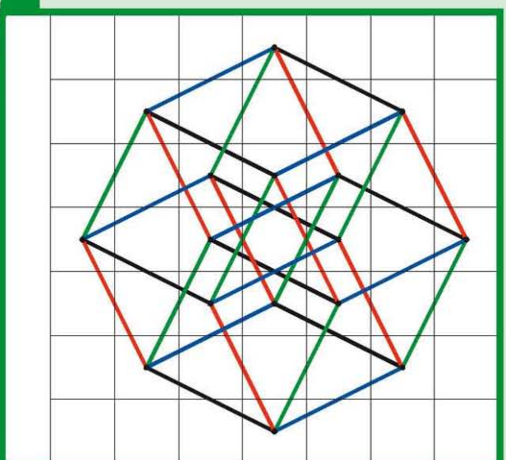
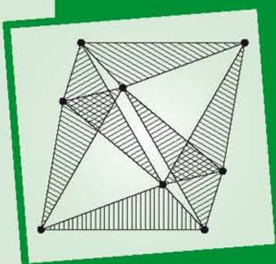
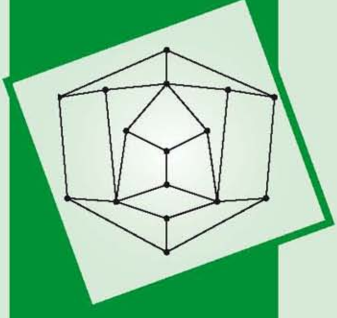
Элементы дискретной математики в задачах







А. А. Глибичук
А. Б. Дайняк
Д. Г. Ильинский
А. Б. Купавский
А. М. Райгородский
А. Б. Скопенков
А. А. Чернов

А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский,
А. Б. Купавский, А. М. Райгородский,
А. Б. Скопенков, А. А. Чернов

Элементы дискретной математики в задачах

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся
по направлению «Прикладные математика и физика», а также
по другим математическим и естественнонаучным направлениям
и специальностям и смежным направлениям и специальностям
в области техники и технологий

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 519.1
ББК 22.176
Э45

Авторский коллектив:

А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский, А. Б. Купавский,
А. М. Райгородский, А. Б. Скопенков, А. А. Чернов

Научные редакторы:

А. В. Шаповалов, И. Д. Шкредов

А. А. Глибичук и др.
Элементы дискретной математики в задачах
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
174 с.
ISBN 978-5-4439-3024-4

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель освоит основы важных теорий — как классических, так и современных.

Книга будет полезна студентам, руководителям и участникам кружков для старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады). Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам. Решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) будет полезно также всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий.

Подготовлено на основе книги: Элементы дискретной математики в задачах / А. А. Глибичук и др. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1024-6.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3024-4

Оглавление

Введение

Зачем эта книга? Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [ZSS, S2, J].

Книга будет полезна участникам кружков для младшекурсников и старшеклассников (в частности, ориентированных на олимпиады), а также их руководителям. Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

По нашему мнению, знание этих разделов комбинаторики также полезно всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом, работающим в наукоёмких отраслях информационных технологий. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий (ФИВТ) Московского физико-технического института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А. Б. Дайняк и А. М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А. Б. Скопенковым в Кировской ЛМШ, Московской выездной олимпиадной школе, школе «Интеллектуал», а также на кружках «Математический семинар» и «Олимпиады и математика».

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым комбинаторика приобретает новый облик, становясь серьезной научной дисциплиной. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический методы. Они лежат в основе самых важных комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

В параграфах второй половины книги рассказывается об активно развивающихся областях математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. С этой же целью приводятся *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

Используемый материал. Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой[1]; мы приводим все необходимые определения, выходящие за рамки школьной программы и редко изучаемые на кружках. Без определения используются только простейшие понятия и результаты теории чисел [GIM, §§ 8, 9], [Vi, §§ 1—3], [ZSS, § 2 «Делимость и деление с остатком», § 3 «Умножение по простому модулю»]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения, то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведённые задачи на данную тему.

Как устроена книга. Эту книгу необязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в § 3 и § 4, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конкретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в п. 2.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрастания сложности материала.

К многим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

Общие замечания к формулировкам задач. Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством*[2]. В таких случаях для дока-

[1] Часть материала (например, п. 1.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже шестиклассниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бо́льшей части книги). Разбирать эти решения с шестиклассниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

[2] Часто происходит обратное: формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, приводятся только *после* продолжительного

зательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKR, ZSS, L] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ, в котором работают авторы.

