М. Е. Томилина

Средняя школа

Справочник по математике

5–9 классы

Литера

Наглядные решения трудных задач и примеров по алгебре и геометрии

Обобщённые материалы для подготовки к ГИА и ЕГЭ

Основные формулы и графики

УДК 372.851
ББК 22.1
Т56

Томилина М. Е.

Т56 Справочник по математике. 5—9 классы. — СПб.: Издательский Дом «Литера», 2014. — 240 с. — (Серия «Средняя школа»).

ISBN 978-5-407-00432-5

ISBN 978-5-407-00432-5

СОДЕРЖАНИЕ

АЛГЕБРА

ГЕОМЕТРИЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ

АЛГЕБРА

§ 1. Множества

1. Понятие *множества* в математике относится к неопределяемым. Объекты, из которых состоит множество, называют *элементами* этого множества. Тот факт, что элемент a — элемент множества A, записывается с помощью знака принадлежности — $\in$: $a \in A$. Множества обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, а их элементы — малыми.

Множество задано, если перечислены все его элементы или указано свойство, с помощью которого можно установить, принадлежит ли данный элемент этому множеству. Если множество задано первым из указанных способов, то его элементы записывают через запятую в фигурных скобках. При этом порядок записи элементов множества не имеет значения.

Множества называются *равными,* если они состоят из одних и тех же элементов. Например, множества $A = \{2,\ 7,\ 10\}$ и $B = \{7,\ 2,\ 10\}$ равные, пишут: $A = B$. В записи $A = \{x\colon x \in Z,\ x > -4\}$ отмечается, что множество A состоит из всех таких элементов x, которые являются целыми числами, бóльшими, чем число -4 (двоеточие после x заменяет слова «таких, что»).

Множества бывают *конечными* и *бесконечными.*

Вводится также понятие *пустого* множества, т. е. множества, в котором нет ни одного элемента. Пустое множество обозначается так: $\varnothing$.

Пример пустого множества

Множество $M = \{x\colon x \in N,\ 5 < x < 6\}$ — пустое, т. к. между числами 5 и 6 нет ни одного натурального числа.

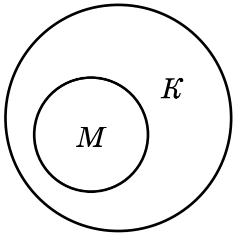

Рис. 1

2. Множество M называют *подмножеством* множества K, если каждый элемент множества M является элементом множества K. Пишут: $M \subset K$ или $K \supset M$ (читают: множество M содержится в множестве K или K содержит M). Если изображать множества кругами (их называют *кругами Эйлера*), то круг, изображающий множество M, будет целиком располагаться внутри круга, изображающего множество K (рис. 1).

Любое множество является собственным подмножеством, а пустое множество есть подмножество любого множества: $A \subset A$; $\varnothing \subset A$.

Пример множества, являющегося подмножеством другого

Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 4, 6\}$.

Тогда $B \subset A$.

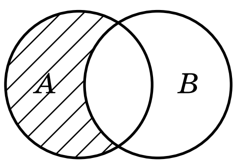

Рис. 2

3. *Разностью множеств* A и B называют множество M, состоящее из всех элементов A, не принадлежащих B. На рис. 2 множество M заштриховано.

Пишут: $M = A \setminus B$.

Пример разности множеств

Пусть $A = \{1, 3, 6, 9, 12\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$.

Тогда $A \setminus B = \{1, 6, 12\}$.

Если $B \subset A$, то $A \setminus B$ называют *дополнением* множества B до множества A. На рис. 3 дополнение B до A заштриховано.

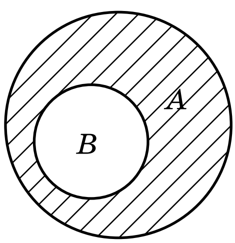

Рис. 3

4. *Объединением множеств* называют множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств. Объединение множеств A и B обозначается с помощью символа $\cup$: $\boldsymbol{A \cup B}$. На рис. 4 объединение множеств $\boldsymbol{A \cup B}$ заштриховано.

