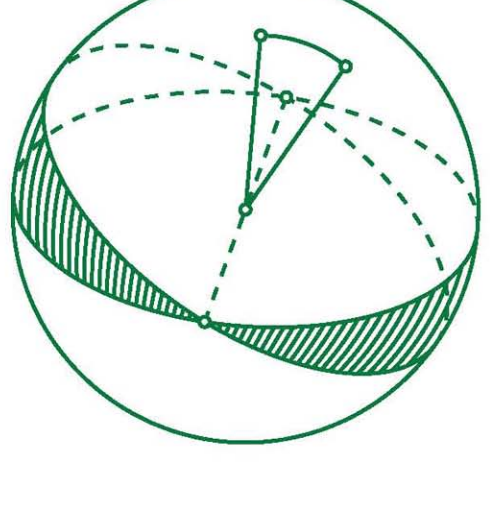
В. В. ПРАСОЛОВ

Задачи по стереометрии



В. В. ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва 2016

ББК 22.151.0
П70

Прасолов В. В.
Задачи по стереометрии: Учебное пособие.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
350 с.
ISBN 978-5-4439-3006-0

В книгу включено около 800 задач по стереометрии, снабжённых подробными решениями. Большинство задач по своей тематике относится к школьной программе. Уровень их трудности в основном несколько выше обычных школьных задач, и есть также некоторое количество весьма трудных задач, предназначенных для учащихся математических классов. Задачи разбиты на циклы, связанные общей идеей решения. Внутри каждого цикла задачи расположены в порядке возрастания трудности. Такое разбиение поможет читателю ориентироваться в большом наборе задач и даст ему возможность разобраться непосредственно в заинтересовавшей его теме, не читая подряд всю книгу.

Для школьников, преподавателей математики, руководителей математических кружков, студентов педагогических институтов и университетов.

Подготовлено на основе книги:
Прасолов В.В. Задачи по стереометрии: Учебное пособие. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2016. — 352 с.: ил. ISBN 978-5-4439-1006-2

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3006-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга вместе с изданными ранее книгами «Задачи по планиметрии»[1] и «Задачи по алгебре, арифметике и анализу»[2] составляет единый сборник задач по математике для учащихся физико-математических классов. В нём представлены практически все темы по математике, которые изучаются в школе в специализированных классах. Основу этого сборника задач составляют задачи из журнала «Квант», задачи, в разное время предлагавшиеся на математических олимпиадах, и задачи из архивов математических олимпиад и математических кружков.

В этой книге, как и в двух предыдущих, тоже принята подробная рубрикация. Задачи разбиты на 22 главы, каждая из которых состоит из нескольких параграфов. За основу классификации были приняты методы решения задач, но во многих случаях задачи пришлось описать по внешним признакам. Главная цель этого подробного разбиения — помочь читателю ориентироваться в таком большом собрании задач. Книга снабжена подробным предметным указателем, который служит той же цели.

При решении стереометрических задач часто используются некоторые факты из планиметрии. При ссылке на такие факты указывается номер соответствующей задачи в книге «Задачи по планиметрии» (М.: МЦНМО, 2007).

Электронные версии этой книги и двух упомянутых выше сборников имеются в Интернете по адресу `http://www.mccme.ru/prasolov/`. В электронной версии будут исправляться замеченные ошибки и опечатки.

---

[1] *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007.

[2] *Прасолов В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу. М.: МЦНМО, 2011.

ГЛАВА 1

ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Основные сведения

Две прямые в пространстве называют *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Две плоскости в пространстве называют *параллельными*, если они не пересекаются.

Прямую и плоскость называют *параллельными*, если они не пересекаются.

З а м е ч а н и е. Удобно также считать параллельными совпадающие прямые (плоскости); прямую, принадлежащую плоскости, тоже удобно считать параллельной ей. В дальнейшем мы будем придерживаться именно этих определений.

Две прямые в пространстве называют *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости.

