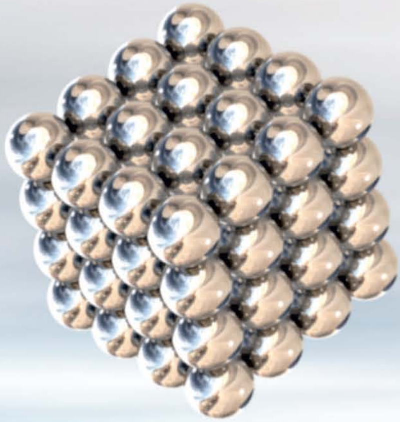
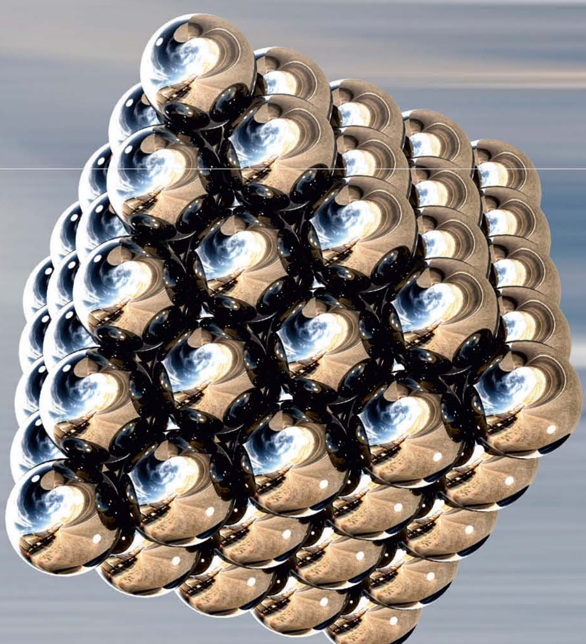
Елена Деза
Мишель Деза



ФИГУРНЫЕ числа



Издательство
МЦНМО

Е. Деза, М. Деза

ФИГУРНЫЕ ЧИСЛА

Перевод с английского С. А. Кулешова

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Д26

Деза Е., Деза М.
Фигурные числа / Пер. с англ.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2016.
349 с.
ISBN 978-5-4439-2400-7

Эта книга посвящена фигурным числам — разделу элементарной математики, который берёт свое начало в древности и которым по сей день интересуются как любители, так и профессионалы.

Подготовлено на основе книги: *Деза Е., Деза М.* Фигурные числа / Пер. с англ. — М.: МЦНМО, 2015. — 350 с. ISBN 978-5-4439-0196-1.

Translation from the English language edition:
Elena Deza and Michel Marie Deza. *Figurate numbers*. World Scientific, 2012.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2400-7

Содержание

Обозначения

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множество натуральных чисел.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ — множество целых чисел.
- $b|a$ — ненулевое целое число b делит целое число a: $a = bc$, где $c \in \mathbb{Z}$.
- НОД$(a_1, \ldots, a_n)$ — *наибольший общий делитель* целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, среди которых по крайней мере одно отлично от 0, т. е. наибольшее целое число, делящее $a_1, \ldots, a_n$. Если НОД$(a_1, \ldots, a_n) = 1$, то числа $a_1, \ldots, a_n$ называются *взаимно простыми*; если НОД$(a_i, a_j) = 1$ для любых разных $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, то числа $a_1, \ldots, a_n$ называются *попарно взаимно простыми*.
- НОК$(a_1, \ldots, a_n)$ — *наименьшее общее кратное* ненулевых целых чисел $a_1, \ldots, a_n$, т. е. наименьшее натуральное число, делящееся на числа $a_1, \ldots, a_n$.
- ОСТ(a, b) — *остаток* от деления целого числа a на натуральное число b: $a = bq + \text{ОСТ}(a, b)$, где $q, \text{ОСТ}(a, b) \in \mathbb{Z}$ и $0 \leqslant \text{ОСТ}(a, b) < b$.
- $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$ — множество *простых чисел*, т. е. натуральных чисел, у которых ровно два натуральных делителя; обычно простые числа будут обозначаться буквами p и q, возможно, с индексами; $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — *разложение на простые множители* натурального числа $n > 1$, т. е. его представление в виде произведения натуральных степеней различных простых чисел $p_1, \ldots, p_k$.
- $S = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, \ldots\}$ — множество *составных чисел*, т. е. натуральных чисел, у которых число натуральных делителей больше двух.
- $n = (c_s c_{s-1} \ldots c_1 c_0)_g = c_s g^s + c_{s-1} g^{s-1} + \ldots + c_1 g + c_0$, $g \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $0 \leqslant c_i \leqslant g - 1$, $c_s \neq 0$, — запись натурального числа n в *g-ичной системе счисления*; например, $279 = 1B3_{12} = 1 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 3$.
- $\lfloor x \rfloor$, $x \in \mathbb{R}$, — *целая часть* числа x: наибольшее целое число, меньшее или равное x.
- $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, — *дробная часть* числа x: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
- $\lceil x \rceil$, $x \in \mathbb{R}$, — *целая часть плюс единица*: наименьшее целое число, большее или равное x.
- $\phi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, — *функция Эйлера*: количество натуральных чисел, взаимно простых с n; $\phi(n) = |\{x \in \mathbb{N} \colon x \leqslant n, \text{НОД}(x, n) = 1\}|$.
- $\mu(n)$, $n \in \mathbb{N}$, — *функция Мёбиуса*: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = (-1)^k$, если $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$ — произведение k различных простых чисел, и $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа.
- $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, $n \in \mathbb{N}$, — *тау-функция* (или *функция числа делителей*): количество натуральных делителей натурального числа n.

