ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ЛОМОНОСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2005–2015

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

А. В. Бегунц, П. А. Бородин, Д. В. Горяшин, А. С. Зеленский,
В. С. Панфёров, И. Н. Сергеев, И. А. Шейпак

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ» ПО МАТЕМАТИКЕ (2005–2015)

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 512
ББК 22.141
Б37

Бегунц А. В. и др.
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2015).
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
176 с.
ISBN 978-5-4439-3021-3

В книге приведены задания олимпиады «Ломоносов» по математике 2005–2015 гг., т. е. за все годы её проведения. Все задачи снабжены подробными решениями или ответами. Дана полезная информация будущим участникам олимпиады.

Подготовлено на основе книги: *Бегунц А. В. и др.* Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике (2005–2015) / А. В. Бегунц, П. А. Бородин, Д. В. Горяшин, А. С. Зеленский, В. С. Панфёров, И. Н. Сергеев, И. А. Шейпак. — М.: МЦНМО, 2016. — 176 с. ISBN 978-5-4439-1021-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3021-3

Содержание

К читателю

Олимпиада школьников «Ломоносов» проводится с 2004/2005 учебного года по инициативе ректора МГУ имени М. В. Ломоносова академика РАН В. А. Садовничего. Согласно Положению об олимпиаде «Ломоносов» её основными целями являются выявление и развитие у учащихся образовательных учреждений творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности, создание необходимых условий для поддержки одарённых детей и популяризация научных знаний среди молодёжи.

Несмотря на свою относительно недолгую историю, олимпиада «Ломоносов» уже приобрела широкую известность и ежегодно привлекает к себе тысячи школьников. Так, в 2014/2015 учебном году количество участников олимпиады по одной только математике превысило 10 500 человек (более половины из которых — учащиеся невыпускных классов), а число победителей и призёров заключительного этапа составило 259. Задания олимпиады выполняли школьники почти из всех регионов нашей страны, при этом в число победителей и призёров заключительного этапа вошли представители 33 субъектов Российской Федерации.

Популярность олимпиады «Ломоносов» объясняется прежде всего оригинальным стилем задач, отчётливо выделяющим её из перечня всех олимпиад и отличающим её от традиционных вступительных испытаний. В ней, как правило, даётся большое количество задач, самых разнообразных — и по трудности, и по тематике, и по предназначению. Остановимся более подробно на заданиях для учащихся выпускных классов.

Сначала участникам предлагаются относительно лёгкие задачи, подчас даже решаемые почти «в уме». Эти задачи развивают способность школьников строить математические модели в жизненных ситуациях, вдумчиво относиться к математическим понятиям и формулам, грамотно их применять с целью получения ответа на поставленный вопрос.

Далее, некоторая часть задач олимпиады совершенно типична для проводившихся в прежние годы вступительных экзаменов на те факультеты МГУ, где математика не является профильным предметом, но нужна для изучения других дисциплин. Эти задачи, как правило, просты, однако и они также содержат некоторые изюминки, призванные отличить абитуриента, более подготовленного к учёбе, от просто натренированного на определённые стандартные типы задач.

Следующий класс задач по своим формулировкам также напоминает задачи вступительных экзаменов, но они, во-первых, довольно сложны, а во-вторых, требуют от участников олимпиады новых идей или методов, непривычных для школьника и нестандартных для абитуриента. Без таких подходов решение становится или слишком изнурительным в техническом плане, или вообще невыполнимым.

Наконец, среди заданий олимпиады присутствуют и настоящие, собственно олимпиадные задачи, причём довольно высокого уровня. Несмотря на это, они решаются без стандартных олимпиадных трюков и не требуют специальной олимпиадной подготовки. Поэтому и такие задания вполне посильны для вдумчивого, сообразительного старшеклассника, уверенно владеющего школьной программой по математике.

Многие задачи олимпиады «Ломоносов» оригинальны и придуманы сотрудниками механико-математического факультета и факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ. Подчеркнём, что окончательные формулировки задач, предлагавшихся на олимпиаде, рождались в результате их длительного и напряжённого обсуждения целым коллективом математиков.

О чём полезно знать участнику олимпиады

Официальный портал олимпиады школьников «Ломоносов» расположен в сети Интернет по адресу `http://olymp.msu.ru`. На портале своевременно обновляется вся основная информация для школьников, связанная с организацией и проведением олимпиады, создан форум, поддерживается страница «Вопросы и ответы», доступны задания прошлых лет и многое другое.

Согласно Порядку проведения олимпиад школьников олимпиада «Ломоносов» проводится в два этапа: отборочный (заочный) и заключительный (очный).