§ 1. Пересечения прямых и плоскостей

1.1. Дано несколько прямых, причём любые две из них пересекаются. Докажите, что либо все они лежат в одной плоскости, либо все они проходят через одну точку.

1.2. Всегда ли через данную точку A можно провести прямую, пересекающую данные скрещивающиеся прямые l_1 и l_2?

1.3. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ не лежат в одной плоскости. Известно, что прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 попарно пересекаются.

а) Докажите, что точки пересечения этих прямых лежат на одной прямой.

б) Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке или параллельны.

1.4. Докажите, что существует бесконечно много прямых, пересекающих одновременно три данные попарно скрещивающиеся прямые a, b и c.

§ 2. Углы между скрещивающимися прямыми

1.5. Найдите угол между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба.

1.6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и AC_1.

§ 3. Угол между прямой и плоскостью

Для прямой l, не перпендикулярной и не параллельной плоскости Π, *угол* между этой прямой и плоскостью — это угол между ней и её ортогональной проекцией на плоскость Π. Если $l \perp \Pi$, то угол между прямой и плоскостью прямой, а если $l \parallel \Pi$, то угол между прямой и плоскостью нулевой.

1.7. Пусть прямая l пересекает плоскость Π в точке O. Докажите, что угол между прямой l и плоскостью Π — это наименьший из углов между прямой l и прямыми, расположенными в плоскости Π.

1.8. В пространстве даны две пересекающиеся плоскости α и β. На линии их пересечения дана точка A. Докажите, что из всех прямых, лежащих в плоскости α и проходящих через точку A, наибольший угол с плоскостью β образует та, которая перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

§ 4. Прямые, образующие равные углы с прямыми и плоскостями

1.9. Прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми l_1 и l_2, лежащими в плоскости Π, причём она не перпендикулярна этой плоскости. Докажите, что проекция прямой l на плоскость Π тоже образует равные углы с прямыми l_1 и l_2.

1.10. Докажите, что прямая l образует равные углы с двумя пересекающимися прямыми тогда и только тогда, когда она перпендикулярна одной из двух биссектрис углов между этими прямыми.

1.11. Плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются по прямой l. В этих плоскостях выбраны точки A_1 и A_2. Докажите, что прямая A_1A_2 образует равные углы с плоскостями Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, когда точки A_1 и A_2 равноудалены от прямой l.

1.12. Докажите, что прямая l, образующая попарно равные углы с тремя попарно пересекающимися прямыми, лежащими в плоскости Π, перпендикулярна этой плоскости.

1.13. Докажите, что для любых трёх прямых, не лежащих в одной плоскости, найдётся прямая, которая образует с ними равные углы. Сколько именно таких прямых можно провести через данную точку?

См. также задачу 1.16.

§ 5. Скрещивающиеся прямые

1.14. Докажите, что для любых двух скрещивающихся прямых существует единственный отрезок с концами на этих прямых, перпендикулярный обеим прямым.

Отрезок из задачи 1.14 (и прямую, на которой он лежит) называют *общим перпендикуляром* к двум скрещивающимся прямым.

1.15. Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b и c, не параллельные одной плоскости. Докажите, что существует единственный отрезок, параллельный прямой c, концы которого лежат на прямых a и b.

1.16. На скрещивающихся прямых l_1 и l_2 выбраны точки O_1, A_1 и O_2, A_2 так, что O_1O_2 — общий перпендикуляр к этим скрещивающимся прямым. Докажите, что прямая A_1A_2 образует равные углы с прямыми l_1 и l_2 тогда и только тогда, когда $O_1A_1 = O_2A_2$.

1.17. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Докажите, что существует единственный параллелепипед, три ребра которого лежат на этих прямых.

1.18. Даны три скрещивающиеся прямые. Докажите, что они будут общими перпендикулярами к своим общим перпендикулярам.

1.19. На общем перпендикуляре O_1O_2 к скрещивающимся прямым l_1 и l_2 взята точка A. Точка X_1 движется по прямой l_1, а точка X_2 — это проекция точки X_1 на прямую l_2. Докажите, что все плоскости AX_1X_2 имеют общую прямую.

Расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 — это наименьшее из расстояний между точками A_1 и A_2, где точка A_1 лежит на прямой l_1, а точка A_2 лежит на прямой l_2.

1.20. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равно длине их общего перпендикуляра A_1A_2.

1.21. Докажите, что расстояние между скрещивающимися прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию от точки A, в которой прямая l_1 пересекает перпендикулярную ей плоскость Π, до проекции прямой l_2 на плоскость Π.

1.22. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно плоскости ABC. Пусть M — середина ребра BD, N — середина ребра AB, а точка K делит ребро CD в отношении $CK:KD=1:2$. Докажите, что прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

§ 6. Теорема Пифагора в пространстве

1.23. Прямая l образует с тремя попарно ортогональными прямыми углы α, β и γ. Докажите, что $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

1.24. Внутри шара радиуса R взята точка A на расстоянии a от его центра. Через точку A проведены три попарно перпендикулярные хорды.

а) Найдите сумму квадратов длин этих хорд.

б) Найдите сумму квадратов длин отрезков хорд, на которые их делит точка A.

1.25. Докажите, что сумма квадратов длин проекций рёбер куба на любую плоскость равна $8a^2$, где a — длина ребра куба.

1.26. Докажите, что сумма квадратов длин проекций рёбер правильного тетраэдра на любую плоскость равна $4a^2$, где a — длина ребра тетраэдра.

1.27. Дан правильный тетраэдр с ребром a. Докажите, что сумма квадратов длин проекций (на любую плоскость) отрезков, соединяющих его центр с вершинами, равна a^2.

§ 7. Метод координат

1.28. Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для любой точки X в пространстве выполняется равенство $AX^2+CX^2=BX^2+DX^2$.

1.29. Даны две точки A и B. Докажите, что множество точек X, для которых величина AX^2-BX^2 постоянна, представляет собой плоскость, перпендикулярную прямой AB.

1.30. Даны две точки A и B и положительное число $k\neq 1$. Найдите геометрическое место таких точек M, что $AM:BM=k$.

1.31. Найдите геометрическое место таких точек X, что $pAX^2 + qBX^2 + rCX^2 = d$, где A, B и C — данные точки, p, q, r и d — данные числа, причём $p + q + r = 0$.

1.32. Оси двух конусов, у которых равны углы между осью и образующей, параллельны. Докажите, что все точки пересечения их поверхностей лежат в одной плоскости.

1.33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Докажите, что расстояние от любой точки пространства до одной из прямых AA_1, B_1C_1, CD не меньше $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

1.34. На трёх взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O, даны точки A, B и C, равноудаленные от O. Пусть l — произвольная прямая, проходящая через O; точки A_1, B_1 и C_1 симметричны A, B и C относительно l. Плоскости, проходящие через точки A_1, B_1 и C_1 перпендикулярно прямым OA, OB и OC соответственно, пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

1.35. Докажите, что пересечение трёх прямых круговых цилиндров радиуса 1, оси которых попарно взаимно перпендикулярны (но не обязательно пересекаются), содержится в некотором шаре радиуса $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

* * *

1.36. Докажите, что расстояние от точки с координатами (x_0, y_0, z_0) до плоскости, заданной уравнением $ax + by + cz + d = 0$, равно

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1.37. Докажите, что квадрат расстояния от точки (x_0, y_0, z_0) до прямой, заданной уравнениями

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

равен

$$\frac{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ c & a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ a & b \end{vmatrix}^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

См. также задачи 4.30, 8.75, 10.2, 10.14, 10.18, 11.8, 11.18, 11.19, 11.27, 11.28, 11.42, 12.7, 14.7, 12.35, 12.37, 16.5, 16.7, 16.15.