- $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, $n \in \mathbb{N}$, — *сумма делителей.*
- $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{C}$, — *функция делителей*: сумма k-х степеней натуральных делителей натурального числа n. В частности, $\sigma_0(n) = \tau(n)$ и $\sigma_1(n) = \sigma(n)$.
- $a \equiv b \pmod n$ — целое число a *сравнимо* с целым числом b по модулю n, $n \in \mathbb{N}$, т. е. $n|(a-b)$.
- $\mathbf{a}_n = \{x \in \mathbb{Z}\colon x \equiv a \pmod n\} = \{\ldots, a-2n, a-n, a, a+n, a+2n, a+3n, \ldots\}$ — *класс вычетов* (*числа* a) *по модулю* n: множество всех целых чисел, сравнимых с a по модулю n. Любой представитель r_a класса $\mathbf{a}_n$ называется *вычетом* числа a по модулю n. Наименьший неотрицательный представитель класса $\mathbf{a}_n$ называется *наименьшим неотрицательным вычетом* числа a по модулю n; он совпадает с *остатком* ОСТ(a, n) от деления a на n. Наименьший по абсолютной величине представитель класса $\mathbf{a}_n$ называется *минимальным вычетом* числа a по модулю n.
- $\left(\frac{a}{p}\right)$ — *символ Лежандра*: $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, если целое число a, взаимно простое с нечётным простым числом p, является *квадратичным вычетом по модулю* p (т. е. сравнение $x^2 \equiv a \pmod p$ имеет решение $x_0 \in \mathbb{Z}$), $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, если целое число a, взаимно простое с нечётным простым числом p, является *квадратичным невычетом по модулю* p (т. е. у сравнения $x^2 \equiv a \pmod p$ решений нет), и $\left(\frac{a}{p}\right) = 0$, если $p|a$.
- $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k}$ для нечётного натурального числа $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — *символ Якоби*. Когда n — простое число, символ Якоби $\left(\frac{a}{n}\right)$ сводится к символу Лежандра.
- $P_n(a)$ — *мультипликативный порядок* (или *порядок модуля*) целого числа a (взаимно простого с n) по модулю n: наименьшее натуральное число γ, при котором $a^\gamma \equiv 1 \pmod n$.
- $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ldots \cfrac{1}{a_n + \ldots}}}$ — *цепная дробь*: здесь $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ и последний член a_n, если он существует, больше 1.
- $\delta_k = [a_0, a_1, \ldots, a_k] = P_k/Q_k$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$, — *подходящие* дроби к цепной дроби $[a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$.
- $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, где D — свободное от квадратов натуральное число, — *уравнение Пелля*.
- $x^2 - Dy^2 = \pm c$, где $c \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и D — свободное от квадратов натуральное число, — *уравнение типа Пелля*.
- a_1, $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, $\ldots$, $a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$, $\ldots$, где $a_1, d \in \mathbb{R}$, — *арифметическая прогрессия* с *разностью* d; $a_1 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

- $b_1, b_2 = b_1 \cdot q, b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2, \ldots, b_n = b_{n-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{n-1}, \ldots$, где $b_1, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, — *геометрическая прогрессия* со *знаменателем* q; $b_1 + \ldots + b_n = b_1(q^n - 1)/(q - 1)$ при $q \neq 1$.
- $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$, $|x| < r$, — *производящая функция* последовательности $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$
- $b_0 c_{n+k} + b_1 c_{n+k-1} + \ldots + b_n c_k = 0$, $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $b_0 \neq 0$, — *линейное рекуррентное уравнение порядка* n для последовательности
$$c_0,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{n-1},\ c_n = -\frac{b_1}{b_0}c_{n-1} - \ldots - \frac{b_n}{b_0}c_0,$$
$$c_{n+1} = -\frac{b_1}{b_0}c_n - \ldots - \frac{b_n}{b_0}c_1,\ \ldots,\ c_{n+k} = -\frac{b_1}{b_0}c_{n+k-1} - \ldots - \frac{b_n}{b_0}c_k,\ \ldots$$
с *начальными условиями* $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.
- $A = ((a_{ij}))$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, — квадратная матрица размера $n \times n$ с вещественными элементами a_{ij}. Матрица A называется *симметричной*, если $a_{ij} = a_{ji}$ при всех $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Матрица A называется *единичной матрицей* и обозначается символом I_n, если $a_{ii} = 1$ и $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Матрица $A^T = ((a_{ji}))$ называется *транспонированной* к A. Матрица A^{-1}, для которой $A \cdot A^{-1} = I_n$, называется *обратной* к A.
- $\det A$ или $|A|$ — *определитель* данной матрицы $A = ((a_{ij}))$ размера $n \times n$. При $n = 2$ он вычисляется по формуле $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$; при произвольном $n \geqslant 3$ он вычисляется по формуле $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det A_{1j}$, где A_{1j} — $(n-1) \times (n-1)$-матрицы, полученные удалением первой строки и j-го столбца матрицы A.
- $n!$ — *факториал* натурального числа n: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$; $0! = 1$.
- $x^{\underline{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — *убывающий факториал* числа x: $x^{\underline{n}} = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-n+1)$.
- $x^{\overline{n}}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — *возрастающий факториал* числа x: $x^{\overline{n}} = x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x + {} + n - 1)$.
- $\binom{n}{m}$ — *биномиальный коэффициент*: $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $0 \leqslant m \leqslant n$.
- $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — *числа Ферма*.
- $M_n = 2^n - 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — *числа Мерсенна*.
- $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — *числа Фибоначчи*: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $u_1 = u_2 = 1$.
- $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ — *числа Люка*: $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $L_1 = 1$, $L_2 = 3$.
- $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — *числа Каталана*.
- $S(n, m) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i}(m-i)^n$, $n \geqslant 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$, — *числа Стирлинга второго рода*.
- $B(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B(k)$, $B(0) = 1$, — *числа Белла*.
- $B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k+1}B_{n-k}$, $B_0 = 0$, — *числа Бернулли*.

