Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре

Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре

Под редакцией Ю. М. Смирнова

Рекомендовано УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 01.03.01 Математика, 01.03.04 Математика и математическое моделирование и специальности 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

ББК 22.151
С23

Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю. М. Смирнова.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
391 с.
ISBN 978-5-4439-3003-9

Сборник содержит задачи по аналитической геометрии и линейной алгебре. Теоретические задачи, как правило, сопровождаются упражнениями различной трудности, способствующими самостоятельной проверке обучаемыми степени понимания ими новых определений и алгоритмов. В конце книги приведены ответы и указания.

Настоящий сборник предназначен для студентов, получающих образование по математическим направлениям и специальностям. Он может быть использован преподавателями вузов.

Подготовлено на основе книги:
Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Ю. М. Смирнова. — Изд. новое. — М.: МЦНМО, 2016. — 391 с.
ISBN 978-5-4439-1003-1

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3003-9

Оглавление

Ответы

Предисловие к новому изданию

С момента выхода второго издания настоящего сборника задач прошло уже десять лет. Задачник успел стать за это время библиографической редкостью, в библиотеках некоторых вузов просто стало не хватать изданных ранее его экземпляров, необходимых для обучения студентов. Авторы, идя на встречу просьбам о переиздании задачника, решили в третьем издании не менять ни структуру задачника, ни нумерацию задач и глав, сохранив ее из второго издания. Главной целью стало пополнение запасов уже изданных ранее книг в библиотеках учебных пособий вузов, многие из которых просто пришли в негодность от активного использования, при этом мы постарались исправить все обнаруженные за последние годы опечатки, что несомненно способствовало улучшению текста. Нам очень грустно сознавать, что новое издание не увидят наши коллеги, авторы задачника, известные российские математики: М. М. Постников, Ю. М. Смирнов, Е. Г. Скляренко. Их вклад в создание данного задачника был поистине неоценим.

Предисловие к первому изданию

Многолетнее преподавание курсов аналитической геометрии и линейной алгебры убедило нас в необходимости создания нового единого сборника задач по этим двум дисциплинам. Настоящая книга отражает обновление курса линейной алгебры, предпринятое С. П. Новиковым в 70—80-х годах XX века и основанное на активном применении методов линейной алгебры в аппарате современной математической физики и возросшей роли прикладных методов линейной алгебры.

Объединение в одной книге задач по аналитической геометрии и линейной алгебре позволяет подчеркнуть геометрические аспекты линейной алгебры и сделать ее объекты более наглядными.

Книга состоит из двух частей. В первой части содержатся задачи по традиционному курсу аналитической геометрии, а во второй — по курсу линейной алгебры и геометрии. Мы старались почти все теоретические задачи сопровождать упражнениями разной степени трудности, чтобы читатель с их помощью сразу же мог проверить, как он понял новые определения и алгоритмы.

Составители с удовольствием благодарят рецензентов профессоров А. В. Зарелуа и А. В. Чернавского за конструктивную критику и доцента Н. Н. Ченцову за помощь в подборе задач по вычислительным методам линейной алгебры.

В списке литературы приведены задачники [1—12], которые использовались нами при составлении настоящего сборника задач. Особенно большое влияние оказали задачники [2] и [10], давно ставшие классическими.

Часть I
Аналитическая геометрия

Глава 1

Системы координат на плоскости и в пространстве

§ 1.1. Системы координат: первые задачи

В прямоугольной системе координат x, y на плоскости расстояние между точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ вычисляется по формуле

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Аналогично в пространстве

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Уравнение окружности с центром $O(x_0, y_0)$ и радиусом r имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В общем виде прямая на плоскости задается уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A \neq 0$ или $B \neq 0$. В частности, прямая, пересекающая оси Ox и Oy в точках $(a, 0)$ и $(0, b)$ соответственно $(a, b \neq 0)$, задается уравнением

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(уравнение прямой в отрезках).

Вектор, идущий из начала координат в данную точку M, называется *радиус-вектором* точки M.