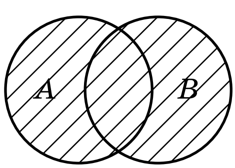

Рис. 4

Пример объединения множеств

Пусть $A = \{4, 6, 8, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12\}$.

5. *Пересечением множеств* называют множество, состоящее из всех общих элементов этих множеств. Пересечение множеств A и B записывают с помощью символа $\cap$: $A \cap B$. На рис. 5 пересечение множеств $A \cap B$ заштриховано.

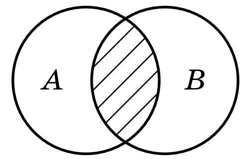

Рис. 5

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A и B называют *непересекающимися*.

Пример пересечения множеств

Пусть $A = \{4, 6, 8, 12\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тогда $A \cap B = \{4, 6\}$.

§ 2. Числа

1. *Натуральные числа*

Натуральный ряд: 1; 2; 3; 4; 5; 6; ... — ряд чисел, начиная с 1, где каждое следующее число на единицу больше предыдущего. Множество чисел, используемых при счёте предметов, называют *множеством натуральных чисел*. Наименьшее натуральное число **1,** наибольшего числа **нет.** Множество натуральных чисел обозначают N.

Натуральные числа изображают точками на координатном луче. *Координатным* называют луч OX, на котором от точки O отложен произвольный отрезок, называемый *единичным*. Правому концу этого отрезка соответствует число 1. От этой точки откладывают такой же отрезок, правому концу которого соответствует число 2 и т. д. (рис. 6).

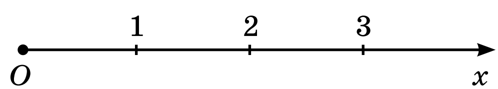

Рис. 6

На координатном луче соседние точки, соответствующие натуральным числам, находятся на одном и том же расстоянии, равном длине единичного отрезка. Число, соответствующее каждой из точек, называют *координатой точки*. Координата точки A на координатном луче показывает, на каком расстоянии (в единичных отрезках) находится точка A от точки O. Точка O — начало отсчёта или начало координат. Если координата точки M — число 7, то пишут: $M(7)$. Точке O соответствует число 0, т. е. $O(0)$. Число нуль не является натуральным.

Сравнение натуральных чисел

Обычно координатный луч изображают горизонтально слева направо. Если он расположен так, то большему натуральному числу соответствует на нём точка, расположенная правее, и наоборот: чем правее точка на координатном луче, тем больше её координата.

2. *Целые числа*

Рассмотрим горизонтальную прямую, которая получится, если построить координатный луч и луч, дополнительный к нему. Справа от точки O располагаются натуральные числа. Отложим единичный отрезок на этой прямой слева от точки O, получим точку B, расположенную от O на расстоянии, равном одному единичному отрезку. Координаты всех точек, расположенных слева от точки O, записывают со знаком «−», а координаты точек, расположенных на прямой справа от O, записывают со знаком «+»: $A(+1)$, $B(-1)$.

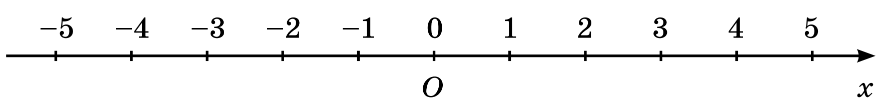

Рис. 7

Полученная прямая называется *координатной прямой*. Числа со знаком «+» называют *положительными*, числа со знаком

«−» — *отрицательными*. Число 0 отделяет на координатной прямой положительные числа от отрицательных чисел, не являясь при этом ни положительным, ни отрицательным числом. Числа, отличающиеся друг от друга только знаком, называются *противоположными*. У каждого числа есть только одно, ему противоположное. Число 0 противоположно самому себе. Число, противоположное числу n, обозначают $-n$. Например, числа 18 и −18, −300 и 300 являются противоположными. Множество, состоящее из натуральных чисел, им противоположных, и числа 0, называется *множеством целых чисел*. Это множество обозначают $\boldsymbol{Z}$. Множество $\boldsymbol{N}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{Z}$. В множестве $\boldsymbol{Z}$ нет ни наименьшего числа, ни наибольшего.

