А. Ю. Калинин, Д. А. Терешин

Сборник задач по геометрии 10–11 классы

МЦНМО

А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин

Сборник задач по геометрии

10—11 классы

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 514.1
ББК 22.151
К17

Калинин А. Ю., Терёшин Д. А.
Сборник задач по геометрии. 10—11 классы
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
173 с.
ISBN 978-5-4439-3007-7

Задачник рекомендуется использовать как дополнение к учебнику А. Ю. Калинина, Д. А. Терёшина «Геометрия. 10—11 классы». В нём собраны задачи из вступительных экзаменов по математике на физико-технический факультет МГУ (1947—1951) и в МФТИ (1952—2015). Книга предназначена для школьников старших классов, обучающихся по программе профильного уровня по математике, абитуриентов технических вузов и преподавателей.

Подготовлено на основе книги: *А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин*. Сборник задач по геометрии. 10—11 классы. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1007-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3007-7

Предисловие

— Интересно, что вы намерены предпринять с золотом Снорка? — спросил Снусмумрик.

— Обложим цветочные клумбы, пусть служит украшением, — сказала Муми-мама. — Разумеется, только куски покрупнее, мелочь-то совсем не имеет вида.

Т. Янссон. Шляпа волшебника

Этот задачник предназначен для школьников старших классов, обучающихся по программе профильного уровня по математике, абитуриентов технических вузов и преподавателей. Мы рекомендуем использовать его в качестве одного из дополнений к нашему учебнику «Геометрия. 10—11 классы».

Все задачи, включенные нами в этот сборник, взяты из материалов вступительных экзаменов по математике на физико-технический факультет МГУ (1947—1951) и в МФТИ (1952—2015). Задачи разделены на группы по годам; после номера каждой задачи указан номер соответствующего экзаменационного билета, а также порядковый номер задачи в этом билете (например, запись **423** (б. 4, 5) означает, что задача 423 была пятой в четвёртом билете). Эта информация поможет вам ориентироваться в степени сложности каждой задачи, так как по традиции из года в год составители стараются располагать задачи внутри каждого билета в порядке возрастания их трудности. При этом следует иметь в виду, что количество задач в одном варианте письменной работы в разные годы было различным: в 1947 г. их было три в каждом билете, в 1948 г. — три в билетах 1—20 и шесть в билетах 21—24, в 1949 г. — три в билетах 1—16 и пять в билетах 17—20, с 1950 по 1968 г. каждый билет содержал четыре задачи, в 1969—1976 и в 1980—1997 гг. — пять задач, в 1977—1979 и в 1999—2011 гг. — шесть задач, в 2012—2013 гг. — восемь задач, в 2014—2015 гг. — семь задач. Заметим также, что и количество экзаменационных билетов зачастую изменялось от года к году (их было чаще всего двенадцать, иногда восемь, шестнадцать, двадцать и даже двадцать четыре), и, кроме того, не всякий билет содержал задачу по стереометрии (впрочем, иногда их было две в одном билете).

В течение нескольких лет МФТИ совместно с газетой «Поиск» проводил конкурс «Абитуриент», письменные работы второго (очного) тура которого фактически представляли собой вступительные экзамены. Поэтому мы включили в задачник также и задания по стереометрии из этих письменных работ (задачи 500, 513 и 526).

Нам хотелось бы особо подчеркнуть, что приведённая ниже коллекция задач имеет определённую историческую ценность. Например, по ней можно проследить, как изменялась тематика и трудность задач по стереометрии на письменных экзаменах в МФТИ, а также сделать многие другие выводы сравнительного характера, в том числе касающиеся требований к подготовке абитуриентов в различные годы и даже о тенденциях развития школьного геометрического образования в нашей стране. Впрочем, всю эту работу мы оставляем пытливому читателю в качестве полезного упражнения.

Один из авторов, Д. А. Терешин, — кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры высшей математики МФТИ.