Восемь частей, на которые координатные плоскости разрезают пространство, называются *октантами*. Они нумеруются в зависимости от знаков координат x, y, z следующим образом:

Координата	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

1. В прямоугольной системе координат x, y на плоскости дана точка $M(x, y)$. Найти точку, симметричную точке M относительно:

1) начала координат; 2) оси абсцисс; 3) оси ординат;

4) биссектрисы первого и третьего координатных углов;

5) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

2. В прямоугольной системе координат x, y, z в пространстве дана точка $M(x, y, z)$. Найти точку, симметричную точке M относительно:

1) начала координат; 2) оси Ox; 3) плоскости Oxy;

4) биссекторной плоскости координатных плоскостей Oxy и Oyz, проходящей через первый октант.

3. Даны две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2, расстояние между которыми равно d, и три точки A, B и C. Точки A и B симметричны относительно прямой ℓ_1, а точки B и C — относительно ℓ_2. Найти расстояние между точками A и C.

4. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\mathbf{r}_4$ четвертой вершины.

5. Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ трех последовательных вершин трапеции $ABCD$ и отношение оснований

$$|AD| : |BC| = k.$$

Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_D$ четвертой вершины.

6. Говорят, что точка C *делит* отрезок AB *в отношении* λ, если имеет место равенство

$$\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{CB}.$$

Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ точек A и B, найти:

1) радиус-вектор $\mathbf{r}$ середины отрезка AB;

2) радиус-вектор $\mathbf{r}_C$ точки C, делящей отрезок AB в отношении λ.

7. В каких пределах находится число λ, равное отношению, в котором точка M делит отрезок AB, если M лежит:

1) внутри отрезка;

2) на его продолжении за точку A;

3) на его продолжении за точку B?

8. Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ вершин треугольника ABC. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения его медиан.

9. В пространстве даны две точки $A(1, 2, 3)$ и $B(7, 2, 5)$. На прямой AB найти точку M так, чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был вдвое больше отрезка AB.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить радиус-вектор $\mathbf{r}_D$ точки D через радиус-векторы $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ точек B и C и длины сторон $b=|AC|$, $c=|AB|$.

11. Даны координаты $A(1, 1)$, $B(3, 5)$, $C(2, 6)$ трех последовательных вершин трапеции $ABCD$ и отношение оснований $|BC|:|AD|=2$. Найти координаты вершины D, точки M пересечения диагоналей и точки S пересечения продолжений боковых сторон.

12. В параллелограмме $ABCD$ отмечены середины E, F сторон AB и CD соответственно. Прямая ℓ, не проходящая через точку E, пересекает прямые AB, EF, CE и DE в точках P, Q, R и S соответственно. Точка R делит отрезок PQ в отношении λ. В каком отношении делит этот отрезок точка S?

13. Даны три точки A, B и C. Пусть $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_C$ — их радиус-векторы. Какие из следующих выражений задают вектор, не зависящий от выбора начала отсчета, а какие — радиус-вектор точки, не зависящей от выбора начала отсчета? Указать эти векторы и точки:

1) $3\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_C$;
2) $2\mathbf{r}_B+2\mathbf{r}_C-3\mathbf{r}_A$;
3) $(2\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)/4$;
4) $(2\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_C)/4$;
5) $2\mathbf{r}_A-\mathbf{r}_B-\mathbf{r}_C$;
6) $(2\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)/5$.

14. Пересекает ли какую-либо координатную ось прямая, проходящая через точки $A(6, -8, -1)$ и $B(-3, 4, 3)$?

15. Доказать, что отрезки прямых, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам; доказать также, что в той же точке пересекаются отрезки прямых, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, и делятся этой точкой в отношении $3:1$ (считая от вершин).

16. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до точек A и B равна $2a^2$, при условии $a>c$.

17. Даны две точки A и B, расстояние между которыми равно $2c$. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний от которых до точек A и B равна $4a^2$.

18. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до вершин острых углов равнобедренного прямоугольного треугольника вдвое больше квадрата расстояния до вершины прямого угла.

19. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до трех вершин равностороннего треугольника постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит середина одной из сторон треугольника.

20. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до двух вершин A и B треугольника ABC равна квадрату расстояния до его третьей вершины C.

21. Найти геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до трех вершин треугольника ABC равна a^2.

22. Доказать, что геометрическое место точек, сумма квадратов расстояний от которых до нескольких фиксированных точек постоянна, является окружностью или одной точкой.

23. Даны две различные точки A и B и положительное число $k \neq 1$. Найти геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до точек A и B равно k.

24. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме их расстояний до двух других противоположных вершин.

25. Даны две окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1 и r_2 соответственно. Найти геометрическое место точек, из которых к ним можно провести равные касательные.

26. Дана окружность с центром O и радиусом r и точка A, находящаяся на расстоянии a от точки O. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к данной окружности, равны отрезкам, соединяющим эти точки с точкой A.

27. Даны две окружности $x^2+y^2-6x-16=0$, $x^2+y^2+8x-2=0$. Найти геометрическое место точек, из которых к этим окружностям можно провести равные касательные.

28. Даны две окружности $x^2+y^2-6x-27=0$, $x^2+y^2+2x-8=0$. Найти геометрическое место точек, касательные из которых, проведенные к большей окружности, вдвое длиннее касательных к меньшей окружности.

29. Найти геометрическое место точек, квадрат расстояния от которых до точки пересечения двух данных взаимно перпендикулярных прямых в $5/2$ раз больше произведения их расстояний до этих прямых.

30. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до осей координат постоянна при условии, что этому геометрическому месту принадлежит точка $(2, -1)$.

31. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до прямых, содержащих две противоположные стороны квадрата, равно произведению расстояний до прямых, содержащих две другие его стороны.

32. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных параллельных прямых вдвое больше расстояния до третьей данной прямой, перпендикулярной к первым двум.

33. Дан прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, причем $a > b$. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до прямых, содержащих две противоположные стороны прямоугольника, равна сумме расстояний до прямых, содержащих две другие противоположные стороны.

§ 1.2. Полярные, сферические и цилиндрические системы координат

Прямоугольные координаты x, y точки на плоскости связаны с ее *полярными координатами* ρ, φ формулами

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi$$

при стандартном выборе полярных координат: полюс находится в начале координат, полярная ось направлена вдоль оси Ox, а угол φ отсчитывается против часовой стрелки (при традиционном расположении осей Ox и Oy). Эти формулы работают и в случае *обобщенных полярных координат*, в которых разрешаются отрицательные значения ρ. При этом точка с координатами (ρ, φ) может быть задана также как $(-\rho, \varphi + \pi)$.

В пространстве прямоугольные координаты x, y, z точки вычисляются по ее *сферическим координатам* ρ, φ, θ (при стандартном выборе сферической системы координат) по формулам:

$$x = \rho\cos\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = \rho\sin\theta.$$

В пространстве используют также *цилиндрические координаты* ρ, φ, h, которые при их стандартном выборе связаны с прямоугольными координатами x, y, z соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = h.$$

34. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, длина стороны которого равна 1. Приняв за полюс вершину A, за положительное направление полярной оси направление вектора $\overrightarrow{AB}$, а за положительное направление отсчета углов — направление кратчайшего поворота от $\overrightarrow{AB}$ к $\overrightarrow{AC}$, найти полярные координаты вершин шестиугольника в этой системе.

35. Вычислить расстояние между двумя точками, заданными своими полярными координатами:

1) $A\left(2, \frac{\pi}{12}\right)$ и $B\left(1, \frac{5\pi}{12}\right)$; 3) $E\left(3, \frac{11\pi}{18}\right)$ и $F\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$.