Модулем числа $\boldsymbol{c}$ называется расстояние (в единичных отрезках) от начала отсчёта до точки $A(c)$. Модуль числа c обозначают $|c|$, $|c| \geq 0$.

Модуль положительного числа $\boldsymbol{n}$ равен самому числу n.

Модуль отрицательного числа $\boldsymbol{n}$ равен противоположному числу $-n$.

Модуль числа **0** равен нулю (0).

Модули противоположных чисел равны $|c| = |-c|$.

Сравнение целых чисел

Если координатная прямая расположена горизонтально, то точка с большей координатой располагается правее точки с меньшей координатой и наоборот: если точка $A(x)$ расположена правее точки $B(y)$, то $x > y$. Любое положительное число больше 0 и больше любого отрицательного числа (любое отрицательное число меньше 0 и меньше любого положительного). Из двух положительных чисел больше то, у которого модуль больше; из двух отрицательных чисел больше то, у которого модуль меньше.

3. *Рациональные числа*

Рациональным называется число, которое можно представить в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем.

Любое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной или бесконечной периодической десятичной дроби. Например, числа 0,5; −8; $\frac{3}{4}$; $-\frac{2}{3}$; 7, (12) — рациональные. Любое целое число k является рациональным, т. к. его можно представить в виде дроби с числителем k и знаменателем 1. Множество всех рациональных чисел обозначают $\boldsymbol{Q}$. $\boldsymbol{Z}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{Q}$.

Рациональные числа можно изобразить точками координатной прямой.

Сравнение рациональных чисел

Любое положительное рациональное число больше 0 и больше любого отрицательного рационального (любое отрицательное рациональное число меньше 0 и меньше любого положительного рационального). Из двух отрицательных рациональных чисел больше то, у которого модуль меньше.

4. *Действительные числа*

Иррациональным называется число, которое нельзя представить в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем. Любая непериодическая десятичная дробь и ей противоположная являются иррациональными числами. Например, бесконечные дроби 0,100100010001..., −1,2345678... являются иррациональными. Множество, состоящее из множества рациональных и множества иррациональных чисел, называют *множеством действительных чисел*. Это множество обозначают $\boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{Q}$ является подмножеством множества $\boldsymbol{R}$.

Сравнение действительных чисел

Действительные числа, записанные с помощью бесконечных десятичных дробей, сравнивают по правилу сравнения конечных десятичных дробей (поразрядно) и правилам сравнения рациональных чисел.

§ 3. Действия с числами

1. *Арифметические действия с числами*

Арифметическими называют действия ***сложение, вычитание, умножение, деление.***

1) Действия с натуральными числами

• ***Сложение***

Сложение можно записать в виде $a + b = c$ (a и b называют *слагаемыми*, $a + b$ и c — *суммой*).

• ***Вычитание***

Вычесть из числа a число b — значит найти такое число c, которое в сумме с b даёт a. В записи $a - b = c$ a называют *уменьшаемым*, b называют *вычитаемым*, $a - b$ и c — *разностью*. На множестве натуральных чисел вычитание может быть выполнено, только если уменьшаемое больше вычитаемого.

• ***Умножение***

Умножить число a на число b — значит найти сумму b слагаемых, каждое из которых равно a. В записи $a \cdot b = c$ a и b называют *множителями*, $a \cdot b$ и c — *произведением.*

• ***Деление***

Разделить число a на число b — значит найти такое число c, которое при умножении на b даёт a. В записи $a : b = c$ a называют *делимым*, b — *делителем*, $a : b$ и c — *частным*. На множестве натуральных чисел деление не всегда выполнимо.