Решения

1.1. Предположим, что три данные прямые a, b и c не лежат в одной плоскости. Тогда прямая c может пересекать прямые a и b только в их точке пересечения. Если бы прямая d пересекала прямые a, b и c в точках, отличных от их общей точки, то прямые a, b и c лежали бы в одной плоскости.

1.2. Рассмотрим плоскость Π_1, содержащую точку A и прямую l_1, и плоскость Π_2, содержащую точку A и прямую l_2. Эти плоскости не совпадают (поскольку прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся) и имеют общую точку A, поэтому они пересекаются по некоторой прямой l. Если прямая l не параллельна ни одной из прямых l_1 и l_2, то она искомая. В противном случае искомой прямой не существует. Действительно, искомая прямая должна лежать как в плоскости Π_1, так и в плоскости Π_2, поэтому она должна совпадать с прямой l. Но прямая l параллельна одной из прямых l_1 и l_2, поэтому она её не пересекает.

1.3. а) Точки пересечения указанных прямых принадлежат прямой, по которой пересекаются плоскости треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

б) Прямые AB и A_1B_1 пересекаются, поэтому точки A, B, A_1, B_1 лежат в одной плоскости. Аналогично точки A, C, A_1, C_1 лежат в одной плоскости и точки B, C, B_1, C_1 тоже лежат в одной плоскости. Эти три плоскости пересекаются по прямым AA_1, BB_1 и CC_1. Рассматриваемые три плоскости либо имеют общую точку (и тогда указанные прямые пересекаются в этой точке), либо не имеют общей точки (и тогда указанные прямые параллельны).

1.4. Через прямую a проходит одна плоскость, параллельная прямой b, и одна плоскость, параллельная прямой c. Проведём через прямую a произвольную плоскость, отличную от этих двух плоскостей (или одной плоскости, если прямые a, b и c параллельны одной плоскости). Она пересекает прямые b и c в точках B_1 и C_1. Если прямая B_1C_1 не параллельна прямой a, то эта прямая искомая. Но прямая B_1C_1 может оказаться параллельной прямой a не более чем для одной проведённой плоскости. Действительно, если B_2C_2 — ещё одна такая прямая, то прямые B_1C_1 и B_2C_2 параллельны прямой a, поэтому они лежат в одной плоскости. Но тогда прямые b и c лежат в одной плоскости. Приходим к противоречию.

Замечание. В зависимости от того, параллельны прямые a, b и c одной плоскости или нет, прямые, которые пересекают их одновременно, заметают либо однополостный гиперболоид, либо гиперболический параболоид (см. задачи 21.14 и 21.15).

1.5. Найдём угол между диагоналями AB_1 и DB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Этот угол равен углу между прямыми AB_1 и B_1D_1, поскольку $B_1D_1 \parallel BD$. Треугольник AB_1D_1 равносторонний, поэтому $\angle AB_1D_1 = 60^\circ$.

1.6. Треугольник A_1BD равносторонний, причём точка A равноудалена от его вершин и точка C_1 тоже равноудалена от его вершин. Поэтому прямая

AC_1 перпендикулярна плоскости этого треугольника. В частности, она перпендикулярна прямой A_1B.

1.7. Достаточно рассмотреть случай, когда прямая m (отличная от проекции прямой l на плоскость Π) расположена в плоскости Π и проходит через точку O. Пусть A — точка прямой l, отличная от точки O, A' — проекция точки A на плоскость Π. Выберем на прямой m точку B так, что $OA' = OB$. Ясно, что $AB > AA'$, поскольку наклонная длиннее перпендикуляра. В треугольниках AOB и AOA' сторона AO общая, $OB = OA'$ и $AB > AA'$, поэтому $\angle AOB > \angle AOA'$.

1.8. Пусть l — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку A. Отложим на прямой l отрезок AB длины 1. Пусть B' — проекция точки B на плоскость β, O — проекция точки B на линию пересечения плоскостей α и β. Тогда $\sin\angle BAB' = BB' = OB\sin\angle BOB'$. При этом $\sin\angle BOB'$ — синус угла между плоскостями α и β (этот угол фиксирован) и $OB \leqslant AB$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда точка O совпадает с A. Поэтому $\sin\angle BAB'$ максимален, когда прямая l перпендикулярна к линии пересечения плоскостей α и β.