- $S_m(n) = \dfrac{n((m-2)n-m+4)}{2}$ — n-е *m-угольное число*, т. е. m-угольное число с *номером n*.
- $CS_m(n) = \dfrac{mn^2-mn+2}{2}$ — n-е *центрированное m-угольное число*.
- $P_m(n) = mn^2 - mn + 1$ — n-е *m-грамное число*; в частности, $P_6(n) = S(n) = 6n^2-6n+1$ — n-е *звёздчатое число*.
- $P(n) = n(n+1)$ — n-е *продолговатое число*.
- $S_m^3(n) = \dfrac{n(n+1)((m-2)n-m+5)}{6}$ — n-е *m-пирамидальное число*.
- $C(n) = n^3$ — n-е *кубическое число*.
- $O(n) = \dfrac{n(2n^2+1)}{3}$ — n-е *октаэдральное число*.
- $I(n) = \dfrac{n(5n^2-5n+2)}{2}$ — n-е *икосаэдральное число*.
- $D(n) = \dfrac{n(9n^2-9n+2)}{2}$ — n-е *додекаэдральное число*.
- $SO(n) = n(2n^2-1)$ — n-е *звёздчато-октаэдральное число*.
- $RD(n) = 4n^3-6n^2+4n-1$ — n-е *ромбододекаэдральное число*.
- $CS_m^3(n) = \dfrac{mn^3+n(6-m)}{6}$ — n-е *центрированное m-пирамидальное число*.
- $PCS_m^3(n) = \dfrac{n(mn^2-mn+2)}{2}$ — n-е *центрированное m-призматическое число*.
- $S_m^k(n) = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+k-2)((m-2)n-m+k+2)}{k!}$ — n-е *k-мерное m-пирамидальное число*; в частности, $S_3^k(n) = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{k!}$ — n-е *k-мерное гипертетраэдральное число*.
- $C^k(n) = n^k$ — n-е *k-мерное гиперкубическое число*.
- $O^k(n) = \sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k-1}{j}2^{k-j-1}S_3^{k-j}(n)$ — n-е *k-мерное октаэдральное число*.
- $N^k(n) = (n+1)^{k+1} - n^{k+1}$ — n-е *k-мерное гнездовое число*.
- $TS_4(n)$, $TCS_m(n)$, $TS_3^3(n)$, $TC(n)$, $TO(n)$, $TI(n)$ — n-е *усечённые числа*: *квадратное, центрированное m-угольное, тетраэдральное, кубическое, октаэдральное, икосаэдральное* соответственно.
- $\bar{C}(n), \bar{S}_m^3(n)$, $\bar{O}(n)$, $\bar{S}_3^k(n)$, $\bar{C}^k(n)$, $\bar{O}^k(n)$ — n-е *центрированные числа*: *кубическое, m-пирамидное, октаэдральное, k-мерное гипертетраэдральное, k-мерное гиперкубическое, k-мерное гипероктаэдральное* соответственно.
- ${}^{-}S_m(n) = S_m(-n)$, ${}^{-}CS_m(n) = CS_m(-n)$, ${}^{-}S_m^3(n) = S_m^3(-n)$, ${}^{-}S_3^k(n) = S_3^k(-n)$, ${}^{-}C^k(n) = C^k(-n)$, ${}^{-}O^k(n) = O^k(-n)$, $n \in \mathbb{N}$, — n-е *обобщённые числа с отрицательными номерами*: *m-угольное, центрированное m-угольное, m-пирамидальное, k-мерное гипертетраэдральное, k-мерное гиперкубическое, k-мерное гипероктаэдральное* соответственно.

Предисловие

Фигурные числа, так же как и большинство классов специальных чисел, имеют долгую и богатую историю. Это понятие было введено в пифагорейской школе (VI век до н. э.) в результате попытки связать геометрию с арифметикой. Пифагорейцы, следуя своему кредо «всё является числом», представляли любое положительное целое число в виде набора точек на плоскости.

Фигурное число — это число, которое можно представить правильной дискретной геометрической моделью из точек. Это может быть, скажем, *многоугольное*, *многогранное* или *политопное число*, если эти точки образуют правильный многоугольник, правильный многогранник или правильный политоп соответственно. Фигурные числа могут также образовывать и другие формы, такие как центрированные многоугольники, L-образные, трёхмерные (и многомерные) тела и т. д.