• ***Деление с остатком***

Если a не делится нацело на b, то находят наибольшее натуральное число, которое при умножении на b даёт число m, не превосходящее a. Число m называется *неполным частным*. Разность между a и $b \cdot m$ называется *остатком* (k). Остаток всегда меньше делителя. Соотношение между делимым, делителем, неполным частным и остатком можно записать в виде равенства: $a = b \cdot m + k$, где $k < b$.

• ***Делители и кратные***

Если деление на множестве натуральных чисел N выполнимо, то говорят, что a делится на b *нацело* или *без остатка*. Число b называют *делителем числа a, a — кратным числа b.*

У каждого натурального числа имеется бесконечно много кратных. Например, кратными числу 13 являются числа 13, 26, 39, 52, 65, ...

Число 1 является делителем любого натурального числа, делителем любого натурального числа является само это число. У числа 1 только один делитель. Каждое из остальных натуральных чисел имеет не менее двух делителей.

• ***Признаки делимости натуральных чисел***

Признак делимости на 2

Если число оканчивается на 0, 2, 4, 6, 8, то оно делится на 2; и обратно: если число делится на 2, то оно оканчивается на 0, 2, 4, 6, 8. Натуральные числа, делящиеся на 2, называются *чётными*, остальные — *нечётными*.

Примеры чётных и нечётных чисел. Числа 3254, 70 018, 134 506 — чётные, а 469, 23 531, 908 765 — нечётные.

Формула чётного числа n: $\boldsymbol{n = 2k}$, где $k \in \boldsymbol{N}$.

Формула нечётного числа n: $\boldsymbol{n = 2k + 1}$, где $k \in \boldsymbol{N}$, $k = 0$.

Признак делимости на 3

Если сумма цифр числа делится на 3, то это число делится на 3 (обратное утверждение верно).

Примеры. Число 5814 делится на 3 ($5 + 8 + 1 + 4 = 18 \rightarrow$ сумма цифр числа делится на 3), а 7733 не делится на 3 ($7 + 7 + 3 + 3 = 20 \rightarrow$ сумма цифр числа не делится на 3).

Признак делимости на ***4***

Если две последние цифры числа два нуля (00) или составляют число, делящееся на 4, то и само число делится на 4 (обратное утверждение верно).

Примеры. Числа 732, 9432, 567 132 делятся на 4, т. к. 32 делится на 4. Числа 514, 24 314, 8 373 614 не делятся на 4, т. к. 14 не делится на 4. Числа 1200, 26 000 делятся на 4, т. к. они оканчиваются двумя нулями, т. е. делятся на 100, а число 100 делится на 4.

Признак делимости на ***5***

Если число оканчивается на 5 или на 0, то оно делится на 5 (обратное утверждение верно).

Примеры. Числа 420, 695, 3985, 25 055, 19 400 делятся на 5, а числа 307, 98 051 — нет.

Признак делимости на ***9***

Если сумма цифр числа делится на 9, то это число делится на 9 (обратное утверждение верно).

Примеры. Число 5814 делится на 9 ($5 + 8 + 1 + 4 = 18 \rightarrow$ сумма цифр делится на 9); число 7743 — нет ($7 + 7 + 4 + 3 = 21 \rightarrow$ сумма цифр не делится на 9).

Признак делимости на ***10***

Если число оканчивается на 0, то оно делится на 10 (обратное утверждение верно).

Примеры. Числа 420, 19 400 делятся на 10, а числа 305, 98 051 — нет.

Признак делимости на ***11***

Если сумма цифр числа, стоящих на чётных местах, равна сумме цифр числа, стоящих на нечётных местах, или разнится от неё на число, делящееся на 11, то данное число делится на 11 и обратно.

Примеры. Число 123 750 делится на 11, т. к. $1 + 3 + 5 = 2 + 7 + 0$. Число 74 778 тоже делится на 11 ($7 + 7 + 8 = 22$, $4 + 7 = 11$, $22 - 11 = 11 \rightarrow$ делится на 11). Число 14 141 не делится на 11 ($1 + 1 + 1 = 3$, $4 + 4 = 8$, $8 - 3 = 5 \rightarrow$ не делится на 11).