2) $C\left(4, \frac{\pi}{5}\right)$ и $D\left(6, \frac{6\pi}{5}\right)$;

36. Даны полярные координаты точек $A\left(8, -\frac{2\pi}{3}\right)$ и $B\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$. Вычислить полярные координаты середины отрезка AB.

37. Дана точка $A\left(5, \frac{2\pi}{3}\right)$ относительно полярной системы координат. Найти:

1) точку B, симметричную точке A относительно полюса;

2) точку C, симметричную точке A относительно полярной оси.

38. В полярной системе координат найти точку, симметричную точке (ρ_0, φ_0) относительно прямой, содержащей луч $\varphi = \varphi_1$.

39. Относительно полярной системы координат даны точки $A\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(3, \frac{4\pi}{3}\right)$, $C\left(1, \frac{3\pi}{2}\right)$, $D(5, \pi)$, $E(5, 0)$. Какие координаты будут иметь эти точки, если повернуть полярную ось вокруг полюса в положительном направлении на угол $3\pi/4$?

40. Вычислить площадь S треугольника, одна из вершин которого помещается в полюсе, а две другие имеют полярные координаты $\left(4, \frac{\pi}{9}\right)$, $\left(1, \frac{5\pi}{18}\right)$.

41. Относительно полярной системы координат даны точки $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $C\left(5, \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3, -\frac{\pi}{6}\right)$. Найти координаты этих точек в соответствующей прямоугольной системе координат.

42. Зная прямоугольные координаты точек $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$, $C(5, 0)$, $D(-8, -6)$, найти их координаты в полярной системе координат, соответствующей данной прямоугольной.

43. Зная полярные координаты точки: $\rho = 10$, $\varphi = \pi/6$, найти ее прямоугольные координаты, если полюс полярной системы координат находится в точке $(2, 3)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

44. Полюс полярной системы координат находится в точке $(3, 5)$, а положительное направление полярной оси совпадает с положительным направлением оси Oy. Найти в этой системе полярные координаты точек $M_1(9, -1)$ и $M_2(5, 5 - 2\sqrt{3})$.

45. Написать выражение прямоугольных координат через полярные, если полюс полярной системы находится в точке (x_0, y_0), а ее ось направлена под углом φ_0 к оси Ox.

46. С помощью перехода к полярной системе координат доказать, что при повороте в положительном направлении на угол φ

вектор с координатами (x, y) переходит в вектор с координатами $(x\cos\varphi - y\sin\varphi,\ x\sin\varphi + y\cos\varphi)$.

47. Одна из вершин правильного треугольника находится в точке $(0, 0)$, а центр — в точке $(2, 4)$. Найти координаты остальных вершин.

48. Даны две противоположные вершины квадрата $(1, 1)$ и $(3, 5)$. Найти две другие вершины.

49. Даны координаты двух соседних вершин квадрата $ABCD$: $A(1, -1)$ и $B(3, 1)$. Найти координаты остальных вершин.

50. Найти уравнение прямой, полученной из прямой $x + 3y = 2$ поворотом в положительном направлении на угол $\pi/4$ вокруг точки пересечения с осью абсцисс.

51. Вершины A и B треугольника ABC имеют координаты $(0, 0)$ и $(28, 21)$ соответственно. Найти координаты вершины C, зная углы: $\angle A = \dfrac{\pi}{4}$ и $\angle B = \arccos\dfrac{4}{5}$.

52. Вершина A равностороннего треугольника ABC находится в точке $(0, 1)$. Найти вершины B и C, если известно, что они лежат на прямых $y = 3$ и $y = 4$ соответственно.

53. Доказать, что в полярной системе координат уравнение

$$\rho\cos(\varphi - \varphi_0) = a$$

при любых φ_0, a задает прямую. Каков геометрический смысл величин φ_0, a?

54. В полярной системе координат прямая задана уравнением

$$\rho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}.$$

Найти уравнение этой прямой в прямоугольных координатах. Найти полярные координаты точки, симметричной полюсу относительно этой прямой.