В частности, многоугольные числа обобщают числа, которые можно представить в виде треугольника (*треугольные числа*) или квадрата (*квадратные числа*), вплоть до m-угольных для любого целого числа $m \geqslant 3$.

Помимо классических многоугольных чисел, на плоскости можно построить *центрированные многоугольные числа*. Каждое центрированное многоугольное число образовано центральной точкой, окруженной многоугольными слоями с постоянным числом сторон. Каждая из сторон многоугольного слоя содержит на одну точку больше, чем любая строка предыдущего слоя.

В главе 1 мы рассмотрим эти и другие плоские фигурные числа со множеством свойств, взаимосвязей и взаимозависимостей.

Располагая точки в определённом порядке не на плоскости, а в пространстве, мы получим *пространственные фигурные числа*. Наиболее известные из них — это *пирамидальные* числа, соответствующие треугольным, четырёхугольным и вообще произвольным m-угольным пирамидам. Они задаются как суммы соответствующих многоугольных чисел. Если физически складывать шарики таким образом, то устойчивыми будут только треугольные и четырёхугольные пирамиды, и древние греки рассматривали только соответствующие два класса пространственных фигурных чисел. *Кубические числа* соответствуют кубам, построенным из шаров. *Октаэдральные*, *додекаэдральные* и *икосаэдральные числа* соответствуют трём оставшимся платоновым телам.

Часто рассматривают *центрированные пространственные фигурные числа*. Они строятся так же, как и центрированные многоугольные числа. Рассматриваются также и числа, которые могут быть получены путём сложения или вычитания пирамидальных чисел меньшего размера. Это соответствует усечению соответствующего многогранника или помещению пирамиды на грань, как при построении звёздчатого многогранника.

Эти и другие классы пространственных фигурных чисел рассматриваются в главе 2.

Аналогично можно построить *многомерные фигурные числа*, т. е. фигурные числа высшей размерности k. В размерности 4 наиболее известны *пентатопные числа*, являющиеся четырёхмерным аналогом треугольных и тетраэдральных чисел и соответствующие четырёхмерным симплексам, и *биквадратные числа*, которые служат четырёхмерным аналогом квадратных и кубических чисел.

Элементы теории многомерных фигурных чисел приведены в главе 3.

Теория фигурных чисел не принадлежит к центральным областям математики, но красота этих чисел притягивает внимание многих учёных на протяжении тысяч лет. Список (неполный) знаменитых учёных, работавших в этой области, включает в себя Пифагора Самосского (ок. 582 до н. э. – ок. 507 до н. э.), Гипсикла Александрийского (190 до н. э. – 120 до н. э.), Плутарха Херонейского (ок. 46 – ок. 122), Никомаха Герасского (ок. 60 – ок. 120), Теона Смирнского (70–135), Диофанта Александрийского (ок. 210 – ок. 290), Леонардо Пизанского, также известного как Леонардо Фибоначчи (ок. 1170 – ок. 1250), Михаэля Штифеля (1487–1567), Джероламо Кардано (1501–1576), Клода Гаспара Баше де Мезириака (1581–1638), Рене Декарта (1596–1650), Пьера Ферма (1601–1665), Джона Пелля (1611–1685), Блеза Паскаля (1623–1662), Леонарда Эйлера (1707–1783), Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813), Адриена-Мари Лежандра (1752–1833), Карла Фридриха Гаусса (1777–1855), Огюстена Луи Коши (1789–1857), Карла Густава Якоба Якоби (1804–1851), Вацлава Франтишека Серпинского (1882–1969), Барнса Уоллеса (1887–1979).

Более того, многие математические факты тесно связаны с фигурными числами, и множество известных теорем можно сформулировать в терминах этих чисел. В частности, фигурные числа связаны с многими другими классами целых чисел, такими как биномиальные коэффициенты, совершенные числа, числа Мерсенна, Ферма, Фибоначчи, Люка и т. д.

Об этих и других классах целых чисел, возникающих в теории чисел и связанных с фигурными числами, рассказано в главе 4.

Фигурные числа ещё в древности изучались пифагорейцами, но в настоящее время они интересны в основном в связи с *теоремой Ферма о многоугольных числах*. В 1636 г. Ферма предположил, что каждое число можно представить в виде суммы не более чем m штук m-угольных чисел. В письме к Мерсенну, он утверждал, что знает доказательство этого результата, но это доказательство так и не было найдено. Лагранж (1770) доказал теорему для квадратных чисел, а Гаусс в 1796 году — для треугольных. В 1813 году Коши доказал утверждение в полном объёме.

В главе 5 мы даём полное и подробное доказательство теоремы Ферма о многоугольных числах и связанных с ней результатов в полной общности, так как части этого доказательства разбросаны по многим работам, зачастую труднодоступным.

В небольшой главе 6 мы собрали некоторые отдельные замечательные числа, связанные с фигурными.

Глава 7 состоит из упражнений и советов по их решению.

Наконец, в обширном предметном указателе перечислены все классы специальных чисел, упомянутые в тексте.

Основная цель этой книги — дать систематическое и полное изложение теории фигурных чисел с подробными доказательствами. Мы стремились представить собранный материал в ясной и единообразной форме.

Книга предназначена для преподавателей, школьников и студентов, интересующихся теорией чисел, общей алгеброй, криптографией и смежными областями, а также для широкой аудитории любителей математики.