• ***Простые и составные числа***

Натуральное число, имеющее только два делителя (число 1 и само себя), называют *простым*. Натуральное число, имеющее больше двух различных делителей, называют *составным*. Например, числа 2, 7, 23, 47 — простые, а числа 12, 745, 3333 — составные. Число 1 не является ни простым, ни составным; все остальные натуральные числа являются либо простыми, либо составными.

• ***Разложение числа на простые множители***

Любое составное число можно представить в виде произведения двух чисел. Если они оба простые, то разложение числа на простые множители закончено, если одно из них или оба составные, раскладываем их на простые множители и т. д., пока все множители в произведении не будут простыми.

Пример. Разложить на простые множители число 260.

$260 = 10 \cdot 26 = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5$. Какими бы способами мы ни раскладывали число на простые множители, эти разложения могут отличаться друг от друга только порядком сомножителей. Для разложения числа на простые множители можно использовать признаки делимости и таблицу простых чисел.

◊ *Алгоритм разложения числа на простые множители «столбиком»*

Записывают число, справа проводят вертикальную линию, за которой пишут какой-нибудь простой делитель данного числа, а под самим числом — частное от его деления на выбранный делитель и т. д., пока частное не будет 1.

Посмотрите, например, какие записи получаются при разложении на простые множители числа 260:

$$\begin{array}{r|l} 260 & 2 \\ 130 & 2 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Значит, $260 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$.

• ***Взаимно простыми числами*** называются числа, в разложениях которых на простые множители нет одинаковых множителей.

• ***Наибольший общий делитель***

Наибольшим общим делителем (сокращённо НОД) нескольких чисел называется наибольшее натуральное число, на которое каждое из этих чисел делится без остатка.

◊ *Алгоритм нахождения НОД нескольких чисел*

Для нахождения НОД нескольких натуральных чисел надо:

1) разложить каждое из этих чисел на простые множители;

2) в разложении любого из чисел вычеркнуть те, которые не входят в разложения других чисел;

3) перемножить оставшиеся в разложении этого числа множители.

Пример. Найти НОД чисел 24 и 60.

1) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;

2) из разложения числа 24 вычеркнем одну двойку;

3) перемножим оставшиеся в этом разложении множители 2, 2 и 3, получится 12; значит, НОД (24, 60) = 12.

Заметим, что если бы при выполнении второго шага мы вычёркивали множители из разложения числа 60, то вычеркнули бы 5 и получили тот же самый НОД.

• ***Наименьшее общее кратное***

Наименьшим общим кратным (сокращённо НОК) нескольких натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, кратное каждому из этих чисел.

◊ *Алгоритм нахождения НОК нескольких чисел*

Для нахождения НОК нескольких натуральных чисел надо:

1) разложить каждое из этих чисел на простые множители;

2) выписать разложение любого из чисел и добавить к нему недостающие множители из разложений других чисел;

3) перемножить все полученные множители.

Пример. Найти НОК чисел 24 и 60.

1) $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;

2) выписываем множители, например, числа 24: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$;

3) добавляем к ним 5: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$;

4) перемножаем и получаем 120; значит, НОК (24, 60) = 120.

Заметим, что если бы при выполнении второго шага мы выписали множители из разложения числа 60, то добавили бы из разложения 24 множитель 2, а при умножении $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$ получили бы тоже 120.

2) Действия с положительными рациональными числами

Обыкновенные дроби

При делении любых двух натуральных чисел частное можно записать с помощью горизонтальной (дробной) черты, например: $5 : 9 = \frac{5}{9}$; $6 : 5 = \frac{6}{5}$; $8 : 4 = \frac{8}{4} = 2$. В последнем случае результат является натуральным числом. Если же, как в первых двух примерах, деление нацело невозможно, говорят, что получили *обыкновенную дробь* или просто *дробь*. Число над дробной чертой называется *числителем* дроби, под чертой (внизу) — *знаменателем*. Любое натуральное число можно представить в виде обыкновенной дроби (например, с числителем, равным этому числу, и знаменателем, равным 1).