1.9. Достаточно рассмотреть случай, когда прямая l проходит через точку O, в которой пересекаются прямые l_1 и l_2. Выберем на прямой l точку A, отличную от точки O, и рассмотрим её проекции A_1, A_2 и A' на прямые l_1, l_2 и на плоскость Π. Из равенства углов $\angle AOA_1$ и $\angle AOA_2$ следует, что $OA_1 = OA_2$. По теореме о трёх перпендикулярах $A'A_1 \perp OA_1$ и $A'A_2 \perp OA_2$. Прямоугольные треугольники $OA'A_1$ и $OA'A_2$ имеют общую гипотенузу и равные катеты OA_1 и OA_2. Следовательно, $A_1A' = A_2A'$, а значит, $\angle A'OA_1 = \angle A'OA_2$.

З а м е ч а н и е. Из решения видно также, что верно и обратное утверждение: если проекция прямой l на плоскость Π образует равные углы с прямыми l_1 и l_2, то и сама прямая l образует равные углы с прямыми l_1 и l_2.

1.10. Пусть Π — плоскость, содержащая данные пересекающиеся прямые. Случай, когда прямая l перпендикулярна этой плоскости, очевиден, поэтому будем считать, что они не перпендикулярны. Согласно задаче 1.9 проекция l' прямой l на плоскость Π является одной из двух биссектрис между данными прямыми. Прямая l' перпендикулярна другой биссектрисе, а потому по теореме о трёх перпендикулярах прямая l тоже перпендикулярна другой биссектрисе.

1.11. Прямая A_1A_2 образует равные углы с плоскостями Π_1 и Π_2 тогда и только тогда, когда она образует равные углы с прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Согласно задаче 1.10 последнее условие эквивалентно тому, что прямая A_1A_2 перпендикулярна одной из двух биссектрис между этими прямыми, т. е. она параллельна одной из двух биссекторных плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями Π_1 и Π_2. Но плоскость, параллельная биссекторной плоскости, пересекает плоскости Π_1 и Π_2 по двум прямым, равноудалённым от прямой l.

1.12. Можно считать, что три данные прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке. Согласно задаче 1.10 прямая l перпендикулярна каким-то трём биссектрисам углов между этими прямыми. Но биссектриса угла между прямыми l_1 и l_2 не может совпадать с биссектрисой угла между прямыми l_2 и l_3. Следовательно, прямая l перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости П, поэтому она перпендикулярна плоскости П.

1.13. Ответ: 4 прямых. Можно считать, что данные прямые пересекаются в одной точке. Пусть a_1 и a_2 — биссектрисы углов между первой и второй прямой, b_1 и b_2 — биссектрисы углов между второй и третьей прямой. Согласно задаче 1.10 прямая образует равные углы с тремя данными прямыми тогда и только тогда, когда она перпендикулярна некоторой паре прямых a_i и b_j, т. е. перпендикулярна плоскости, содержащей эти прямые. Всего есть 4 различные пары прямых a_i и b_j. Все плоскости, заданные парами этих прямых, различны, потому что прямая a_i не может лежать в плоскости, содержащей прямые b_1 и b_2.

1.14. Пусть прямая l перпендикулярна прямым l_1 и l_2. Проведём через прямую l_1 плоскость, параллельную прямой l. Точка пересечения этой плоскости с прямой l_2 является одним из концов требуемого отрезка; сам этот отрезок параллелен прямой l.

1.15. Проведём через прямую a плоскость П, параллельную прямой c. Эта плоскость пересекает прямую b в некоторой точке B. Прямая, проходящая через точку B параллельно прямой c, лежит в плоскости П, поэтому она пересекает прямую a в некоторой точке A. Отрезок AB искомый.