Отборочный этап проводится в заочной форме с применением дистанционных образовательных технологий. Задания отборочного этапа, требования к оформлению решений и результаты отборочного этапа размещаются на портале олимпиады. Для участия в отборочном этапе необходимо пройти регистрацию на портале олимпиады.

К участию в заключительном (очном) этапе олимпиады допускаются только победители и призёры отборочного этапа олимпиады текущего года, а также победители и призёры олимпиады прошлого года по данному предмету, которые продолжают освоение общеобразовательных программ среднего (полного) общего образования.

Заключительный этап может быть организован на региональной площадке: в вузе, заключившем соглашение с Московским государственным университетом, а для учащихся классов до 9 включительно также и в среднем общеобразовательном заведении по решению оргкомитета.

Перед заключительным этапом все участники обязаны пройти очную регистрацию, которая осуществляется участником лично в специально установленные дни и часы. При регистрации каждому участнику выдаётся памятка, в которой содержится вся основная информация о дате, времени и месте проведения заключительного этапа олимпиады, алгоритме прохода участников к месту проведения олимпиады и правилах поведения во время написания работы, а также о сроках объявления результатов и об организации показа работ и подачи апелляций.

Продолжительность олимпиады для учащихся выпускных классов — 4 часа (астрономических) без перерыва. Время отсчитывается с момента объявления заданий. Опоздавшие участники в аудитории не допускаются, поэтому целесообразно приехать на олимпиаду заблаговременно.

В день проведения олимпиады родители и сопровождающие лица в здания, задействованные для её проведения, не допускаются. Участники олимпиады сдают верхнюю одежду, сумки, мобильные телефоны и другие средства связи в гардероб.

Работа, включая чертежи и рисунки, должна выполняться ручкой с пастой синего или чёрного цвета. Запрещается пользоваться карандашами, фломастерами, специальными ручками, чернила которых стираются или исчезают, а также лезвиями, ластиками, корректирующей жидкостью и т. п. Все исправления в работе производятся только ручкой. Черновик и чистовик должны быть отмечены и разделены.

Комиссия по проверке решений задач состоит из квалифицированных специалистов, имеющих большой опыт проведения олимпиад и экзаменов (зачастую члены комиссии и сами в прошлом, будучи школьниками, участвовали в олимпиадах).

Работы проверяются в зашифрованном виде, так что проверяющие не знают имён и фамилий их авторов. Черновики не проверяются вовсе. В результате проверки за каждую задачу ставится одна из следующих оценок:

- оценка «+» или «+.» ставится, если задача решена правильно или с простительными недочётами;

- оценка «±» означает, что задача решена с недостатками (на некоторых олимпиадах эта оценка приравнивается к «+»);
- оценка «∓» означает, что задача не решена, но получено существенное продвижение в решении;
- оценки «−.» и «−» ставятся, если задача не решена или не решалась.

По каждой задаче методическая комиссия разрабатывает конкретные критерии её проверки, определяя, чтó именно в решении этой задачи следует считать простительным недочётом, недостатком и существенным продвижением.

Результаты олимпиады объявляются в установленное время на портале олимпиады, там же дополнительно сообщается время и место проведения показа работ, на котором каждый участник имеет возможность лично ознакомиться с результатами проверки своей работы.

В случае несогласия с результатом проверки работы участник имеет право подать заявление на апелляцию. Все поступившие заявления рассматриваются специальной комиссией. Апелляции проводятся в соответствии с Положением об апелляции, размещённым на портале олимпиады.

Как готовиться к участию в олимпиадах

В первую очередь, каждому школьнику лучше начинать свой «олимпиадный путь» не в выпускном классе, а по возможности раньше. Так, на олимпиаде «Ломоносов» по математике предлагаются задания для учащихся всех классов начиная с 5-го. Задания составляются в том числе и из тех соображений, чтобы заранее подтолкнуть школьников к решению нестандартных задач и тем самым способствовать их успешному участию в будущих олимпиадах. Разумеется, в наши дни существует множество разнообразных олимпиад и иных интеллектуальных состязаний для школьников. Перед участием в любом таком мероприятии полезно ознакомиться с заданиями прошлых лет (а хорошо бы их и порешать!), порядком проведения мероприятия и всем тем, что может помочь не растеряться и должным образом настроиться на успешное выступление.