Мы глубоко благодарны нашим коллегам по кафедре М. В. Балашову, Р. В. Константинову, С. П. Коновалову, Л. П. Купцову, А. Д. Кутасову, В. В. Мартынову и Ю. В. Сидорову, предоставившим в наше распоряжение материалы вступительных экзаменов 1947—1970 гг. и 2001—2008 гг., а также считаем своим приятным долгом вспомнить добрым словом всех составителей физтеховских конкурсных задач, в особенности задач по стереометрии. Среди них нам бы в первую очередь хотелось назвать Н. Х. Агаханова, П. Б. Гусятникова, С. С. Самарову, Ю. В. Сидорова, Б. В. Федосова, В. И. Чехлова и М. И. Шабунина.

А. Ю. Калинин, Д. А. Терёшин

Условия задач

1947 год

1 (б. 1, 2). В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как $4:3$. Найти угол при вершине конуса.

2 (б. 2, 2). Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как $7:4$?

3 (б. 3, 2). В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к площади основания конуса как $3:2$.

4 (б. 4, 1). Доказать, что геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из некоторой точки A на плоскости, проходящие через другую точку B, есть сфера с диаметром AB.

5 (б. 5, 2). Доказать, что объём конуса во столько раз больше объёма вписанного в него шара, во сколько раз полная поверхность конуса больше поверхности шара.

6 (б. 6, 2?[1]). Определить угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной четырёхугольной пи-

---

[1]Эта задача в качестве задачи из билета 6 приведена в «Сборнике методических материалов письменных испытаний по математике и физике абитуриентов Московского физтеха» (М.: изд-во МФТИ, 2007). При этом она отсутствует как в «Сборнике задач, предлагаемых на приёмных испытаниях в МФТИ в 1947—1953 гг.» (М.: изд-во МФТИ, 1954), так и в книге В. Б. Лидского и др. «Задачи по элементарной математике», составленной по материалам вступительных экзаменов в МФТИ.

При этом задача $6'$ присутствует в последних сборниках без указания года (но среди задач, про которые заведомо известно, что они предлагались в 1947 г.), а в первом сборнике она отнесена к билету 1 1948 г., что нам представляется маловероятным, хотя бы потому, что первые десять билетов этого года предлагались на экзамене по арифметике и алгебре. Таким образом, установить, какая именно из задач — 6 или $6'$ — предлагалась в 1947 г., нам не удалось.

рамиды, если площадь основания относится к поверхности вписанного в неё шара как $4:\pi$.

6′ **(б. 6, 2?).** В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Определить угол при вершине конуса, если полная поверхность конуса относится к боковой поверхности полусферы как $18:5$.

1948 год

7 **(б. 11, 3).** В конус вписан шар радиуса r. Найти объём конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d.

8 **(б. 12, 3).** Шара касаются коническая поверхность и плоскость, перпендикулярная к оси конической поверхности. Отношение полной поверхности получающегося при этом конуса к поверхности шара равно m. Найти отношение объёмов этих тел, если $m < \frac{1}{2}$.

9 **(б. 13, 3).** Из середины высоты правильной четырёхугольной пирамиды опущен перпендикуляр на боковое ребро, равный h, и перпендикуляр на боковую грань, равный b. Найти объём пирамиды.

10 **(б. 14, 3).** Вычислить объём правильной пирамиды высоты h, зная, что в основании её лежит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна nd, а отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

11 **(б. 15, 3).** Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в k раз больше площади основания. Найти объём пирамиды, если площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга.

12 **(б. 16, 3).** Через одно из рёбер основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания q проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему боковому ребру. Определить полную поверхность пирамиды, если указанная плоскость делит боковое ребро в отношении $m : n$.

13 (б. 17, 3). В правильную n-угольную пирамиду с ребром основания a и боковым ребром b вписан шар. Найти его радиус.

14 (б. 18, 3). Через вершину правильной n-угольной пирамиды и через две вершины многоугольника, лежащего в основании, под углом α к основанию проведена плоскость, рассекающая основание на два многоугольника, имеющих соответственно $r + 2$ вершин и $n - r$ вершин $\left(r < \dfrac{n-2}{2}\right)$. Найти объём пирамиды, если общая сторона этих двух многоугольников равна b.

15 (б. 19, 3). Дана правильная пятиугольная пирамида $SABCDE$, которая пересечена плоскостью, проходящей через вершины A и C основания и середины рёбер DS и ES. Найти площадь сечения, если ребро основания пирамиды равно q, а боковое ребро равно b.

16 (б. 20, 3). Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых рёбер. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна одной из боковых граней. Указать, какой именно.

17 (б. 21, 5). Найти геометрическое место проекций данной точки A пространства на плоскости, проходящие через другую данную точку B.

18 (б. 22, 5). Найти геометрическое место центров сечений шара B плоскостями, проходящими через данную прямую l. Разобрать случаи, когда прямая пересекает шар, касается его или не имеет с ним общих точек.

19 (б. 23, 5). Найти геометрическое место центров сечений шара плоскостями, проходящими через данную точку C. Разобрать случаи, когда данная точка находится вне, на поверхности или внутри шара.

20 (б. 24, 5). Найти геометрическое место точек, из которых можно провести к данному шару радиуса R три касательные, образующие трёхгранный угол с тремя прямыми плоскими углами.

1949 год

21 (б. 9, 1). В конус, образующая которого L наклонена к плоскости основания под углом α, вписана правильная n-угольная призма, все рёбра которой равны между собой. Найти полную поверхность призмы.

22 (б. 10, 1). Вычислить объём правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

23 (б. 11, 1). Доказать, что две плоскости, проходящие через концы обеих троек рёбер параллелепипеда, сходящихся в концах диагонали параллелепипеда, рассекают эту диагональ на три равные части.

24 (б. 12, 1). Около шара радиуса r описана правильная n-угольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти отношение объёма шара к объёму пирамиды.

25 (б. 13, 1). Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом ψ. Найти объём пирамиды.

26 (б. 14, 1). От правильной четырёхугольной призмы плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида с полной поверхностью S. Найти полную поверхность призмы, если угол при вершине треугольника, получающегося в сечении, равен α.

27 (б. 15, 1). Отношение высоты конуса к радиусу описанного вокруг него шара равно q. Найти отношение объёмов этих тел. При каких q задача возможна?

28 (б. 16, 1). Правильная четырёхугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 2α, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найти площадь сечения.

29 (б. 17, 2). В сферу радиуса R вписан правильный тетраэдр, и все его грани продолжены до пересечения со сферой. Линии пересечения граней тетраэдра со сферой вырезают из её поверхности четыре сферических треугольника и несколько сферических двуугольников. Вычислить площадь каждого из этих двуугольников и треугольников.

30 (б. 18, 3). Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения получилась наименьшей?

31 (б. 19, 1). Зал, имеющий в плане форму квадрата со стороной a, покрыт крышей, построенной следующим образом: каждая пара смежных вершин квадрата, образующего потолок зала, соединена прямыми с серединой противолежащей стороны, и на получившемся треугольнике, как на основании, построена пирамида, высота которой h лежит на одной из её боковых граней и проектируется в середину стороны квадрата. Расположенные выше других части граней этих четырёх пирамид образуют крышу. Найти объём чердака (т. е. пространства между крышей и потолком).

32 (б. 20, 2). Определить радиусы двух шаров, которые, пересекаясь, образуют двояковыпуклую линзу, если известны толщина линзы $2a$, её полная поверхность S и диаметр линзы $2R$.

1950 год

33 (б. 9, 3). Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны равны a и b ($a > 2b$), а неравные отрезки диагоналей образуют угол φ. Найти объём пирамиды, зная, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания, а двугранные углы, прилежащие к параллельным сторонам основания, относятся как $2:1$.

34 **(б. 10, 3).** В правильный тетраэдр вписан шар. В шар вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объёмов этих двух тетраэдров.

35 **(б. 11, 3).** В конус вписан шар, отношение их объёмов равно k. Найти отношение объёмов шаровых сегментов, отсекаемых от шара плоскостью, проходящей через линию касания шара с конусом.

36 **(б. 12, 3).** В правильной шестиугольной пирамиде с углом между боковыми рёбрами, равным α, проведено сечение через наибольшую диагональ основания под углом β к нему. Найти отношение площадей сечения и основания.

37 **(б. 13, 3).** Стороны основания параллелепипеда a и b образуют между собой угол α, а боковое ребро его, равное c, наклонено к плоскости основания под углом β. Найти объём параллелепипеда.

38 **(б. 14, 3).** В шар вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписан шар. Найти отношение поверхностей этих двух шаров.

39 **(б. 15, 3).** Показать, что если плоскость, проходящая через концы трёх рёбер параллелепипеда, исходящих из одной вершины, отсекает от параллелепипеда правильный тетраэдр, то параллелепипед можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился правильный шестиугольник.

40 **(б. 16, 3).** Один из плоских углов трёхгранного угла равен α, двугранные углы, прилежащие к этому плоскому углу, равны соответственно β и γ. Найти два других плоских угла.

1951 год

41 (б. 9, 3). Внутрь сферы S радиуса R вписаны восемь сфер меньшего радиуса, каждая из которых касается двух соседних, а все вместе касаются сферы S по окружности большого круга. Затем внутрь получившейся фигуры вписаны ещё две сферы, каждая из которых касается всех восьми сфер меньшего радиуса и сферы S. Найти радиус этих последних сфер.

42 (б. 10, 3). В шар радиуса R вписан конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания. Найти объём конуса.

43 (б. 10, 4). Доказать, что если точка перемещается в плоскости основания правильной пирамиды и остаётся внутри этого основания, то сумма расстояний до этой точки от боковых граней постоянна.

44 (б. 11, 3). Через вершину конуса проведена плоскость под углом α к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание по хорде a, стягивающей дугу β основания конуса. Найти объём конуса.

45 (б. 11, 4). Через каждые три вершины куба с ребром a, лежащие в концах каждой тройки рёбер, сходящихся в одной вершине, проведена плоскость. Найти объём тела, ограниченного этими плоскостями.

46 (б. 12, 3). Объём правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведёнными из одной и той же вершины, равен α. Найти ребро основания призмы.

47 (б. 12, 4). Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Найти отношение объёма образованного таким образом параллелепипеда к объёму тетраэдра.

48 (б. 13, 3). Внутрь сферы S радиуса R вписано восемь сфер равных радиусов, каждая из которых касается трёх соседних сфер и сферы S. Найти радиусы вписанных сфер, зная, что их центры лежат в вершинах куба.

49 (б. 14, 3). Вычислить радиусы оснований усечённого конуса, описанного около шара радиуса R так, что отношение полной поверхности усечённого конуса к поверхности шара равно m.

50 (б. 15, 3). Найти отношение объёма шара к объёму описанного около него конуса, если полная поверхность конуса в n раз больше поверхности шара.

51 (б. 15, 4). Доказать, что всякая плоскость, проходящая через середины двух противоположных рёбер правильного тетраэдра, делит этот тетраэдр на две равновеликие части.

52 (б. 16, 3). Дан усечённый конус, у которого высота есть среднее пропорциональное между диаметрами оснований. Доказать, что в него можно вписать шар.

1952 год

53 (б. 9, 2). Две правильные n-угольные пирамиды с равными основаниями сложены этими основаниями. Найти радиус шара, вписанного внутрь получившейся фигуры, если сторона основания равна a, а высоты пирамид равны h и H.

54 (б. 10, 2). Определить отношение объёма правильной n-угольной пирамиды к объёму вписанного в неё шара, если известно, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, равны между собой.

55 (б. 11, 2). Две правильные n-угольные пирамиды с равными основаниями, но разными высотами сложены этими основаниями, и вокруг получившейся фигуры описан шар радиуса R. Найти высоты пирамид, если сторона основания равна a. При каком соотношении между a и R задача возможна?

56 **(б. 12, 2).** В правильную n-угольную призму вписан шар. Вокруг призмы также описан шар. Найти отношение объёмов этих двух шаров.

57 **(б. 13, 2).** Найти полную поверхность правильной n-угольной пирамиды объёма V, если радиус круга, вписанного в основание, равен радиусу круга, описанного вокруг сечения, параллельного основанию, на высоте h.

58 **(б. 14, 2).** Через одну из точек диагонали куба с ребром a перпендикулярно к этой диагонали проведена плоскость.

1) Выяснить, какие фигуры будут получаться в сечении этой плоскости с кубом.

2) Найти длины отрезков, получающихся в сечении плоскости с гранями куба, в зависимости от расстояния x секущей плоскости от центра куба.

59 **(б. 15, 2).** На боковых гранях правильной четырёхугольной пирамиды построены, как на основаниях, правильные тетраэдры. Найти расстояние между наружными вершинами двух смежных тетраэдров, если сторона основания пирамиды равна a.

60 **(б. 16, 2).** Найти объём правильной n-угольной пирамиды, если её полная поверхность равна S, а радиусы кругов, описанных вокруг всех граней, равны.

1953 год

61 **(б. 7, 1).** Найти площадь проекции куба с ребром a на плоскость, перпендикулярную к одной из диагоналей куба. Во сколько раз эта площадь будет больше площади сечения куба плоскостью, проходящей через середину диагонали куба перпендикулярно к ней?

62 **(б. 8, 1).** В шар вписаны два одинаковых конуса, оси которых совпадают, а вершины находятся в противоположных концах диаметра шара. Найти отношение объёма общей части этих двух конусов к объёму шара, если известно отношение высоты конуса h к радиусу шара R, равное k.

63 (б. 9, 1). Взяты две противоположные вершины куба, и через середины рёбер, не проходящих через эти вершины, проведена секущая плоскость, которая разделяет куб на две части. В каждую из этих частей помещён шар, касающийся трёх граней куба и секущей плоскости. Во сколько раз объём каждого из этих шаров будет меньше объёма куба?

64 (б. 10, 1). В правильном тетраэдре с ребром основания a проведены три плоскости, каждая из которых проходит через одну из вершин основания тетраэдра и середины боковых рёбер. Найти объём части тетраэдра, расположенной над всеми секущими плоскостями.

65 (б. 11, 1). Доказать, что для всех многогранников, описанных около шара, отношение объёма многогранника к его поверхности имеет одну и ту же величину. Будет ли это предложение справедливо также для цилиндров, конусов и усечённых конусов, описанных около шара?

66 (б. 12, 1). Дан усечённый конус, боковая поверхность которого равна площади круга, имеющего своим радиусом образующую усечённого конуса. Доказать, что в него можно вписать шар.

67 (?[1]). В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α, вписан шар радиуса R. Найти объём части конуса, расположенной над шаром.

1954 год

68 (б. 9, 3). Доказать, что любой плоский угол произвольного четырёхгранного угла меньше суммы трёх других плоских углов.

69 (б. 10, 3). Найти отношение объёма конуса к объёму вписанного в него шара, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих

[1]Эта задача отсутствует в первом сборнике (см. предыдущее примечание), но присутствует во втором и третьем в окружении задач 1953 г. Скорее всего, её всё же не было на экзаменах, но достоверно это нам не известно.

Оглавление