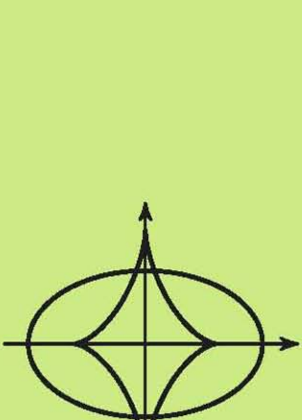
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО ТОПОЛОГИИ



НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Прасолов

Задачи по топологии

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 515.14
ББК 22.15
П70

Прасолов В. В.
Задачи по топологии
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
38 с.
ISBN 978-5-4439-3009-1

В этой брошюре содержатся задачи к трехсеместровому курсу топологии, который неоднократно читался для студентов первого и второго курса НМУ.

В первом семестре обсуждаются топологические пространства, фундаментальная группа и накрытия, во втором семестре — CW-комплексы, многообразия, гомотопические группы и расслоения, в третьем — гомологии и когомологии.

Подготовлено на основе книги: *В. В. Прасолов.* Задачи по топологии. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1009-3.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3009-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ОБЩАЯ ТОПОЛОГИЯ. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА И НАКРЫТИЯ

1.1. Топология $\mathbb{R}^n$. Планарные графы

1. Докажете, что определение непрерывности через открытые множества (прообраз открытого множества открыт) эквивалентно обычному ε-δ определению.

2. Докажите, что линейно связное множество связно.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное подмножество. Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^n$ величину $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$ называют *расстоянием* от точки x до множества A.

3. а) Докажите, что функция $f(x) = d(x, A)$ непрерывна для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$.

б) Докажите, что если множество A замкнуто, то функция $f(x) = d(x, A)$ для всех $x \notin A$ принимает положительные значения.

Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ — произвольные подмножества. Величину $d(A, B) = \inf\limits_{a \in A, b \in B} \|a - b\|$ называют *расстоянием* между множествами A и B.

4. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое подмножество, $C \subset \mathbb{R}^n$ — компактное подмножество. Докажите, что существует такая точка $c_0 \in C$, что $d(A, C) = d(A, c_0)$, а если множество A тоже компактно, то существует ещё и такая точка $a_0 \in A$, что $d(A, C) = d(a_0, c_0)$.

Пусть $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Точку $a \in A$ называют *внутренней*, если существует множество U, открытое в X, для которого $a \in U \subset A$. Точку $a \in A$ называют *изолированной*, если существует множество U, открытое в X, для которого $U \cap A = a$. Точку $x \in X$ называют *граничной* точкой A, если для любого множества U, открытого в X, $U \cap A \neq \varnothing$ и $U \cap (X - A) \neq \varnothing$. *Внутренность* множества A — это множество всех внутренних точек. *Замыкание* множества A — это объединение множества A и всех граничных точек.

5. Докажите, что: а) множество $A \subset X \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда оно содержит все граничные точки; б) внутренность множества A — это наибольшее открытое множество, содержащееся в A; в) замыкание A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A; г) множество всех граничных точек A — это разность замыкания и внутренности.

6. (Кусочно-линейная теорема Жордана) Пусть C — замкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости $\mathbb{R}^2$. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus C$ состоит ровно из двух связных областей, причём границей каждой из них служит C.

7. Пусть a, b, c, d — точки замкнутой несамопересекающейся ломаной C, расположенные в указанном порядке. Предположим, что точки a и c соединены ломаной L_1, а точки b и d соединены ломаной L_2, причём обе эти ломаные лежат в одной и той же из двух областей, образованных ломаной C. Докажите, что ломаные L_1 и L_2 пересекаются в некоторой точке.

Граф G — это множество точек, называемых *вершинами*, причём некоторые пары рёбер соединены *рёбрами*.

Количество рёбер, выходящих из вершины графа, называют *степенью* вершины. В том случае, когда из любой вершины графа можно пройти по его рёбрам в любую другую вершину, граф называют *связным*. Граф может иметь *петли* (рёбра, начало и конец которых совпадают) и *двойные рёбра* (несовпадающие рёбра, имеющие одну и ту же пару вершин). Попарно различные вершины $v_1, \ldots, v_n$, соединённые рёбрами $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_nv_1$, называют *циклом*.

Граф G называют *планарным*, если его можно расположить на плоскости так, чтобы его рёбра попарно не пересекались.

Пусть граф K_n состоит из n вершин, попарно соединённых рёбрами, а граф $K_{n,m}$ состоит из $n+m$ вершин, разбитых на два подмножества из n вершин и из m вершин, причём рёбрами соединены все пары вершин из разных множеств.

8. Докажите, что графы $K_{3,3}$ и K_5 непланарные.

9. Пусть G — *дерево*, т. е. связный граф без циклов. Докажите, что $v(G) = e(G) + 1$, где $v(G)$ — число вершин, $e(G)$ — число рёбер графа G.

10. (Формула Эйлера) Пусть G — планарный граф, состоящий из s компонент связности, среди которых нет изолированных вершин. Пусть, далее, v — число вершин графа G, а e — число его рёбер. Тогда для любого вложения графа G в плоскость число граней f одно и то же, а именно, $f = 1 + s - v + e$.

11. Докажите, что связный планарный граф (без петель и двойных рёбер) содержит вершину, степень которой не превосходит 5.

12. Докажите, что вершины любого планарного графа (без петель и двойных рёбер) можно раскрасить в пять цветов так, что любые две вершины, соединённые ребром, будут разного цвета.

13. а) Пусть G — планарный граф, все грани которого содержат чётное число рёбер. Докажите, что вершины этого графа можно раскрасить в два цвета.