1.16. Проведём через точку O_2 прямую l_1', параллельную прямой l_1. Проведём плоскость П, содержащую прямые l_2 и l_1', и рассмотрим проекцию A_1' точки A_1 на эту плоскость. Согласно задаче 1.9 прямая A_1A_2 образует равные углы с прямыми l_2 и l_1' тогда и только тогда, когда прямая $A_1'A_2$ образует равные углы с прямыми l_2 и l_1'. Последнее условие эквивалентно тому, что $O_2A_2 = O_2A_1' = O_1A_1$.

1.17. Проведём через каждую из данных прямых две плоскости: плоскость, параллельную одной из оставшихся прямых, и плоскость, параллельную другой из оставшихся прямых. Эти плоскости задают искомый параллелепипед.

1.18. Пусть $a' \perp b$ и $a' \perp c$, $b' \perp c$ и $b' \perp a$, $c' \perp a$ и $c' \perp b$. Тогда $a \perp b'$ и $a \perp c'$, $b \perp c'$ и $b \perp a'$, $c \perp a'$ и $c \perp b'$.

1.19. Проведём через точку O_1 прямую l_2', параллельную прямой l_2, а через точку O_2 — прямую l_1', параллельную прямой l_1. Опустим из точки X_1 перпендикуляры X_1' и X_2' на прямые l_1' и l_2'. Ясно, что $X_1X_2'X_2X_1'$ — прямоугольник. Пусть плоскость, проведённая через точку A параллельно прямым l_1 и l_2', пересекает диагональ X_1X_2 в точке X, а стороны X_1X_1' и X_2X_2' — в точках Y_1 и Y_2. Тогда $Y_1X : XY_2 = Y_1X_1 : X_2Y_2 = AO_1 : O_2A$, поэтому прямая AX одна и та же для всех точек X_1.

1.20. Пусть A_1' и A_2' — точки прямых l_1 и l_2, причём отрезок $A_1'A_2'$ не совпадает с отрезком A_1A_2. Проведём через прямую l_1 плоскость, параллельную прямой l_2, а через прямую l_2 — плоскость, параллельную прямой l_1. Эти плоскости параллельны, и расстояние между ними равно длине отрезка A_1A_2. Концы отрезка $A_1'A_2'$ лежат на этих параллельных плоскостях, причём он не может быть им перпендикулярен, потому что иначе он был бы вторым общим перпендикуляром к прямым l_1 и l_2. Следовательно, длина отрезка $A_1'A_2'$ больше расстояния между рассматриваемыми параллельными плоскостями, т. е. $A_1'A_2' > A_1A_2$.

1.21. Проведём через прямую l_1 плоскость Π_1, параллельную прямой l_2, а через прямую l_2 — плоскость Π_2, параллельную прямой l_1. Эти плоскости параллельны, и расстояние между ними равно расстоянию между прямыми l_1 и l_2. Прямая l, по которой пересекаются плоскости Π_2 и Π, — это проекция прямой l_2 на плоскость Π. Расстояние от точки A до прямой l равно расстоянию между плоскостями Π_1 и Π_2, поэтому оно равно расстоянию между прямыми l_1 и l_2.

1.22. Рассмотрим проекцию на плоскость, перпендикулярную прямой CN; проекцию точки X будем обозначать X_1. Треугольник $A_1D_1B_1$ равнобедренный, причём K_1 — точка пересечения его медиан, C_1 и M_1 — середины сторон A_1B_1 и B_1D_1. Поэтому прямые A_1M_1 и B_1K_1 являются продолжениями медиан равнобедренного треугольника, а значит, точка C_1 равноудалена от них. Следовательно, согласно задаче 1.21 прямая CN равноудалена от прямых AM и BK.

1.23. Введём систему координат, направив её оси параллельно трём данным перпендикулярным прямым. Возьмём на прямой l вектор $\boldsymbol{v}$ единичной длины. Вектор $\boldsymbol{v}$ имеет координаты (x, y, z), где $x = \pm\cos\alpha$, $y = \pm\cos\beta$ и $z = \pm\cos\gamma$. Поэтому $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = x^2 + y^2 + z^2 = |\boldsymbol{v}|^2 = 1$.

1.24. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед, рёбра которого параллельны данным хордам, а точка A и центр O шара являются его противоположными вершинами. Пусть a_1, a_2 и a_3 — длины его рёбер; ясно, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a^2$.

а) Если хорда удалена на расстояние x от центра шара, то квадрат её длины равен $4R^2 - 4x^2$. Так как расстояния от данных хорд до точки O равны диагоналям граней параллелепипеда, то искомая сумма квадратов равна $12R^2 - 4(a_2^2 + a_3^2) - 4(a_1^2 + a_3^2) - 4(a_1^2 + a_2^2) = 12R^2 - 8a^2$.

б) Если длина хорды равна d, а точка A находится на расстоянии a от её середины, то сумма квадратов длин отрезков хорды, на которые она делится точкой A, равна $2a^2 + \dfrac{d^2}{2}$. Так как расстояния от точки A до середин данных хорд равны a_1, a_2 и a_3, а сумма квадратов длин хорд равна $12R^2 - 8a^2$, то искомая сумма квадратов равна $2a^2 + (6R^2 - 4a^2) = 6R^2 - 2a^2$.

1.25. Пусть α, β и γ — углы между рёбрами куба и прямой, перпендикулярной данной плоскости. Тогда длины проекций рёбер куба на эту плоскость принимают значения $a\sin\alpha$, $a\sin\beta$ и $a\sin\gamma$, причём каждое значение принимается ровно 4 раза. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ (задача 1.23), то $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$. Поэтому искомая сумма квадратов равна $8a^2$.

1.26. Проведём через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. В результате получим куб, в который вписан данный тетраэдр, причём ребро куба равно $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Проекция каждой грани куба является параллелограммом, диагонали которого равны проекциям рёбер тетраэдра. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин всех его сторон. Поэтому сумма квадратов длин двух противоположных рёбер тетраэдра равна сумме квадратов длин проекций двух пар противоположных рёбер куба. Следовательно, сумма квадратов проекций рёбер тетраэдра равна сумме квадратов проекций рёбер куба, т. е. она равна $4a^2$.

1.27. Как и в задаче 1.26, будем считать, что вершины тетраэдра AB_1CD_1 расположены в вершинах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$; длина ребра этого куба равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Пусть O — центр тетраэдра. Отрезки OA и OD_1 являются половинами диагоналей параллелограмма ABC_1D_1, поэтому сумма квадратов их проекций равна четверти суммы квадратов проекций сторон этого параллелограмма. Аналогично сумма квадратов проекций отрезков OC и OB_1 равна четверти суммы квадратов проекций сторон параллелограмма A_1B_1CD. Заметим, далее, что сумма квадратов проекций диагоналей параллелограммов AA_1D_1D и BB_1C_1C равна сумме квадратов проекций их сторон. В итоге получаем, что искомая сумма квадратов равна четверти суммы квадратов проекций рёбер куба, т. е. равна a^2.

1.28. Введём систему координат с началом в вершине A и осями AB и AD. Пусть вершина C имеет координаты (a, b). Тогда вершины B и D имеют координаты $(a, 0)$ и $(0, b)$. Если точка X имеет координаты (x, y, z), то $AX^2 + CX^2 = x^2 + y^2 + z^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2$ и $BX^2 + DX^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + (y-b)^2 + z^2$.

1.29. Введём систему координат, выбрав точку A в качестве начала координат и направив ось Ox по лучу AB. Пусть точка X имеет координаты (x, y, z). Тогда $AX^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и $BX^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2$, где $a = AB$. Поэтому $AX^2 - BX^2 = 2ax - a^2$. Уравнение $2ax - a^2 = c$ задаёт плоскость, перпендикулярную оси Ox.

1.30. Введём систему координат так, чтобы точки A и B имели координаты $(-a, 0, 0)$ и $(a, 0, 0)$ соответственно. Если точка M имеет координаты (x, y, z), то $\frac{AM^2}{BM^2} = \frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$. Уравнение $AM : BM = k$ приводится к виду

$$\left(x + \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{2ka}{1-k^2}\right)^2.$$

Это уравнение является уравнением сферы с центром $\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}a, 0, 0\right)$ и радиусом $\left|\frac{2ka}{a-k^2}\right|$.

1.31. Введём систему координат, направив ось Oz перпендикулярно плоскости ABC. Пусть точка X имеет координаты (x, y, z). Тогда, например, $AX^2 = (x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 + z^2$. Поэтому для координат точки X получаем уравнение вида $(p+q+r)(x^2+y^2+z^2)+\alpha x+\beta y+\delta=0$, т. е. $\alpha x+\beta y+\delta=0$, поскольку $p+q+r=0$. Это уравнение задаёт плоскость, перпендикулярную плоскости ABC (в вырожденных случаях оно задаёт пустое множество или всё пространство).

1.32. Пусть ось конуса параллельна оси Oz; его вершина имеет координаты (a, b, c); α — угол между осью конуса и образующей. Тогда точки поверхности конуса удовлетворяют уравнению

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2(z-c)^2,$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$. Разность двух уравнений

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=k^2(z-c_1)^2$$

и

$$(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=k^2(z-c_2)^2$$

является линейным уравнением; все общие точки конических поверхностей лежат в плоскости, заданной этим уравнением.

1.33. Введём систему координат, направив оси Ox, Oy и Oz по лучам AB, AD и AA_1. Прямая AA_1 задаётся уравнениями $x=0$, $y=0$; прямая CD — уравнениями $y=a$, $z=0$; прямая B_1C_1 — уравнениями $x=a$, $z=a$. Поэтому квадраты расстояний от точки с координатами (x, y, z) до прямых AA_1, CD и B_1C_1 равны x^2+y^2, $(y-a)^2+z^2$ и $(x-a)^2+(z-a)^2$ соответственно. Все эти числа не могут быть одновременно меньше $\frac{a^2}{2}$, так как $x^2+(x-a)^2\geqslant\frac{a^2}{2}$, $y^2+(y-a)^2\geqslant\frac{a^2}{2}$ и $z^2+(z-a)^2\geqslant\frac{a^2}{2}$. Все эти числа равны $\frac{a^2}{2}$ для точки с координатами $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, т. е. для центра куба.

1.34. Направим оси координат по лучам OA, OB и OC. Пусть прямая l образует с этими осями углы α, β и γ соответственно. Координаты точки M равны координатам проекций точек A_1, B_1 и C_1 на оси Ox, Oy и Oz соответственно, т. е. они равны $a\cos 2\alpha$, $a\cos 2\beta$ и $a\cos 2\gamma$, где $a=|OA|$. Так как $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-3=-1$ (см. задачу 1.23) и $-1\leqslant\cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma\leqslant 1$, то искомое ГМТ состоит из точек пересечения куба, заданного неравенствами $|x|\leqslant a$, $|y|\leqslant a$, $|z|\leqslant a$, с плоскостью $x+y+z=-a$; эта плоскость проходит через вершины с координатами $(a, -a, -a)$, $(-a, a, -a)$ и $(-a, -a, a)$.

1.35. Проведём через ось каждого цилиндра две плоскости, параллельные осям двух других цилиндров. Эти плоскости задают прямоугольный параллелепипед. Поместим начало координат в его центр, а оси координат направим по осям цилиндров. Тогда оси цилиндров задаются уравнениями $x=a$, $y=-b$; $y=b$, $z=-c$; $z=c$, $x=-a$. Поэтому точка (x, y, z) принадлежит пересечению цилиндров тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$(x-a)^2+(y+b)^2\leqslant 1,\quad (y-b)^2+(z+c)^2\leqslant 1,\quad (z-c)^2+(x+a)^2\leqslant 1.$$