Книга организована таким образом, что её можно использовать в качестве исходного материала для индивидуальной научной работы студентов. Она даёт возможность подобрать для студента задание, подходящее по трудности, по степени строгости доказательств, а также требующее (или нет) самостоятельного поиска информации. Материал книги уже использовался для многих курсовых и дипломных работ. Главы 1, 2 и 3 доступны студентам и вообще массовому читателю, интересующемуся математикой, но главы 2 и 3 немного более трудные. Глава 4 и особенно глава 5 включают в себя более сложный материал и требуют некоторой математической культуры.

Глава 1

Плоские фигурные числа

В этой вводной главе представлены основные фигурные числа — *многоугольные*. Они обобщают *треугольные* и *квадратные числа* на случай любого правильного m-угольника.

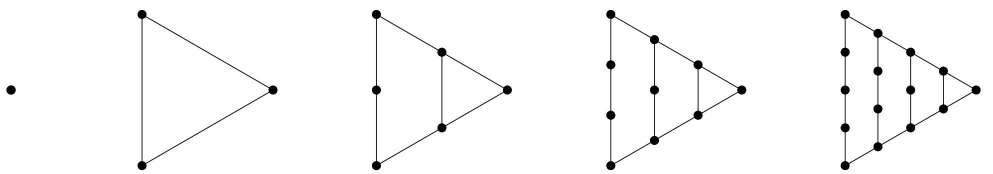
Кроме классических многоугольных мы рассмотрим *центрированные многоугольные числа*, в которых все последовательные слои имеют общий центр.

Упомянем и другие двумерные фигурные числа: *продолговатые*, *трапецеидальные*, *полиграмные*, *усечённые плоские* и т. д.

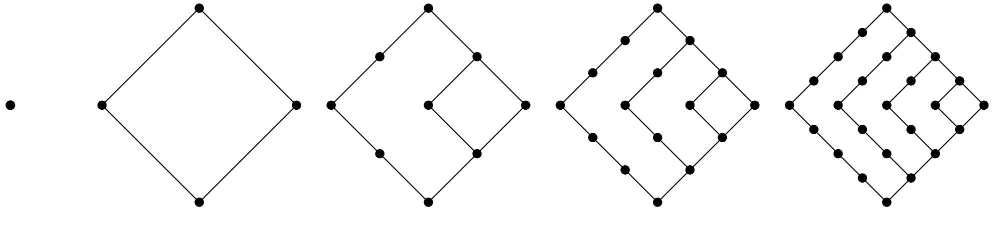
1.1. Определения и формулы

1.1.1. Следуя древним математикам, мы собираемся рассмотреть множества точек, образующие геометрические фигуры на плоскости.

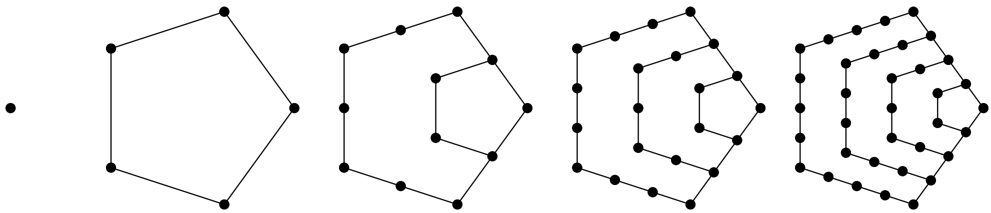
Начав с точки, добавим к ней две точки так, чтобы получился равносторонний треугольник. Шеститочечный правильный треугольник можно получить из трёхточечного добавлением к последнему трёх точек; добавление к последнему четырёх точек приводит к десятиточечному треугольнику и т. д. Так, добавляя к точке две, три, четыре и т. д. точки, мы будем располагать точки в виде правильного треугольника и, вычисляя количество точек в каждом таком треугольнике, получим числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, … (последовательность A000217 в [94]), называющиеся *треугольными*.



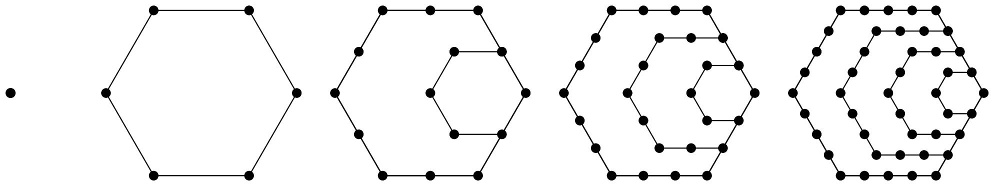
Аналогично добавляя к точке три, пять, семь и т. д. точек и образуя из них квадраты, можно получить числа 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, … (A000290, [94]), называющиеся *квадратными*.



Добавляя к точке четыре, семь, десять и т. д. точек и располагая их в виде правильного пятиугольника, можно построить *пятиугольные числа*: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, … (A000326, [94]).



Аналогично можно построить *шестиугольные числа*: 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, … (A000384, [94]),



семиугольные числа: 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, … (A000566, [94]) и т. д.

Итак, мы построили несколько простейших классов *многоугольных чисел* — положительных целых чисел, соответствующих расположению точек на плоскости в виде правильного многоугольника.

1.1.2. Многоугольные числа изучались в пифагорейской геометрии. Согласно Пифагору, такие числа строятся из *гномона*, или *основной единицы*. *Гномон* — это то, что при добавлении к фигуре даёт другую фигуру, подобную исходной. Так, в нашем случае гномоном является часть, которая должна быть добавлена к многоугольному числу, чтобы превратить его в следующее.