О литературе. В списке литературы мы приводим только те *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов, которые по тем или иным причинам мы чаще используем в преподавании. Также мы приводим ссылки на всю известную нам более серьёзную учебно-научную литературу. Но этот список также не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

В списке литературы [Ga, GKP, Gri, Hal, Har, KS, Mk, R1, R2, R3, R4, S5, S6, VS, w8] и [AM, GIM, I, J, JLR, KR, KZP, Mn, P, PS, R5, R6, S1, S7, S8, S9, Vi, ZSS] — базовые учебники и статьи по темам этой книги или по близким к ней темам, [AS, BM, B, BF, Gra, L, NPP, S4, So, Ve, w1—w7] — более продвинутая литература. Остальное — источники замечаний, основное содержание которых может быть не связано с этой книгой, и опубликованные ранние версии отдельных частей книги.

Благодарности. Мы благодарим за полезные замечания редакторов книги А. В. Шаповалова и И. Д. Шкредова, а также А. А. Полянского, М. Б. Скопенкова, И. Н. Шнурникова и членов редколлегии сборника «Математическое просвещение». Мы благодарим студентов за каверзные вопросы и указания на неточности. Мы благодарим А. Ю. Веснина за разрешение использовать рис. 9.

Грантовая поддержка.

А. А. Глибичук поддержан грантами Мол-а-вед № 12-01-33080 и грантом РФФИ № 14-01-00332 А.

А. Б. Купавский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683 и грантом Президента РФ МД-6277.2013.1.

А. М. Райгородский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683, грантом Президента РФ МД-6277.2013.1 и грантом ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

А. Б. Скопенков частично поддержан грантом фонда Саймонса.

изучения этой теории (или не приводятся совсем). Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

§ 1. Элементы комбинаторики

1.1. Подсчёт и комбинаторные тождества

1.1.1. (1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (2) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

1.1.2. (1) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 1.1.4 (1).)

(2) $\left\{ {n+1 \atop k+1} \right\} = (k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\} + \left\{ {n \atop k} \right\}$. Здесь $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — количество разбиений n-элементного множества на k частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1, 2, 3\}$ на части $\{1, 2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1, 2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 1.4.7 (5).

Замечание. Числа $\left\{ {n \atop k} \right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

1.1.3. (1) Во скольких подмножествах множества $\mathscr{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?

(2) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

1.1.4. (1) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

(2) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

Как решать задачи этого раздела? Мы предлагаем три метода, которые продемонстрируем на примере трёх доказательств правила Паскаля 1.1.2 (1). (Большинство задач этого раздела решаются несколькими методами из трёх предложенных. Но, конечно, не каждый метод применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения.)

Первое доказательство: комбинаторные рассуждения. Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и k полевых. Приведём строгое изложение этой идеи.

Количество $(k+1)$-элементных подмножеств множества $\mathscr{R}_{n+1}$,

• содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k}$, так как такие подмножества при выкидывании числа $n+1$ становятся подмножествами в $\mathscr{R}_n$;

• не содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k+1}$, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_n$.

Другая запись этого решения. Определим отображение

$$f : \binom{\mathcal{R}_{n+1}}{k+1} \to \binom{\mathcal{R}_n}{k+1} \sqcup \binom{\mathcal{R}_n}{k} \quad \text{формулой} \quad f(A) := A \setminus \{n+1\}.$$

Остаётся доказать, что это — биекция, т. е. взаимно однозначное соответствие (например, определив явной формулой обратное отображение).

Второе доказательство: использование явной формулы 1.1.4 (1). Имеем

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!} =$$
$$= \frac{n!}{(n-k-1)!\,k!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) =$$
$$= \frac{n!}{(n-k-1)!\,k!} \cdot \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Третье доказательство: использование бинома Ньютона 1.1.4 (2). Число $\binom{n+1}{k+1}$ является коэффициентом при x^{k+1} в многочлене

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = x(1+x)^n + (1+x)^n.$$

Поэтому число $\binom{n+1}{k+1}$ равно сумме коэффициентов при степенях x^k и x^{k+1} у многочлена $(1+x)^n$. Отсюда следует требуемое равенство.

1.1.5. Найдите суммы:

(1) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

(2) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$;

(3) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$;

(4) $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \ldots + \binom{n+m}{k+m}$;

(5) $\binom{n}{0}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$;

(6) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$;

(7) $\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

(8) $\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + 4\binom{2n-2}{n} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$.