К понятию дроби можно подойти иначе: если единицу (одну целую) разделить на 9 равных частей и взять 5 таких частей, то полученная часть целой единицы выразится числом $\frac{5}{9}$, которое называется *обыкновенной дробью*. При таком подходе знаменатель дроби показывает, на сколько равных частей разделили целое, а числитель — сколько таких частей взяли.

Нахождение дроби от числа

Для того чтобы найти дробь (часть) от числа, можно это число разделить на знаменатель дроби и полученное умножить на её числитель. Иначе: для того чтобы найти дробь (часть) от числа, можно это число умножить на дробь, соответствующую части.

Пример. Найти $\frac{2}{9}$ от числа 18.

$18 : 9 \cdot 2 = 4$ $\left(18 \cdot \frac{2}{9} = 4\right)$

Нахождение числа по его дроби

Для того чтобы найти число по его части (дроби), можно это число разделить на числитель дроби и полученное умножить на её знаменатель. Иначе: для того чтобы найти число по его части (дроби), можно это число разделить на дробь, соответствующую части.

Пример. Найти число, если $\frac{2}{3}$ его равны 18.

$18 : 2 \cdot 3 = 27$ $\left(18 : \frac{2}{3} = 27\right)$

Дроби с числителем, равным 1, называются *долями*. Доля $\frac{1}{2}$ называется *половиной*, $\frac{1}{3}$ — *третью*, $\frac{1}{4}$ — *четвертью*.

Правильные и неправильные дроби

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называют *правильной;* если же числитель дроби не меньше (больше или равен) знаменателя, дробь называют *неправильной*. Например, дроби $\frac{7}{10}$, $\frac{19}{28}$ — правильные, дроби $\frac{7}{3}$, $\frac{5}{5}$ — неправильные.

• Основное свойство дроби, сокращение дробей, приведение дроби к новому знаменателю

Основным свойством дроби называют следующее утверждение: если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{a}{b}=\frac{a:n}{b:n}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}$$

Сокращение дробей

Сократить дробь — значит разделить её числитель и знаменатель на их общий делитель, отличный от 1. Если числитель и знаменатель дроби взаимно простые числа, то дробь нельзя сократить; в этом случае дробь называется *несократимой*. Если числитель и знаменатель дроби разделить на их НОД, то получится несократимая дробь.

◊ *Алгоритм сокращения обыкновенной дроби*

Для того чтобы сократить дробь, надо:

1) найти НОД её числителя и знаменателя;

2) если НОД $\neq 1$, то разделить её числитель и знаменатель на НОД.

Примеры сокращения дробей

1) Для дроби $\frac{18}{60}$ НОД (18, 60) = 6, поэтому $\frac{18}{60}=\frac{3}{10}$.

2) Для дроби $\frac{7}{21}$ НОД (7, 21) = 7, поэтому $\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$.

Приведение дроби к новому знаменателю

Привести дробь к новому знаменателю — значит умножить её числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, отличное от нуля. Дробь можно привести к любому знаменателю, кратному знаменателю данной дроби. Число, на которое умножают знаменатель дроби, чтобы получить новый знаменатель, называют *дополнительным множителем*. При приведении дроби к новому знаменателю её числитель и знаменатель умножают на дополнительный множитель.

Пример. Привести дробь $\frac{5}{7}$ к знаменателю 21.

Найдём дополнительный множитель, разделив новый знаменатель на знаменатель данной дроби: $21 : 7 = 3$. Умножим и числитель и знаменатель данной дроби на 3: $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21}$.

Приведение дробей к наименьшему общему знаменателю

Любые несколько дробей можно привести к одному и тому же (общему) знаменателю (не меньшему каждого из знаменателей данных дробей), который является каким-либо общим кратным знаменателей. Обычно дроби приводят к наименьшему общему знаменателю.

◊ *Алгоритм приведения дробей к наименьшему общему знаменателю*

Для того чтобы привести дроби к наименьшему общему знаменателю, надо:

1) найти НОК знаменателей данных дробей;

2) найти дополнительный множитель для каждой дроби, разделив найденное НОК на каждый из знаменателей;

3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель.

