности алгебраического выражения под знаком логарифма, условие положительности и неравенства единице алгебраического выражения в основании логарифма, условие неотрицательности обеих частей уравнения или неравенства при возведении их в квадрат или другую чётную степень).

Что касается алгебраических дробей, то их знаменатели лучше «не трогать», используя при решении уравнений условие равенства дроби нулю (дробь равна нулю, если её числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла). При решении неравенств, содержащих алгебраические дроби, грубой ошибкой является «избавление» от знаменателя: ведь его знак влияет на знак всей дроби и условия отличия знаменателя от нуля в таких случаях недостаточно: в самом деле, знак дроби $\frac{a(x)}{b(x)}$ зависит не только от знака её числителя, но и от знака её знаменателя. Переход от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>0$ к неравенству $a(x)>0$ (даже при условии $b(x)\neq 0$) означает, в сущности, умножение обеих частей неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>0$ на $b(x)$ с сохранением знака неравенства.

Но знак неравенства сохраняется только при условии $b(x)>0$, случай же $b(x)<0$ при таком преобразовании попросту игнорируется. Аналогично грубой ошибкой является переход, например, от неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>1$ к неравенству $a(x)>b(x)$, поскольку такое преобразование допустимо только при $b(x)>0$, а случай $b(x)<0$ при этом обычно даже не рассматривается, что приводит к потере решений или к появлению лишних решений. При решении дробно-рациональных неравенств обычно все алгебраические выражения переносятся в одну из частей неравенства и приводятся к общему знаменателю. Например, правильным началом решения неравенства $\frac{a(x)}{b(x)}>1$ является следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\frac{a(x)}{b(x)}>1 \Leftrightarrow \frac{a(x)}{b(x)}-1>0 \Leftrightarrow \frac{a(x)-b(x)}{b(x)}>0.$$

Более подробно дробно-рациональные неравенства будут рассмотрены в соответствующей главе.

К сужению ОДЗ в основном приводят преобразования, связанные с недостаточно чётко понятыми свойствами корней и логарифмов. Так, переход от корня из произведения к произведению корней может потребовать рассмотрения двух случаев, ведь подкоренное число неотрицательно, если числа $a(x)$ и $b(x)$ оба неотрицательны либо оба неположительны. Поэтому

$$\sqrt{a(x)b(x)}=\sqrt{a(x)}\sqrt{b(x)}$$

лишь при $a(x)\geqslant 0$ и $b(x)\geqslant 0$, а при $a(x)<0$ и $b(x)<0$ получаем

$$\sqrt{a(x)b(x)}=\sqrt{-a(x)}\sqrt{-b(x)}.$$

Аналогично переход от логарифма произведения к сумме логарифмов может также потребовать рассмотрения двух случаев:

$$\log_c(a(x)b(x))=\log_c a(x)+\log_c b(x)$$

при условиях $a(x)>0$ и $b(x)>0$ и

$$\log_c(a(x)b(x))=\log_c(-a(x))+\log_c(-b(x))$$

при $a(x)<0$ и $b(x)<0$. Уже из этих примеров ясно, что выполнение таких преобразований (подробнее о них говорится в главах, посвящённых иррациональным и логарифмическим неравенствам) требует внимательности, тщательности и аккуратности.

Наиболее общие методы решения неравенств с одной переменной, применимые к решению неравенств каждой из шести функционально-алгебраических линий школьного курса математики, будут рассмотрены в следующих параграфах этой главы.

Упражнения к § 1.1

1. а) Паша сказал, что написанное на доске неравенство имеет более 5 целочисленных решений, а Саша — что более 6. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

б) Маша сказала, что написанное на доске неравенство имеет менее 8 целочисленных решений, а Даша — что менее 9. Учитель ответил, что права только одна из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

2. а) Паша сказал, что написанное на доске неравенство имеет более 5 целочисленных решений, Саша — что более 6, а Витя — что более 7. Учитель ответил, что прав только один из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

б) Маша сказала, что написанное на доске неравенство имеет менее 9 целочисленных решений, Даша — что менее 8, а Глаша — что менее 7. Учитель ответил, что права только одна из них. Сколько целочисленных решений имеет это неравенство?

3. а) Перед днём рождения Иры Лена сказала, что Ире подарят не меньше 9 кукол, а Вера — что не больше 7. Сколько кукол подарили Ире, если и Лена, и Вера ошиблись?

б) Перед хоккейным матчем Витя сказал, что будет заброшено не менее 12 шайб, а Ваня — что не более 10. Сколько шайб было заброшено, если и Витя, и Ваня ошиблись?

4. а) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Алмаз», если из следующих четырёх утверждений о результате матча хоккейных команд «Рубин» и «Алмаз» три истинны, а одно — нет:

1) выиграл «Рубин»;
2) матч закончился вничью;
3) в матче было заброшено 9 шайб;
4) «Рубин» пропустил больше трёх шайб.

б) Определите, сколько шайб было заброшено в ворота команды «Рубин», если из следующих четырёх утверждений о результате матча хоккейных команд «Рубин» и «Алмаз» три истинны, а одно — нет:

1) выиграл «Алмаз»;
2) матч закончился вничью;
3) в матче было заброшено 11 шайб;
4) «Рубин» забросил больше четырёх шайб.