1.1.6. Найдите явную формулу для
(1) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}$; (2) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{4k}$; (3) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{3k}$.
В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

1.2. Формула включений и исключений

Обозначим через $\varphi(n)$ функцию Эйлера, т. е. количество чисел от 1 до n, взаимно простых с числом n.

1.2.1. (1) Найдите количество чисел, не превосходящих 1001 и не делящихся ни на одно из чисел 7, 11, 13.

(2) Найдите $\varphi(1)$, $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(p^\alpha)$, где p — простое число, $\alpha > 2$.

(3) $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_s}\right)$, где $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа n.

1.2.2. (1) На полу комнаты площадью 24 м^2 расположены три ковра (произвольной формы) площади 12 м^2 каждый. Тогда площадь пересечения некоторых двух ковров не меньше 4 м^2.

(2) На кафтане расположено пять заплат (произвольной формы). Площадь каждой из них больше половины площади кафтана. Тогда площадь общей части некоторых двух заплат больше одной пятой площади кафтана.

1.2.3. *Формула включений и исключений*. Рассмотрим подмножества $A_1,\ldots,A_n$ конечного множества U. Положим по определению $\left|\bigcap\limits_{j\in\varnothing}A_j\right| := U$.

(1) Пусть число $\alpha_{|S|} := \left|\bigcap\limits_{j\in S}A_j\right|$ зависит только от размера $|S|$ набора $S\subset\mathcal{R}_n$ индексов, а не от самого набора. Тогда

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\alpha_k,$$

$$|U\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\alpha_k.$$

(2) Обозначим $M_k := \sum\limits_{S\in\binom{\mathcal{R}_n}{k}}\left|\bigcap\limits_{j\in S}A_j\right|$. В частности, $M_0 := |U|$. Тогда

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + (-1)^{n+1}M_n,$$
$$|U\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_n)| = M_0 - M_1 + M_2 + \ldots + (-1)^{n}M_n.$$

(3) *Неравенства Бонферрони*. Для любого s, $s < \frac{n}{2}$,

$$M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - M_{2s} \leqslant |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leqslant M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + M_{2s+1},$$

$$M_0 - M_1 + M_2 - \ldots + M_{2s} \geqslant |U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| \geqslant \geqslant M_0 - M_1 + M_2 - \ldots - M_{2s+1}.$$

В этом разделе предлагаются задачи следующего типа: дано конечное множество U и набор свойств (подмножеств) $A_k \subset U$, $k = 1, \ldots, n$. Требуется найти количество элементов, для которых выполнено хотя бы одно из свойств A_k (т. е. $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$), либо количество элементов, для которых не выполнено ни одно из свойств A_k (т. е. $|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)|$).

Для этого используется два варианта формулы включений и исключений (см. задачу 1.2.3 (2)). При этом если во всех пересечениях множеств набора число элементов зависит только от количества пересекаемых множеств, формулу можно упростить (см. задачу 1.2.3 (1)).

В задачах 1.2.4 (1) и 1.2.5 предполагается, что ответ записывается в виде суммы (аналогично формуле включений и исключений).

1.2.4. На полке стоят 10 различных книг.

(1) Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на своем месте?

(2) Количество таких перестановок книг, при которых на месте остаётся ровно 4 книги, больше 50 000.

1.2.5. (1) Сколькими способами можно расселить 20 туристов по 5 различным домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым?

(2) Сколько существует различных сюръекций $f : \mathscr{R}_k \to \mathscr{R}_n$?

1.2.6*. Докажите следующую формулу:

$$n! \cdot x_1 x_2 \ldots x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \leqslant n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-1}})^n + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-2} \leqslant n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-2}})^n - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^n.$$

1.3. Принцип Дирихле

1.3.1. (1) Если сумма n действительных чисел равна S, то найдётся слагаемое, не большее S/n, а также слагаемое, не меньшее S/n.

(2) Если сумма n целых чисел больше kn для некоторого целого k, то найдётся слагаемое, не меньшее $k + 1$.

(3) Если сумма n целых чисел меньше kn для некоторого целого k, то найдётся слагаемое, не большее $k-1$.

Утверждение 1.3.1 (1) применяется при решении задач, см., например, задачу 1.3.9. Его «дискретный аналог» утверждение 1.3.1 (2) называют *принципом Дирихле* и часто формулируют так: при любом распределении $nk+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее $k+1$ предмета[1].

1.3.2. В мешке лежат 32 красных шара, 29 зеленых шаров, 45 синих, 17 желтых и по 30 белых, черных и серых. Какое наименьшее число шаров надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись шары

(1) всех 9 цветов? (2) 7 цветов?

1.3.3. (1) Среди 7-значных чисел, заканчивающихся на 3 пятерки, существует не менее 1200 чисел, имеющих один и тот же остаток от деления на 7.

(2) Для каждого 4-значного числа посчитали сумму цифр его квадрата. Докажите, что существует не менее 1200 чисел, для которых посчитанные суммы будут давать одинаковый остаток при делении на 7.

1.3.4. (1) Среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1997.

(2) В строку записаны n целых чисел. Докажите, что из них можно выделить одно или несколько подряд идущих с суммой, кратной n.

1.3.5. (1) Среди любых n действительных чисел найдутся два, дробные части которых различаются не более чем на $\dfrac{1}{n-1}$.

(2) В таблице 10×10 расставлены целые числа, причем любые два числа в соседних по стороне клетках отличаются не более чем на 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся два равных.

1.3.6. Теорема Дирихле. *Дано произвольное иррациональное число α.*

(1) *Для произвольного натурального N найдутся такие взаимно простые $p,q\in\mathbb{Z}$, что $0<q\leqslant N$ и*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{qN}.$$

(2) *Существует бесконечно много пар взаимно простых чисел $p,q\in\in\mathbb{Z}$, для которых*

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{1}{q^2}.$$

[1] Методически более грамотно [MS, Словарик, раздел «оценка»] было бы назвать п. 1.3 «Оценки от противного». Однако мы выбрали название, по которому большинство читателей смогут наиболее ясно представить себе содержание этого раздела.

Замечание. В формулировке утверждения 1.3.6 (2) можно избавиться от взаимной простоты, так как для каждой дроби $\frac{p}{q}$, для которой выполнено неравенство $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, существует лишь конечное количество целых чисел $k > 0$ таких, что $\left|\alpha - \frac{pk}{qk}\right| \leqslant \frac{1}{(qk)^2}$.

1.3.7. Натуральные числа от 1 до 101 записаны в некотором порядке. Докажите, что в этой последовательности найдется либо возрастающая, либо убывающая подпоследовательность длины 11.

Замечание. В данном случае *подпоследовательность* — это то, что получается из последовательности вычеркиванием некоторых её членов.

1.3.8. Имеется 10 яблок, каждое из которых весит не более 100 г, и две одинаковые тарелки. Докажите, что можно положить в тарелки

(1) несколько яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше чем на 1 г.

(2) по одинаковому количеству яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше чем на 2 г.

При этом на тарелках должно лежать хотя бы одно яблоко, но не обязательно должны лежать все яблоки (и в п. (1) не обязательно, чтобы на *каждой* тарелке лежало хотя бы одно яблоко).

1.3.9. Для любых n векторов $v_1, \ldots, v_n$ длины 1 на плоскости существует такой набор $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, что

(1) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right| \leqslant \sqrt{n}$, (2) $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k\right| \geqslant \sqrt{n}$.

1.4. Комбинаторика булева куба

1.4.1. Расставьте на шахматной доске нескольких коней, чтобы каждый бил четырёх других.

1.4.2. 33 буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц.

(1) При каком наименьшей длине последовательности кодирование можно сделать однозначным?

(2) Если при получении сообщения возможна ошибка в не более чем одном разряде, т. е. если коды различных букв должны отличаться по крайней мере в трёх разрядах, то 8 разрядов не хватит.

(3) Если возможна ошибка в не более чем двух разрядах, то 10 разрядов не хватит.

(4)* Найдите наименьшее число разрядов, достаточное для кодирования из п. (2).

1.4.3. (1) При фиксированном n число $\binom{n}{k}$ максимально при $k = \left[\frac{n}{2}\right]$.

(2) *Best in their own ways.* В математической олимпиаде участвовало k школьников. Выяснилось, что для любых двух школьников A и B нашлась задача, которую решил A и не решил B, и задача, которую решил B, но не решил A. Какое наименьшее возможное количество задач могло быть при этом условии? Иными словами, найдите наименьшее возможное n, для которого найдётся такое семейство из k подмножеств n-элементного множества, что ни одно из подмножеств семейства не содержится (собственно) в другом.

1.4.4. Имеется табло с n горящими лампочками. Каждый переключатель может быть подсоединён к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку переключателя соединённые с ним лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а не горящие загораются. Какое наименьшее число переключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек (не входящие в этот набор лампочки гореть не должны)?