Пример. Привести дроби $\frac{11}{140}$ и $\frac{5}{42}$ к наименьшему общему знаменателю.

1) Найдём НОК (140, 42), разложив знаменатели на простые множители:

$140 = 14 \cdot 10 = 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5$; $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$;

НОК $(140, 42) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 420$;

2) найдём дополнительный множитель к первой дроби $420 : 140 = 3$, ко второй — $420 : 42 = 10$;

3) числитель и знаменатель первой дроби умножаем на 3, второй — на 10:

$$\frac{11}{140} = \frac{33}{420} \text{ и } \frac{5}{42} = \frac{50}{420}$$

• ***Сравнение дробей с одинаковыми знаменателями***

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми знаменателями меньше та, у которой числитель меньше.

• ***Сравнение дробей с одинаковыми числителями***

Из двух обыкновенных дробей с одинаковыми числителями меньше та, у которой знаменатель больше.

• ***Сравнение дробей с разными знаменателями***

Чтобы сравнить две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю и сравнить как дроби с одинаковыми знаменателями.

• ***Сравнение с 1 правильной и неправильной дробей***

Всякая правильная дробь меньше 1; всякая неправильная дробь, у которой числитель и знаменатель различные числа, больше 1.

• ***Выделение целой части из неправильной дроби***

Если числитель дроби кратен знаменателю, то её значение равно натуральному числу. Если числитель больше знаменаля, но не делится на него нацело, то можно выполнить операцию выделения целой части.

Правило выделения целой части из неправильной дроби

Для этого надо разделить числитель на знаменатель с остатком. Неполное частное будет целой частью полученной записи, остаток — числителем дробной части, а знаменатель данной дроби — знаменателем дробной части.

Пример. Выделить целую часть из $\frac{37}{5}$.

При делении 37 на 5 неполное частное равно 7, остаток равен 2. Значит, $\frac{37}{5} = 7\frac{2}{5}$. Число, содержащее целую и дробную части, называют *смешанным дробным числом* или *просто смешанным числом*.

Правило записи смешанного числа в виде неправильной дроби

Чтобы смешанное число записать в виде неправильной дроби, надо к произведению знаменателя и целой части прибавить числитель дробной части и записать полученную сумму в числитель, а знаменателем записать знаменатель дробной части данного смешанного числа.

Пример. Записать число $7\frac{2}{5}$ в виде неправильной дроби.

Найдём числитель: $5 \cdot 7 + 2 = 37$. Значит, $7\frac{2}{5} = \frac{7 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{37}{5}$.

• ***Сложение положительных рациональных чисел***

Для сложения обыкновенных дробей с равными знаменателями надо сумму их числителей записать в числитель, а знаменатель записать как у каждой из них. Если можно — сократить. Если получилась неправильная дробь, то из неё обычно выделяют целую часть.

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

Для сложения смешанных чисел с равными знаменателями дробных частей надо сложить целые части слагаемых, а в дробной части записать сумму дробных частей слагаемых. При этом если получили в дробной части неправильную дробь, надо по возможности её сократить и выделить из неё целую часть, прибавить выделенное целое к целой части суммы; записать результат в виде смешанного числа.

Примеры

1) $\frac{5}{17}+\frac{9}{17}=\frac{14}{17}$

2) $\frac{3}{20}+\frac{7}{20}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$

3) $\frac{7}{15}+\frac{13}{15}=\frac{20}{15}=1\frac{5}{15}=1\frac{1}{3}$ или $\frac{7}{15}+\frac{13}{15}=\frac{20}{15}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$

4) $5\frac{4}{9}+6\frac{8}{9}=11\frac{12}{9}=11+1\frac{3}{9}=12\frac{3}{9}=12\frac{1}{3}$

Для сложения обыкновенных дробей с разными знаменателями надо привести их к общему знаменателю и сложить как дроби с равными знаменателями.

Для сложения смешанных чисел с разными знаменателями дробных частей надо привести дробные части слагаемых к общему знаменателю и выполнить сложение как для смешанных чисел с одинаковыми знаменателями дробных частей.

Примеры

1) $\frac{5^{\backslash 3}}{7}+\frac{2^{\backslash 7}}{3}=\frac{15}{21}+\frac{14}{21}=\frac{29}{21}=1\frac{8}{21}$

2) $\frac{5}{22}+\frac{3^{\backslash 2}}{11}=\frac{5}{22}+\frac{6}{22}=\frac{11}{22}=\frac{1}{2}$

3) $\frac{7^{\backslash 3}}{10}+\frac{8^{\backslash 2}}{15}=\frac{21}{30}+\frac{16}{30}=\frac{37}{30}=1\frac{7}{30}$

4) $9\frac{7^{\backslash 4}}{15}+3\frac{7^{\backslash 3}}{20}=9\frac{28}{60}+3\frac{21}{60}=12\frac{49}{60}$

5) $3\frac{7^{\backslash 5}}{12}+2\frac{11^{\backslash 4}}{15}=3\frac{35}{60}+2\frac{44}{60}=5\frac{79}{60}=5+1\frac{19}{60}=6\frac{19}{60}$

• ***Вычитание положительных рациональных чисел***

На множестве положительных рациональных чисел вычитание выполнимо как и для натуральных чисел, только если уменьшаемое больше вычитаемого.

Правило вычитания обыкновенных дробей

Чтобы из обыкновенной дроби вычесть меньшую обыкновенную дробь, надо привести эти дроби к общему знаменателю и записать дробь, у которой в числителе — разность числителей, а в знаменателе — общий знаменатель этих дробей. Результат сократить по необходимости:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}$$

Примеры

1) $\frac{5}{21}-\frac{2}{21}=\frac{5-2}{21}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

2) $\frac{11^{\backslash 2}}{18}-\frac{7^{\backslash 3}}{12}=\frac{22}{36}-\frac{21}{36}=\frac{1}{36}$

Вычитание правильной обыкновенной дроби из 1 выполняется по правилу:

$$1-\frac{a}{n}=\frac{n}{n}-\frac{a}{n}=\frac{n-a}{n}$$

Примеры

1) $1-\frac{5}{9}=\frac{9}{9}-\frac{5}{9}=\frac{9-5}{9}=\frac{4}{9}$

2) $1-\frac{3}{41}=\frac{41-3}{41}=\frac{38}{41}$

Для вычитания правильной обыкновенной дроби $\frac{a}{b}$ *из натурального числа n, большего 1,* можно натуральное число записать в виде смешанного, целая часть которого равна $n-1$, а дробная часть $\frac{b}{b}$. Разностью является смешанное дробное число с целой частью $n-1$:

$$n-\frac{a}{b}=(n-1)+\frac{b}{b}-\frac{a}{b}=(n-1)+\frac{b-a}{b}$$

Пример

$8-\frac{3}{5}=7\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=7+\frac{5-3}{5}=7\frac{2}{5}$

Чтобы найти разность смешанных дробных чисел, надо их дробные части привести к общему знаменателю. Если дробная часть уменьшаемого больше дробной части вычитаемого, то целая часть результата равна разности целых частей уменьшаемого и вычитаемого, а дробная — разности их дробных частей. Если же дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого, то от целой части уменьшаемого занимают 1, а числитель его дробной части увеличивают на общий знаменатель дробных частей. Из целой части уменьшаемого вычитают целую часть вычитаемого, а из дробной части — дробную. Дробную часть результата по возможности сокращают.

Примеры

1) $5\frac{3^{\backslash 3}}{10}-3\frac{2^{\backslash 2}}{15}=5\frac{9}{30}-3\frac{4}{30}=2\frac{5}{30}=2\frac{1}{6}$

2) $9\frac{2^{\backslash 4}}{9}-4\frac{7^{\backslash 3}}{12}=9\frac{8}{36}-4\frac{21}{36}=8\frac{36+8}{36}-4\frac{21}{36}=4\frac{44-21}{36}=4\frac{23}{36}$