б) Пусть γ — гладкая замкнутая кривая, все самопересечения которой трансверсальны. Докажите, что γ разбивает плоскость на области, которые можно раскрасить в два цвета так, что области, граничащие по некоторой дуге, будут разного цвета.

14. Выведите из формулы Эйлера для планарных графов формулу Эйлера, связывающую число вершин, рёбер и граней выпуклого многогранника.

15. а) Пусть G — планарный граф без изолированных вершин, v_i — число его вершин, из которых выходит i рёбер, f_j — число граней, ограниченных j рёбрами (с учетом их кратностей). Докажите, что тогда $\sum\limits_i(4-i)v_i + \sum\limits_j(4-j)f_j = 4(1+s) \geqslant 8$, где s — число компонент связности графа G.

б) Докажите, что если все грани 4-угольные, то $3v_1 + 2v_2 + v_3 \geqslant 8$.

в) Докажите, что если любая грань ограничена циклом, содержащим не менее n рёбер, то $e \leqslant \dfrac{n(v-2)}{n-2}$.

16. Воспользовавшись задачей 15 в), получите ещё одно доказательство непланарности графов K_5 и $K_{3,3}$.

1.2. Топологические пространства

Топологическое пространство — это множество X, в котором выделена система подмножеств τ, обладающая следующими свойствами:

1) пустое множество и всё множество X принадлежат τ;

2) пересечение конечного числа элементов τ принадлежит τ;

3) объединение любого семейства элементов τ принадлежит τ.

Множества, принадлежащие τ, называют *открытыми*. Множества, дополнения которых открыты, называют *замкнутыми*.

Отображение топологических пространств называют *непрерывным*, если прообраз любого открытого множества открыт. Непрерывное отображение топологических пространств называют *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно и обратное отображение тоже непрерывно.

Любое подмножество A топологического пространства X само можно рассматривать как топологическое пространство, если считать, что множество $B \subset A$ открыто в A, если $B = B' \cap A$ для некоторого множества B', открытого в X.

Топологическое пространство X называют *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

17. Докажите, что любое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

18. Введите «естественную» топологию на множестве матриц $n \times m$.

19. Связно ли пространство $\mathrm{GL}(n)$, состоящее из невырожденных матриц?

20. а) Докажите, что пространство $\mathrm{SO}(3)$, состоящее из ортогональных матриц порядка 3 с определителем 1, связно.

б) Докажите, что пространство $\mathrm{SO}(n)$ связно.

21. Докажите, что пространство, состоящее из невырожденных матриц с положительным определителем, связно.

22. а) Докажите, что пространство $\mathrm{U}(n)$ унитарных матриц связно.

б) Докажите, что пространство $\mathrm{SU}(n)$ унитарных матриц с определителем 1 связно.

Топологическое пространство X называют *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдутся непересекающиеся открытые множества, содержащие эти точки.

23. Приведите пример нехаусдорфова топологического пространства.

В метрическом пространстве X можно определить топологию следующим образом: множество $A \subset X$ открыто, если любая точка $a \in A$ содержится в A вместе с некоторым открытым шаром с центром a.

24. Докажите, что топология, индуцированная метрикой, является хаусдорфовой.

25. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве X для любых двух различных точек x и y найдётся окрестность $U \ni x$, замыкание которой не содержит y.

26. Пусть C — компактное подмножество хаусдорфова пространства X и $x \in X \setminus C$. Докажите, что у точки x и у множества C есть непересекающиеся окрестности.

27. Докажите, что у любых двух непересекающихся компактных подмножеств A и B хаусдорфова пространства X есть непересекающиеся окрестности.

28. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства X на хаусдорфово пространство Y. Докажите, что f — гомеоморфизм.

29. Докажите, что $D^n/\partial D^n \approx S^n$.

30. Докажите, что пространство $S^1 \times S^1$ гомеоморфно пространству, которое получается при следующем отождествлении точек сторон квадрата $0 \leqslant x, y \leqslant 1$: $(x, 0) \sim (x, 1)$ и $(0, y) \sim (1, y)$. (Это пространство называют *тором.*)

31. а) Докажите, что $\{*\} * X \approx CX$ (здесь $\{*\}$ — одноточечное пространство).

б) Докажите, что $S^0 * X \approx \Sigma X$.

32. Докажите, что $S^p * S^q \approx S^{p+q+1}$.

33. Приведите пример связного, но не линейно связного пространства.

34. Докажите, что пространство $\mathrm{GL}(3)$ состоит из двух связных компонент.

1.3. Симплициальные и клеточные комплексы

35. Докажите, что следующие топологические пространства гомеоморфны:

(а) множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат;

(б) множество гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат;

(в) сфера S^n, в которой отождествлена каждая пара диаметрально противоположных точек.

(г) шар D^n, в котором отождествлена каждая пара диаметрально противоположных точек граничной сферы $S^{n-1} = \partial D^n$.

36. Докажите, что следующие топологические пространства гомеоморфны:

(а) множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через начало координат;

(б) сфера $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, в которой отождествлены точки вида λx для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ (для каждой фиксированной точки $x \in S^{2n+1}$);

(в) шар $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$, в котором отождествлены точки граничной сферы $S^{2n-1} = \partial D^{2n}$ вида λx для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ (для каждой фиксированной точки $x \in S^{2n-1}$).

Пространство из задачи 35 называют *вещественным проективным пространством* и обозначают $\mathbb{R}P^n$. Пространство из задачи 36 называют *комплексным проективным пространством* и обозначают $\mathbb{C}P^n$.

37. Докажите, что $\mathbb{R}P^1 \approx S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \approx S^2$.

38. Докажите, что прямое произведение окружности на отрезок не гомеоморфно листу Мёбиуса.

39. Докажите, что $CS^n \approx D^{n+1}$ и $\Sigma S^n \approx S^{n+1}$.