1.4.5. В первый день своего правления король организует партии среди n своих подданных. На второй день советник приносит королю список фамилий некоторых подданных (в первый день этот список неизвестен). На третий день король может выбрать несколько партий и отправить в тюрьму всех подданных, участвующих в каждой из них. Какое наименьшее число партий необходимо организовать в первый день, чтобы в третий день заведомо можно было отправить в тюрьму всех подданных из принесенного списка (и только их)?

Замечание. Следующая важная конструкция полезна (хотя и не обязательна) для решения вышеприведённых (и многих других) задач. Нарисуем точки, соответствующие всем подмножествам множества $\mathcal{R}_n$. При этом на k-й *этаж* поместим точки, соответствующие k-элементным множествам. Соединим стрелкой те из них, которые получаются друг из друга добавлением одного элемента. Тогда соединяемые стрелкой точки лежат на соседних этажах. Полученный граф называется *n-мерным кубом*. Его вершины соответствуют векторам из $\mathbb{Z}_2^n$.

Определение множества $\mathbb{Z}_2^n$ приведено в начале п. 7.1. Подмножество $L \subset \mathbb{Z}_2^n$ называется *линейным подпространством*, если $x + y \in L$ для любых $x, y \in L$ (не обязательно различных). Иными словами, *линейное подпространство* — такое семейство подмножеств n-элементного множества, которое вместе с любыми двумя подмножествами содержит их симметрическую разность (т. е. сумму по модулю 2).

1.4.6. (1) Любое линейное подпространство содержит нулевой набор $(0, \ldots, 0)$.

(2) Число элементов в любом линейном подпространстве является степенью двойки.

Обозначим через $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$ количество линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$, состоящих из 2^k элементов (такие линейные подпространства в $\mathbb{Z}_2^n$ называют *k-мерными*, ср. п. 7.1).

1.4.7. (1) Найдите $\begin{vmatrix} 2 \\ k \end{vmatrix}$ для $k = 0, 1, 2$.

(2) Найдите $\begin{vmatrix} 3 \\ k \end{vmatrix}$ для $k = 0, 1, 2, 3$.

(3) $\begin{vmatrix} n \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ n \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} n \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ n-1 \end{vmatrix} = 2^n - 1.$

(4) $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ n-k \end{vmatrix}.$

(5) $\begin{vmatrix} n+1 \\ k+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n \\ k+1 \end{vmatrix} + 2^{n-k} \begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}.$

(6) Найдите $\begin{vmatrix} n \\ 2 \end{vmatrix}$.

(7) Найдите $\begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}$.

Для решения этой задачи нужны некоторые понятия, приведённые в начале п. 7.1.

1.5. Обращение Мёбиуса

Под значком $\sum\limits_{d|n}$ подразумевается сумма по всем натуральным делителям числа n.

Определим *функцию Мёбиуса* $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ является произведением} \\ & k \text{ различных простых делителей;} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на } p^2 \\ & \text{для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

1.5.1. (1) $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1; \\ 0, n \neq 1. \end{cases}$

(2) Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа n, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

(3) *Формула обращения Мёбиуса.* Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Тогда справедлива формула

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определена в п. 1.2.

1.5.2. (1) Найдите сумму $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

(2) $\sum\limits_{d|n} \dfrac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{1}{p_s}\right)$.

Замечание. Заметим, что, применяя формулу обращения Мёбиуса к функции $\varphi(n)$, можно немного другим способом доказать формулу для нахождения $\varphi(n)$ (см. утверждение 1.2.1 (3)).

Действительно, используя утверждения 1.5.2 (1, 2), получаем:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Обозначим через $T_r(n)$ количество способов раскрасить карусель из n вагончиков в r цветов, т. е. число раскрасок вершин правильного n-угольника в r цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы. При этом

• в раскраске могут быть использованы не все цвета;

• цвета различны: например, раскраски КККЖ и ЖЖЖК различны.

Приведём более формальное определение. Для любой раскраски карусели можно «разорвать» карусель между любыми двумя вагончиками и записать получившуюся последовательность цветов (раскраску поезда), начиная с места разрыва по часовой стрелке. Например, следующие последовательности соответствуют одной и той же раскраске карусели:

КЖЗС; ЖЗСК; ЗСКЖ; СКЖЗ.

С другой стороны, из каждой последовательности цветов можно получить раскраску карусели, «склеив» её начало и конец правильным образом.

Циклическим сдвигом последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется последовательность $(a_2, a_3, \ldots, a_1)$. *Раскраской карусели* (или, более учёно, *циклической последовательностью*) называется класс эквивалентности последовательностей с точностью до циклического сдвига.