Для треугольных чисел гномон — это $n+1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Например, 21-точечный треугольник, составленный из гномонов, выглядит так:

1
2 2
3 3 3
4 4 4 4
5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6

Для квадратных чисел гномон — это нечётное число $2n+1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$: чтобы получить $(n+1)$-й квадрат из n-го квадрата, нам нужно добавить $2n+1$ элементов: по одному к концу каждого столбца, по одному к концу каждой строки и один элемент в углу. Квадрат размера 6×6, составленный из гномонов, выглядит так:

$$\begin{array}{cccccc} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Общее правило для увеличения на единицу размера правильного многоугольника таково: добавить к двум смежным строкам по точке, а затем заполнить точками остальные новые стороны. Стало быть, для преобразования n-го m-угольного числа в $(n+1)$-е m-угольное нужно присоединить $(m-2)n+1$ элемент.

Таким образом, треугольные числа получаются как последовательные суммы арифметической прогрессии $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$: они равны $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 3+3$, $10=6+4$, … Квадратные числа получаются как последовательные суммы арифметической прогрессии $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n+1, \ldots$: $1 = 1$, $4 = 1+3$, $9 = 4+5$, $16 = 9+7$, … Пятиугольные числа получаются как последовательные суммы арифметической прогрессии $1, 4, 7, 10, \ldots, 3n+1, \ldots$: $1 = 1$, $5 = 1+4$, $12 = 5+7$, $22 = 12+10$, …

Если расставлять точки не на плоскости, а на прямой, то получатся «линейные» числа. Собственно говоря, всякое натуральное число является линейным. Гномон для них — число 1, и они получаются как суммы элементов последовательности $1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$: $1 = 1$, $2 = 1+1$, $3 = 2+1$, $4 = 3+1$, … «Линейные» числа служат одномерным аналогом двумерных многоугольных чисел.

1.1.3. Первое общее определение m-угольных чисел было предложено Гипсиклом Александрийским во II веке до н. э. и процитировано Диофантом в его трактате «О многоугольных числах»: «Если взять сколько-нибудь чисел, начиная с единицы, имеющих одинаковые разности, то сумма их, если разность единица, будет ⟨треугольником, если же двойка⟩, то четырёхугольником, а если тройка — пятиугольником. Количество углов определяется разностью, увеличенной на двойку, а сторона — количеством взятых чисел, считая и единицу» [6, 48].

На современном математическом языке это определение имеет следующий вид: *n-е m-угольное число является суммой первых n членов арифметической прогрессии*

$$1,\ 1+(m-2),\ 1+2(m-2),\ 1+3(m-2),\ \ldots, \qquad m \geqslant 3.$$

Так что по определению выполнено

$$S_m(n) = 1 + (1+(m-2)) + (1+(m-2)\cdot 2) + \ldots + (1+(m-2)(n-1)).$$

В частности, мы получаем

$$\begin{aligned} S_3(n) &= 1+2+\ldots+n, \\ S_4(n) &= 1+3+\ldots+(2n-1), \\ S_5(n) &= 1+4+\ldots+(3n-2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Из приведённых выражений вытекает следующая рекуррентная формула для m-угольного числа:

$$S_m(n+1) = S_m(n) + (1 + (m-2)n), \quad S_m(1) = 1.$$

В частности, мы получаем

$$\begin{aligned} S_3(n+1) &= S_3(n) + (n+1), \\ S_4(n+1) &= S_4(n) + (2n+1), \\ S_5(n+1) &= S_5(n) + (3n+1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Для многих приложений удобно добавить к списку значение $S_m(0) = 0$.

Поскольку сумма первых n членов арифметической прогрессии $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ вычисляется как $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, получаем следующую общую формулу n-го m-угольного числа:

$$\begin{aligned} S_m(n) = \frac{n((m-2)n - m + 4)}{2} &= \frac{m-2}{2}(n^2 - n) + n = \\ &= \frac{(m-2)n^2 - (m-4)n}{2} = \frac{1}{2}m(n^2 - n) - n^2 + 2n. \end{aligned}$$

В частности, имеем

$$S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_4(n) = \frac{n \cdot (2n)}{2} = n^2, \quad S_5(n) = \frac{n(3n-1)}{2}, \quad \ldots$$

Формулы для m-угольных чисел, $3 \leqslant m \leqslant 30$, а также по несколько первых элементов соответствующих последовательностей Слоана можно найти в «Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей» [94] (см. таблицу).

Числа	Формула											Слоан
треугольные	$\frac{1}{2}(n^2+n)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	A000217
квадратные	$\frac{1}{2}(2n^2-0\cdot n)$	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	A000290
пятиугольные	$\frac{1}{2}(3n^2-1\cdot n)$	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	A000326
шестиугольные	$\frac{1}{2}(4n^2-2n)$	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	A000384
семиугольные	$\frac{1}{2}(5n^2-3n)$	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286	A000566
восьмиугольные	$\frac{1}{2}(6n^2-4n)$	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341	A000567
девятиугольные	$\frac{1}{2}(7n^2-5n)$	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396	A001106
десятиугольные	$\frac{1}{2}(8n^2-6n)$	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	A001107

1.1.4. Существует множество разных методов получения формул, приведённых в таблице.