При подготовке к участию в математических олимпиадах школьникам полезно учиться мыслить нестандартно и работать над расширением кругозора. Для этого можно изучать научно-популярную литературу, посещать математические кружки, а также выбрать подходящую школу и класс, в котором существенное внимание уделяется развитию у учащихся математических способностей. Оказавшись в среде увлечённых ровесников, погрузившись в атмосферу интеллектуального творчества, школьник получает новые возможности для формирования исследовательских навыков и самостоятельного мышления. В Москве работает множество кружков, десятки математических и физико-математических школ и классов. Актуальная информация о ведущих математических школах и классах, обучение в которых бесплатно, размещается на сайте `http://schools.mccme.ru`.

Структура книги

Порядок проведения олимпиады «Ломоносов» по математике неоднократно менялся: в первые годы помимо письменного тура был ещё и устный, затем в течение нескольких лет олимпиада проводилась в один письменный тур, потом добавился отборочный этап, формат проведения которого также не оставался неизменным. Кроме того, с 2010/2011 учебного года учащимся 5–9 классов стали предлагать отдельно разработанные задания, что позволило привлечь широкий круг школьников и помочь им заблаговременно подготовиться к участию в олимпиаде для выпускных классов.

В связи с этим данная книга построена следующим образом. В первой её части приведены задания заключительного этапа олимпиады для учащихся выпускных классов за все учебные годы с 2004/2005 по 2014/2015. Первые варианты каждого учебного года сопровождаются полными решениями и ответами, а ко вторым приведены только ответы. Во второй части книги собраны задачи, предлагавшиеся в разные годы на отборочных этапах олимпиады «Ломоносов» по математике для учащихся 5–11 классов, а также на её заключительном этапе для учащихся 5–9 классов. Поскольку сложность этих задач варьируется от совсем невысокой до превосходящей уровень заключительного этапа, вторая часть книги может содействовать подготовке школьников к участию в олимпиаде. С этой целью из этих задач сформированы тренировочные работы, причём тексты условий отредактированы, некоторые задачи объединены в одну задачу с подпунктами, а в ряде случаев школьникам предлагается доказать более общее утверждение, чем было в оригинале. Наконец, наиболее сложные задачи отборочных этапов прошлых лет собраны в разделе «Исследовательские задачи». Знакомство с ними (и с их решениями), безусловно, расширит кругозор читателей, которые встретятся с новыми примерами математических исследований, доступных старшеклассникам. Все задачи снабжены решениями и ответами. Список литературы, которая также может быть полезна для подготовки к олимпиаде, приведён в конце книги.

Желаем успехов!

Задания заключительных этапов (10–11 классы)

2005 год

Вариант 1

1. Вычислите
$$\frac{(x-y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}-\frac{2xy(x^3-y^3)}{x^2+xy+y^2}$$
при
$$x=1{,}\underbrace{2\ldots2}_{46}2,\qquad y=-2{,}\underbrace{7\ldots7}_{45}8.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{3\cdot 2^{1-x}+1}{2^x-1}\geqslant\frac{1}{1-2^{-x}}.$$

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $BC=5$, если расстояния от вершин A и D до прямой BC равны 3 и 7 соответственно.

4. Решите уравнение
$$\log_4(4\sin^2 2x)=2-\log_2(-2\operatorname{tg}x).$$

5. На окружности взята точка A, на её диаметре BC — точки D и E, а на его продолжении за точку B — точка F. Найдите BC, если $\angle BAD = \angle ACD$, $\angle BAF=\angle CAE$, $BD=2$, $BE=5$ и $BF=4$.

6. Решите неравенство
$$5|x|\leqslant x\left(3x+2-2\sqrt{8-2x-x^2}\right).$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 5, 12 и 13, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 30°. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$4x-|3x-|x+a||=9|x-1|$$
имеет хотя бы один корень.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 40 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 40 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 10 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$3|x|^n + |8y|^n + |z|^n < 1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

Вариант 2

1. Вычислите

$$\frac{2xy(x^3+y^3)}{x^2-xy+y^2} + \frac{(x+y)(x^4-y^4)}{x^2-y^2}$$

при

$$x = -1{,}\underbrace{6\ldots6}_{44}7, \qquad y = -1{,}\underbrace{3\ldots33}_{45}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{5^{-x}-1} \geqslant \frac{2-3\cdot 5^{1-x}}{5^x-1}.$$

3. Найдите площадь трапеции $ABCD$ с боковой стороной $CD=3$, если расстояния от вершин A и B до прямой CD равны 5 и 7 соответственно.

4. Решите уравнение

$$\log_4(4\operatorname{ctg}^2 x) - \log_2(-2\sin 2x) = 1.$$

5. На диаметре AB окружности взяты точки C и D, на его продолжении за точку B — точка E, а на окружности — точка F, причём $\angle AFC = \angle BFE$, $\angle DAF = \angle BFD$, $AB=8$, $CB=6$ и $DB=5$. Найдите BE.

6. Решите неравенство

$$x\left(3x+2-2\sqrt{3-2x-x^2}\,\right) \geqslant 3|x|.$$

7. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 9, 12 и 15, а её высота образует с высотами боковых граней (опущенными из той же вершины) одинаковые углы, не меньшие 60°. Какой наибольший объём может иметь такая пирамида?

8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$||x-a|+2x|+4x=8|x+1|$$

не имеет ни одного корня.

9. Группа отдыхающих в течение 2 ч 30 мин каталась на моторной лодке по реке с постоянной скоростью (относительно воды) попеременно то по течению, то против: в каждую сторону — в общей сложности не менее чем по 1 ч. В итоге лодка прошла путь в 30 км (относительно берега) и, отчалив от пристани A, причалила к пристани B на расстоянии 6 км от A. В какую сторону текла река? Какова при этих условиях максимальная скорость её течения?

10. При каждом натуральном n тело Φ_n в координатном пространстве задано неравенством

$$|2x|^n+|y|^n+7|z|^n<1,$$

а тело Φ — объединение всех тел Φ_n. Найдите объём тела Φ.

2006 год

Вариант 1

1. Вычислите

$$\log_4\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{16}}}}_{40}.$$

2. Что больше: $\operatorname{tg}\dfrac{11\pi}{6}$ или меньший корень квадратного трёхчлена $11x^2-17x-13$?

3. Решите уравнение

$$\cos(x^2+x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

4. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, $BD=9$, $BE=12$. Найдите радиусы окружностей.

5. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришёл в A в 17:00

того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{4-x}-2 \leqslant x|x-3|+4x.$$

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x - 2a\sin x - |2a-1| + 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

8. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, $\angle SCB = 90^\circ$, $BC = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{7}$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $SABC$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}ABC$. Какую длину должно иметь ребро SA, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 116 его клеток. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

10. Решите неравенство

$$4(1-\operatorname{tg} x)^{2004} + (1+\operatorname{tg} x)^{2006} \geqslant 2^{2006}.$$

Вариант 2

1. Вычислите

$$\log_2 \log_8 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{}}}}_{39}\!\!64.$$

2. Что больше: $\operatorname{ctg}\dfrac{17\pi}{6}$ или меньший корень квадратного трёхчлена $7x^2-13x-43$?

3. Решите уравнение

$$\sin(x^2+x)+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0.$$

4. Точки K, L и M лежат на одной прямой. Отрезок KL является диаметром первой окружности, а отрезок LM — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку K, пересекает первую окружность в точке N и касается второй окружности в точке S, $LN = 8$, $NS = 4$. Найдите радиусы окружностей.

5. Из пункта A в пункт B в 7:00 вышел пешеход, а через некоторое время из B в A выехал всадник. Пешеход пришёл в B через 12 часов после выезда оттуда всадника. Всадник приехал в A в 16:00 того же дня. Скорости пешехода и всадника постоянны. Какую долю пути из A в B прошёл пешеход до его встречи со всадником?

6. Решите неравенство

$$\sqrt{x+1} - 1 \leqslant -x|x-2| - 4x.$$

7. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\cos 2x + 2a\cos x + |2a+1| - 2 = 0$$

имеет решения и все его положительные решения образуют арифметическую прогрессию.

8. В треугольной пирамиде $KLMN$ ребро KN перпендикулярно плоскости LMN, $\angle KLM = 90^\circ$, $NL = \sqrt{6}$, $ML = 3$. Последовательность точек O_n строится следующим образом: точка O_1 — центр сферы, описанной около пирамиды $KLMN$, и для каждого натурального $n \geqslant 2$ точка O_n — это центр сферы, описанной около пирамиды $O_{n-1}LMN$. Какую длину должно иметь ребро KN, чтобы множество $\{O_n\}$ состояло ровно из двух различных точек?

9. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник размером $m \times n$ клеток, причём числа m и n взаимно просты и $m < n$. Диагональ этого прямоугольника не пересекает ровно 124 его клетки. Найдите все возможные значения m и n при данных условиях.

10. Решите неравенство

$$(1 - \operatorname{ctg} x)^{2006} + 4(1 + \operatorname{ctg} x)^{2004} \leqslant 2^{2006}.$$

2007 год

Вариант 1

1. Вычислите $(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\beta - \cos\beta)$, если

$$\sin(\alpha+\beta) = 0{,}8 \quad \text{и} \quad \cos(\alpha-\beta) = 0{,}3.$$

2. Решите уравнение
$$\sqrt{2^{x^2}} = (2^{\sqrt[5]{x}})^5.$$

3. Какие значения может принимать выражение
$$\log_{b_{11}b_{50}}(b_1 b_2 \ldots b_{60}),$$
где $b_1, b_2, \ldots$ — геометрическая прогрессия?

4. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1.$$

5. На стороне AB треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, C и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AC = 9$, $BC = 12$ и $CD = 6$.

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a, b) = 60$ и $\text{НОК}(a, c) = 270$ ($\text{НОК}(x, y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найдите $\text{НОК}(b, c)$.

7. Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0, 0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством
$$14x^2 + xy + y^2 + 14x + 2y + 4 < 0.$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиуса 5, образуя с его осью углы в 70° и 80°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от неё на расстояние 11. Найдите объём части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найдите все значения $x \in (0; \pi]$, удовлетворяющие уравнению
$$|\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x.$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда по предложению Вовочки учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4».

Вариант 2

1. Вычислите $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\beta-\cos\beta)$, если
$$\sin(\alpha-\beta)=0{,}5 \quad \text{и} \quad \cos(\alpha+\beta)=0{,}2.$$

2. Решите уравнение
$$\sqrt{3^{x^2}}=(3^{\sqrt[4]{x}})^4.$$

3. Какие значения может принимать выражение
$$\log_{b_{21}b_{50}}(b_1b_2\ldots b_{70}),$$
где $b_1, b_2, \ldots$ — геометрическая прогрессия?

4. Решите неравенство
$$\frac{\sqrt{x+8}-|2x+1|}{\sqrt{7-x}-|2x+1|}\geqslant 1.$$

5. На стороне AC треугольника ABC взята такая точка D, что окружность, проходящая через точки A, B и D, касается прямой BC. Найдите AD, если $AB=18$, $AC=36$ и $BD=15$.

6. Натуральные числа a, b и c таковы, что $\text{НОК}(a,b)=90$ и $\text{НОК}(a,c)=$ $=120$ ($\text{НОК}(x,y)$ — наименьшее общее кратное чисел x и y). Найдите $\text{НОК}(b,c)$.

7. Определите, под каким углом видно из начала координат (т. е. внутри какого наименьшего угла с вершиной в точке $(0,0)$ помещается) множество, заданное на координатной плоскости неравенством
$$25x^2+xy+y^2+16x+2y+3<0.$$

8. Грани двугранного угла пересекают боковую поверхность цилиндра радиуса 3, образуя с его осью углы в 50° и 70°, а ребро двугранного угла перпендикулярно этой оси и удалено от неё на расстояние 7. Найдите объём части цилиндра, расположенной внутри двугранного угла.

9. Найдите все значения $x\in(-\pi;0]$, удовлетворяющие уравнению
$$|\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x|+|\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x|+\operatorname{tg}3x=0.$$

10. В течение четверти учитель по пению ставил детям только оценки «1», «2», «3» и «4». Среднее арифметическое всех оценок Вовочки оказалось равным в точности 2,5. И тогда по предложению Вовочки учитель заменил одну его оценку «3» парой оценок «2» и «4». Доказать, что от этого средняя оценка Вовочки по пению увеличилась. Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «3»;

б) всех его оценок «3».

2008 год

Вариант 1

1. Найдите k, если
$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{5}-2k}+4}+4}+4=\sqrt{5}+2.$$

2. Какое наибольшее число раз можно последовательно взять логарифм по основанию 3 от числа 27^{81} (первый раз логарифм берётся от этого числа, а затем всякий раз — от числа, полученного в предыдущий раз)?

3. При каких значениях a существует единственное решение системы
$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ (x-3)^2+(y+4)^2=a? \end{cases}$$

4. Лиса преследовала кролика по прямолинейной дорожке, ведущей к норе кролика. Их скорости были постоянны. В некоторый момент расстояние от кролика до норы было равно 7 м, а до лисы — 13 м. В некоторый следующий момент расстояние между кроликом и норой стало вдвое меньше расстояния между ним и лисой. Успела ли лиса догнать кролика, прежде чем тот юркнул в нору?

5. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием 6, если синус одного его угла равен косинусу другого.

6. Решите неравенство
$$\sqrt{25^x-2^{3-x}}<7\cdot 2^{-x/2}-2\cdot 5^x.$$

7. Решите уравнение
$$2+\cos x=\sqrt{3}\left|\sin\frac{3x}{4}\right|\sin x.$$

8. Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB=3$ и $AC=4$. Через середину бокового ребра $BB'=10$ параллельно AC проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки A и B, а остальные две вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?