55. Составить уравнение прямой AB в полярной системе координат, если точки A и B имеют полярные координаты:

1) $A\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $B\left(4, \dfrac{2\pi}{3}\right)$; 2) $A\left(2\sqrt{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$, $B\left(3, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

56. Центр равностороннего треугольника находится в начале координат, а одна из его сторон задана в полярной системе координат уравнением $\rho = a/\cos\varphi$. Найти уравнения остальных сторон треугольника.

57. В полярных координатах написать уравнение окружности радиусом r_0 с центром в точке (ρ_0, φ_0).

58. Найти сферические координаты точек по их прямоугольным координатам:

$$A(-8, -4, 1),\ B(-2, -2, -1),\ C(0, -4, 3),\ D(1, -1, -1),\ E(0, 1, 0).$$

59. Найти сферические координаты точки M, зная, что луч OM образует с осями Ox и Oy углы, соответственно равные $\pi/4$ и $\pi/3$, и что координата z точки M равна -1.

60. Найти прямоугольные координаты точки, лежащей на сфере радиусом 1, зная ее долготу $\varphi = 330°$ и широту $\theta = 45°$.

61. Найти длину меньшей из двух дуг большого круга, соединяющих две точки A и B, лежащие на сфере радиусом ρ, зная долготу и широту этих точек: $A(\varphi_1, \theta_1)$, $B(\varphi_2, \theta_2)$.

62. Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам: $A(3, -4, 5)$, $B(1, -1, -1)$, $C(-6, 0, 8)$.

63. Найти цилиндрические координаты точки M, зная, что луч OM составляет с осями координат Ox и Oy углы $\pi/3$, $\pi/3$, его угол с осью Oz острый, а длина отрезка OM равна 1. Найти угол между лучом OM и осью Oz.

64. Найти угол α вектора $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, зная цилиндрические координаты ρ, φ, z точки M.

§ 1.3. Элементы векторной алгебры и аффинные системы координат

Базисом на плоскости называется любая пара неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$. Базис в пространстве — это произвольная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. На прямой базис образует произвольный ненулевой вектор.

Репер — это пара, состоящая из некоторой точки и упорядоченного базиса. С каждым репером $O, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ (где $k = 1, 2, 3$ в случае прямой, плоскости и пространства соответственно) связывается *аффинная система координат*, в которой координатами произвольной точки M являются такие числа $x_1, \ldots, x_k$, что

$$\overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_k\mathbf{e}_k.$$

65. В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$.

66. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})/2$. Вывести отсюда обратную теорему о средней линии трапеции.

67. Векторы $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\mathbf{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$, являющиеся сторонами этого параллелограмма.

68. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Полагая $\overrightarrow{AK}=\mathbf{k}$ и $\overrightarrow{AL}=\mathbf{l}$, выразить через векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

69. Векторы $\overrightarrow{AB}=\mathbf{p}$ и $\overrightarrow{AF}=\mathbf{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, идущие по сторонам этого шестиугольника.

70. В треугольнике найти такую точку, чтобы сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, была равна $\mathbf{0}$.

71. Из точки O выходят два вектора $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB. Вывести отсюда теорему о биссектрисе.

72. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB}=\mathbf{p}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{q}$, $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{r}$ построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ векторы, совпадающие с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

73. В тетраэдре $ABCD$ даны векторы ребер, выходящих из вершины A: $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{d}$. Выразить через них векторы остальных ребер тетраэдра, медианы DM грани BCD и вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q — точка пересечения медиан грани BCD.

74. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$, выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, где M, P и R — середины ребер OA, OB и OC, а N, Q и S — середины соответствующих противоположных ребер.

75. Дан пространственный четырехугольник $ABCD$. Известны векторы $\overrightarrow{AB}=\mathbf{m}$ и $\overrightarrow{CD}=\mathbf{p}$. Найти вектор $\overrightarrow{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

76. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна нулю.

77. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

78. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ и $\mathbf{r}_{A'}$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиус-векторы четырех остальных его вершин.