Например, геометрическая иллюстрация для $n = 4$ на рисунке, расположенном ниже, показывает, что n-е треугольное число получается как половина прямоугольника со сторонами n и $n+1$. Значит, $S_3(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$$\begin{array}{ccccc} * & * & * & * & \cdot \\ * & * & * & \cdot & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

С другой стороны, эту формулу можно получить по индукции, опираясь на тот факт, что треугольное число с индексом $n+1$ получается из треугольного числа с индексом n прибавлением $n+1$. Для $n=1$ имеем

$$S_3(1)=1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}.$$

Переходя от n к $n+1$, получаем

$$S_3(n+1)=S_3(n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Применяя суммирование вида

$$2S_3(n)=\begin{array}{cccccccc} & 1 & + & \ldots & + & n & + \\ + & n & + & \ldots & + & 1, & \end{array}$$

получаем $2S_3(n)=(n+1)+\ldots+(n+1)=n(n+1)$, т. е. $S_3(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Для квадратных чисел геометрическая интерпретация в случае $n=3$ показывает, что два n-х квадратных числа образуют прямоугольник со сторонами n и $2n$; следовательно, $S_4(n)=\dfrac{2n\cdot n}{2}=n^2$.

$$\begin{array}{cccccc} \cdot & * & * & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & * & * & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \end{array}$$

С другой стороны, $(n+1)$-е квадратное число можно получить из n-го квадратного числа прибавлением $2n+1$, и можно доказать формулу $S_4(n)=n^2$ по индукции. При $n=1$ имеем $S_4(1)=1=1^2$. Переходя от n к $n+1$, получаем

$$S_4(n+1)=S_4(n)+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Применяя суммирование вида

$$2S_4(n)=\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 3 & + & \ldots & + & (2n-1) & + \\ + & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \ldots & + & 1, & \end{array}$$

получаем $2S_4(n)=2n+\ldots+2n=2n^2$. Отсюда $S_4(n)=n^2$.

Аналогичные конструкции можно применить к любому m-угольному числу. С геометрической точки зрения две суммы $a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+a_n$ первых n членов арифметической прогрессии $a_1,\ldots,a_n,\ldots$ соответствуют прямоугольнику со сторонами a_1+a_n и n. Это отражает тот факт, что суммы a_1+a_n, a_2+a_{n-1}, a_3+a_{n-2}, … равны между собой. В нашем случае $a_1=1$ и $a_n=1+(m-2)(n-1)$. Отсюда следует, что

$$2S_m(n)=(1+(1+(m-2)(n-1)))n=((m-2)n-m+4)n$$

и

$$S_m(n) = \frac{((m-2)n-m+4)n}{2}.$$

Можно также применить суммирование[1]:

$$2S_m(n) =$$

$$= \begin{matrix} 1 & + & 1+(m-2) & + \ldots + & 1+(m-2)(n-1) & + \\ + \; 1+(m-2)(n-1) & + & 1+(m-2)(n-2) & + \ldots + & 1, & \end{matrix}$$

откуда

$$2S_m(n) = (2+(m-2)(n-1)) + \ldots + (2+(m-2)(n-1)) = n(2+(m-2)(n-1))$$

и

$$S_m(n) = \frac{n((m-2)n-m+4)}{2}.$$

1.1.5. *Производящая функция* последовательности $S_m(1), S_m(2), \ldots, S_m(n), \ldots$ m-угольных чисел имеет вид

$$f(x) = \frac{x((m-3)x+1)}{(1-x)^3},$$

т. е. она удовлетворяет равенству

$$\frac{x((m-3)x+1)}{(1-x)^3} = S_m(1)x + S_m(2)x^2 + S_m(3)x^3 + \ldots + S_m(n)x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

В частности, получаем

$$\frac{x}{(1-x)^3} = x + 3x^2 + 6x^3 + \ldots + S_3(n)x^n + \ldots, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + S_4(n)x^n + \ldots, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{x(2x+1)}{(1-x)^3} = x + 5x^2 + 12x^3 + \ldots + S_5(n)x^n + \ldots, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{x(3x+1)}{(1-x)^3} = x + 6x^2 + 15x^3 + \ldots + S_6(n)x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Чтобы вывести выписанную выше формулу, рассмотрим два многочлена

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \quad \text{и} \quad g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n$$

с вещественными коэффициентами и степенями $m < n$, $b_0 \neq 0$.

Имеет место разложение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots \quad \text{при } |x| < r,$$

где $r = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $g(x)$. По определению это означает, что рациональная функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ служит производящей функцией полу-

[1] Говорят, что десятилетнему Гауссу учитель поручил просуммировать все числа от 1 до 100. Гаусс заметил, что каждое число i можно сгруппировать с числом $101-i$ и получить сумму 101, и если так сделать 100 раз, то это будет удвоенная искомая сумма, так как каждое из чисел будет дважды участвовать в парах. Следовательно, искомой суммой будет $1 + \ldots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2}$.

