МАТЕМАТИКА

2017

ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

профильный уровень

ЗАДАЧА 12

С. А. Шестаков

ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

ЕГЭ 2017 МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧА 12 профильный уровень

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Ш51

Шестаков С. А.

Ш51 ЕГЭ 2017. Математика. Производная и первообразная. Исследование функций. Задача 12 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2017. — 112 с.

ISBN 978-5-4439-1082-6

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2017. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2017 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2017.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по теме «Производная и первообразная. Исследование функций». Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

ISBN 978-5-4439-1082-6

Ответы:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

Образец написания:

1234567890–,

§ 1. Вычисление производных. Исследование функций с применением производной

Диагностическая работа

1. Найдите точку максимума функции
$$y = x^3 - 48x + 17.$$

2. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^3 - 27x \quad \text{на отрезке } [0; 4].$$

3. Найдите точку минимума функции
$$y = \frac{25}{x} + x + 25.$$

4. Найдите наибольшее значение функции
$$y = x + \frac{9}{x} \quad \text{на отрезке } [-4; -1].$$

5. Найдите точку максимума функции
$$y = 7 + 6x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1 \quad \text{на отрезке } [1; 9].$$

7. Найдите точку минимума функции
$$y = (0{,}5 - x)\cos x + \sin x,$$
принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

8. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4 \quad \text{на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

9. Найдите точку максимума функции
$$y = (x^2 - 17x - 17)e^{7-x}.$$

10. Найдите наименьшее значение функции
$$y = (x - 13)e^{x-12} \quad \text{на отрезке } [11; 13].$$

11. Найдите точку минимума функции
$$y = x - 5\ln x.$$

12. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 5 - 7x + 7\ln(x + 3)$$
на отрезке $[-2{,}5; 0]$.

Методические рекомендации

Можно выделить следующие основные группы задач по теме, вынесенной в название параграфа:

• исследование функции на экстремумы;

• исследование функции на возрастание/убывание;

• исследование функции на наибольшие и наименьшие значения (в том числе на отрезке);

• исследование функции с помощью графика ее производной (чтение графика производной).

Разница между первыми тремя и последней группами задач заключается лишь в способе задания функции. В более традиционных для школьных учебников задачах (первые три группы задач) функция задана аналитически, для решения задачи нужно найти производную, ее нули и промежутки знакопостоянства. Именно эти задачи и будут рассматриваться в пособии. В менее традиционных задачах, ставших очень популярными в последние годы (в том числе и благодаря ЕГЭ по математике), выводы о промежутках возрастания и убывания (т. е. промежутках монотонности), экстремумах функции, ее наименьших или наибольших значениях нужно сделать, исследуя заданный график производной этой функции.

Для успешного решения задач по теме необходимо уверенное владение навыками вычисления производных и решения неравенств. Исследование дифференцируемой функции на возрастание (убывание) сводится к определению промежутков знакопостоянства ее производной. Напомним соответствующие утверждения.

Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ возрастает на этом интервале (*достаточный признак возрастания функции*). *Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала, то функция $y = f(x)$ убывает на этом интервале* (*достаточный признак убывания функции*).

Решение задач на нахождение точек максимума и минимума (точек экстремума) функции основывается на следующих утверждениях.

Признак максимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка максимума функции f* (*упрощенная формулировка*: *если в точке x_0 производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума*).

Признак минимума. *Если функция f непрерывна в точке x_0, $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ на интервале $(x_0; b)$, то x_0 — точка минимума функции f* (*упрощенная формулировка*: *если в точке x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 — точка минимума*).

Условие непрерывности в точке x_0 является существенным. Если это условие не выполнено, точка x_0 может не являться точкой максимума (минимума), даже если функция f определена в ней и производная меняет знак при переходе через x_0. В самом деле, рассмотрим функцию

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Хотя эта функция определена в точке $x=0$ и в этой точке производная $f'(x)=2x$ меняет знак с минуса на плюс, эта точка не является точкой минимума.

Точками максимума и минимума являются лишь точки области определения функции, и «ординат» эти точки иметь, разумеется, не могут. Тем не менее, иногда учащиеся называют, например, точку минимума функции $y=x^2+3$ не «точка 0», а «точка $(0;3)$», подразумевая точку графика функции. Такое утверждение является ошибочным.

Значение функции в точке минимума называется *минимумом* функции, а значение в точке максимума — *максимумом* функции.

Если функция возрастает (убывает) на каждом из двух промежутков, то на их объединении она далеко не всегда является возрастающей (убывающей). Например, о функции $y=\operatorname{tg}x$ очень часто приводятся следующие ошибочные утверждения: «функция $y=\operatorname{tg}x$ возрастает на всей области определения», «функция $y=\operatorname{tg}x$ возрастает на объединении промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$». Если бы эти утверждения были верны, то из неравенства $2>1$ следовало бы, что $\operatorname{tg}2>\operatorname{tg}1$, а это не так. Аналогично обстоит дело с функцией $y=\frac{1}{x}$: вывод о том, что она убывает на множестве $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, является математической ошибкой. В самом деле, из того, что $2>-3$, отнюдь не следует, что $\frac{1}{2}<\frac{1}{-3}$, и, следовательно, функция $y=\frac{1}{x}$ не является убывающей на объединении промежутков $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Перечислять промежутки возрастания лучше, используя точку, точку с запятой или союз «и», а не знак объединения множеств. Впрочем, это совет скорее на будущее, на случай, если задача на исследование функций когда-нибудь попадет во вторую часть ЕГЭ по математике и будет требовать полного решения.

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно вычислить ее значения в точках экстремума, принадлежащих отрезку, и значения на концах отрезка. Наибольшее (наименьшее) из вычисленных значений и будет наибольшим (соответственно наименьшим) значением функции на отрезке. Для функции, непрерывной на интервале, аналогичное утверждение справедливо далеко не всегда. В качестве примера рассмотрим функцию $y=\operatorname{tg}x$ на интервале $(0;1)$. На этом интервале функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений. Действительно, если предположить, что в точке x_0 функция достигает, например, наибольшего значения, то это наибольшее значение равно $y(x_0)=x_0$. Но тогда очевидно, что в любой точке $x_1\in(x_0;1)$ значение функции окажется больше, чем x_0, поскольку функция $y=\operatorname{tg}x$ является возрастающей.

Наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ обычно обозначаются символами $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ соответственно.

Из теоремы о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции следует, что если наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке равны числам m и M соответственно, то множеством значений функции на данном отрезке является отрезок $[m; M]$. Поэтому к решению задачи на отыскание множества значений функции, непрерывной на отрезке, также применим алгоритм вычисления наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

Рассмотрим еще одну типичную ситуацию. При исследовании на монотонность непрерывной и дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $y = 3x^4 - 4x^3$ в ответе нужно указать только два промежутка монотонности: $(-\infty; 1]$, на котором функция убывает, и $[1; +\infty)$ — промежуток возрастания. Точка 0, хотя и является критической, не будет концом промежутка монотонности, так как производная в этой точке не меняет знак. Напротив, при исследовании функции $y = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ в ответе должны быть указаны три промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1]$ — промежуток убывания.

Значение в точке минимума функции, принадлежащей отрезку, вовсе не обязательно является наименьшим значением функции на этом отрезке. Например, для функции $y = x^3 - 3x$ наименьшим значением на отрезке $[-5; 2]$ является вовсе не $y(1) = -2$ (значение в точке минимума), а $y(-5) = -110$. Разумеется, аналогичное замечание справедливо и для точек максимума.

Для решения задачи 14 может оказаться полезным следующее свойство непрерывных функций: *если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке I единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой минимума, то в ней достигается наименьшее значение функции на данном промежутке*. Аналогичное утверждение справедливо для точки максимума и наибольшего значения функции. Например, если функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a; b]$, имеет на промежутке $(a; b)$ единственную точку экстремума x_0 и эта точка является точкой максимума функции, то наибольшее значение функции на отрезке $[a; b]$ равно $f(x_0)$.

Иногда при решении задач на исследование функций оказывается, что на данном промежутке точек экстремума нет. Такой ситуации не надо пугаться: она означает, что на этом промежутке производная принимает значения одного знака, т. е. функция является монотонной на нем. Остается заметить, что если функция возрастает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в правом конце отрезка, а наименьшее — в левом; если функция убывает на отрезке, то наибольшее значение на нем достигается в левом конце отрезка, а наименьшее — в правом. Например, пусть требуется найти наибольшее значение функции

$$y = 6\sqrt{2}\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$$

на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$. Производная этой функции есть $y' = 6\sqrt{2}\cos x - \frac{40}{\pi}$. Поскольку $\pi < 4$, получим, что $\frac{40}{\pi} > 10$. Но $6\sqrt{2}\cos x = \sqrt{72}\cos x < \sqrt{81}\cos x$, т. е.

$$6\sqrt{2}\cos x < 9\cos x \leqslant 9.$$

Поэтому $y' < 0$ при любом действительном значении аргумента. Значит, функция $y = 9\sin x - \frac{40}{\pi}x + 49$ является убывающей на всей числовой прямой и своего наибольшего значения на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ достигает в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Таким образом,

$$\max_{\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{40}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + 49 = 45.$$

Особое место в ряду задач на вычисление наибольших и наименьших значений занимают «текстовые» задачи (как правило, с геометрическим содержанием). Обычно в таких задачах требуется найти наибольшее или наименьшее возможное значение некоторой величины. При этом искомая величина рассматривается как функция некоторой другой величины. Так, например, если известен периметр p прямоугольника, то его площадь можно рассматривать как функцию $S(x) = x \cdot \frac{p - 2x}{2}$, где x — одна из сторон прямоугольника. Исследовав эту функцию, можно установить, какой из всех возможных прямоугольников данного периметра имеет наибольшую площадь. Для рассматриваемой задачи это можно сделать и без применения производной, поскольку функция площади является квадратичной функцией с отрицательным коэффициентом при второй степени аргумента. Поэтому наибольшее значение достигается в абсциссе вершины параболы, являющейся графиком функции, т. е. в точке $x = \frac{p}{4}$. Следовательно, одна из сторон прямоугольника равна четверти периметра. Но тогда и любая другая сторона будет равна $\frac{p}{4}$. Таким образом, из всех прямоугольников данного периметра p наибольшую площадь $\frac{p^2}{16}$ имеет квадрат. Другие задачи на вычисление наибольших и наименьших значений функции без применения производной будут рассмотрены в следующем параграфе.

Целые рациональные функции. Решения задач 1 и 2 диагностической работы

1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 48x + 17.$$

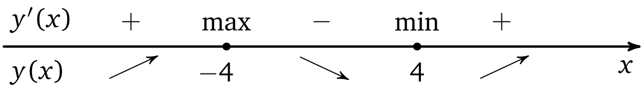
Решение. Найдем производную данной функции:

$$y' = 3x^2 - 48.$$

Определим промежутки знакопостоянства производной, разложив полученное выражение на множители:

$$3x^2 - 48 = 3(x^2 - 16) = 3(x+4)(x-4).$$

В точке $x = -4$ производная меняет знак с плюса на минус, следовательно, эта точка и является единственной точкой максимума.



Ответ: -4.

2. Найдите наименьшее значение функции

$$y = x^3 - 27x$$

на отрезке $[0; 4]$.

Решение. Найдем производную функции

$$y = x^3 - 27x$$

и воспользуемся формулой разности квадратов:

$$y' = 3x^2 - 27, \quad y' = 3(x-3)(x+3).$$

Производная меняет знак в точках $x = -3$ и $x = 3$. Отрезку $[0; 4]$ принадлежит только точка $x = 3$, в которой производная меняет знак с минуса на плюс. Таким образом, точка $x = 3$ является точкой минимума и единственной точкой экстремума на данном отрезке. Значит, своего наименьшего значения на данном отрезке функция достигает именно в этой точке. Найдем наименьшее значение:

$$y(3) = 3^3 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Ответ: -54.

Содержание