ченной последовательности $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ Далее, имеет место соотношение

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m = \\ = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots).$$

Теперь легко проверить следующие равенства:

$$a_0 = b_0c_0, \quad a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \quad a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0, \quad \ldots, \quad a_m = b_0c_m + \ldots + b_mc_0,$$

$$0 = b_0c_{m+1} + \ldots + b_{m+1}c_0, \quad \ldots, \quad 0 = b_0c_n + \ldots + b_nc_0,$$

$$0 = b_0c_{n+1} + \ldots + b_nc_1, \quad \ldots, \quad 0 = b_0c_{n+k} + \ldots + b_nc_k, \quad \ldots$$

Стало быть, последовательность $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ является решением *линейного рекуррентного уравнения n-го порядка* $b_0c_{n+k} + \ldots + b_nc_k = 0$ *с коэффициентами* $b_0, \ldots, b_n$. Более того, первые n элементов этой последовательности можно отыскать, используя первые n уравнений: $a_0 = b_0c_0$, $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$, $\ldots$, $a_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b_kc_{n-1-k}$.

Пусть, напротив, последовательность $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ является решением линейного рекуррентного уравнения n-го порядка $b_0c_{n+k} + \ldots + b_nc_k = 0$ с коэффициентами $b_0, \ldots, b_n$. Определим числа $a_0, \ldots, a_{n-1}$ по формулам $a_i = \sum_{k=0}^{i} b_kc_{i-k}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, опираясь на *начальные условия* $c_0, c_1, \ldots, c_n$ данной последовательности. Приходим к равенству

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} = \\ = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots).$$

Иначе говоря, получаем

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

Итак, производящая функция последовательности $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$ имеет вид $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \quad \text{и} \quad f(x) = a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1},$$

причём $a_0 = b_0c_0$, $a_1 = b_0c_1 + b_1c_0$, $\ldots$, $a_{n-1} = b_0c_{n-1} + b_1c_{n-2} + \ldots + b_{n-1}c_0$.

Теперь можно найти производящую функцию последовательности m-угольных чисел. Рассмотрим рекуррентное уравнение $S_m(n+1) = S_m(n) + (1 + (m-2)n)$. Переходя от n к $n+1$, получаем $S_m(n+2) = S_m(n+1) + (1 + (m-2)(n+1))$. Подставляя первое равенство во второе, находим $S_m(n+2) - S_m(n+1) = S_m(n+1) - S_m(n) + (m-2)$, т. е. $S_m(n+2) = 2S_m(n+1) - S_m(n) + (m-2)$. Аналогично получаем $S_m(n+3) = 2S_m(n+2) - S_m(n+1) + (m-2)$ и

$$S_m(n+3) - S_m(n+2) = 2S_m(n+2) - 2S_m(n+1) - S_m(n+1) + S_m(n),$$

т. е. $S_m(n+3) = 3S_m(n+2) - 3S_m(n+1) + S_m(n)$. Таким образом, мы получили следующее линейное рекуррентное уравнение на m-угольные числа:

$$S_m(n+3) - 3S_m(n+2) + 3S_m(n+1) - S_m(n) = 0.$$

Это линейное рекуррентное уравнение порядка 3 с коэффициентами $b_0 = 1$, $b_1 = -3$, $b_2 = 3$, $b_3 = -1$. Начальные условия имеют вид $S_m(1) = 1$, $S_m(2) = m$, $S_m(3) = 3m-3$. Обозначив $S_m(n+1)$ через c_n, можно переписать это уравнение как

$$c_{n+3} - 3c_{n+2} + 3c_{n+1} - c_n = 0, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = m, \quad c_2 = 3m - 3.$$

Следовательно, производящая функция последовательности m-угольных чисел имеет вид

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3},$$

где $b_0 = 1$, $b_1 = -3$, $b_2 = 3$, $b_3 = -1$ и $a_0 = b_0 c_0 = 1$, $a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 = 1 \cdot m + (-3) \cdot 1 = m - 3$, $a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 1 \cdot (3m-3) + (-3)m + 3 \cdot 1 = 0$. Так как у многочлена $g(x) = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 = (1-x)^3$ есть три совпадающих корня $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, производящая функция m-угольных чисел приобретает вид

$$\frac{1 + (m-3)x}{(1-x)^3} = S_m(1) + S_m(2)x + S_m(3)x^2 + \ldots + S_m(n)x^{n-1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Иначе говоря, имеет место равенство

$$\frac{x(1 + (m-3)x)}{(1-x)^3} = S_m(1)x + S_m(2)x^2 + S_m(3)x^3 + \ldots + S_m(n)x^n + \ldots, \quad |x| < 1.$$

1.2. Основные свойства многоугольных чисел

С помощью рассуждений, аналогичных приведённых выше, можно получить массу интересных свойств многоугольных чисел.

1.2.1. Например, Теон Смирнский во II веке до н. э. заметил, что *сумма двух последовательных треугольных чисел является квадратным числом*, получив следующую формулу, которую теперь называют *формулой Теона* [102]:

$$S_3(n) + S_3(n-1) = S_4(n).$$

В самом деле,

$$S_3(n) + S_3(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} = n^2 = S_4(n).$$

Иначе это можно показать на картинке:

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & * & * & \cdot \\ * & * & \cdot & \cdot \\ * & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

В этом примере, построенном для $n = 4$, квадрат составился из двух треугольников. Кроме того, эту формулу можно доказать по индукции. При $n = 2$ она выполнена: $S_3(2) + S_3(1) = 3 + 1 = 4 = S_4(2)$. Переходя от n к $n+1$, получаем

$$S_3(n+1) + S_3(n) = S_3(n) + (n+1) + S_3(n-1) + n =$$
$$= S_4(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = S_4(n+1).$$

Наконец, можно воспользоваться перегруппировкой слагаемых: