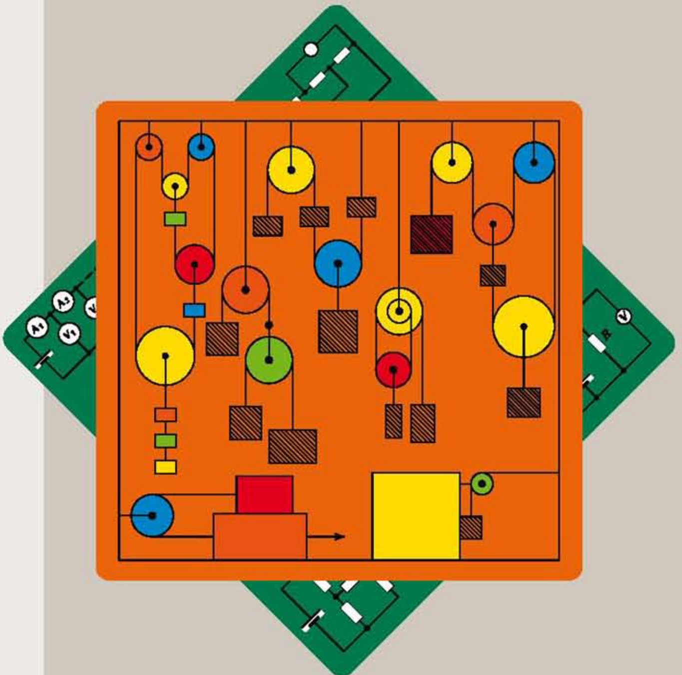
А. Р. Зильберман



Школьные физические олимпиады

МЦНМО

А. Р. Зильберман

Школьные физические олимпиады

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 53 (023)
ББК 22.3я721 + 74.262.22
З61

Зильберман А. Р.
Школьные физические олимпиады
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
247 с.
ISBN 978-5-4439-2382-6

В сборник вошли задачи по физике, предназначенные для подготовки школьников 7—11 классов к физическим олимпиадам. Некоторые задачи совсем просты, другие — намного сложнее. В начале каждого раздела приводятся важные для понимания задачи с подробными решениями, для других задач предлагаются подсказки, ответы и/или краткие решения, часть задач не содержит даже ответов — для того, чтобы учителю было удобно их использовать для работы в классе. Автор надеется, что сборник окажется полезным как для интересующихся физикой школьников, так и для их учителей.

Подготовлено на основе книги: *А. Р. Зильберман*. Школьные физические олимпиады. — 3-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2012. — ISBN 978-5-4439-0304-0.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2382-6

Оглавление

О школьных физических олимпиадах

Цели. Цели проведения школьных олимпиад достаточно ясны. Это и пробуждение интереса к изучению предмета у сильных учеников, которым на уроках часто бывает просто скучно, и дополнительная возможность обучения физике на более широком материале и на более высоком уровне. Это возможность для участников проверить свои силы в прямом соревновании с одноклассниками (для многих школьников, особенно для мальчишек, это очень важно), проявить свои способности (часто не вполне заметные на уроках, где к успеху приводит обыкновение «учить материал и добросовестно выполнять домашние задания»), реализовать спортивные амбиции и победить (на мой взгляд, ничего плохого в этом нет). Трудно переоценить пользу от проведения олимпиад и для учителя: это хорошая встряска, вызов, испытание, и просто праздник души. Администрация школы тоже имеет свои интересы: олимпиады в какой-то степени определяют «лицо» школы — учитель должен иметь в виду и это. В общем, проводить в школе физические олимпиады просто необходимо, а то разумные ученики могут увлечься и другими предметами, например, химией.

Уровень. Очень важный вопрос — каким должен быть уровень школьных олимпиад? Должны ли задачи школьных олимпиад быть «общедоступными», чтобы каждый хороший ученик мог их решить, или они должны быть сложными, требующими изрядной сообразительности? Должны ли задачи быть «программными» и, в хорошем смысле, стандартными — таких задач достаточно много в любой книжке для абитуриентов вузов, или же они обязаны быть необычными, выходящими за рамки изученного материала, требующими для решения не просто напряжения, но и «озарения»? Стоит ли включать в олимпиаду трудные задачи, если у вас всего два часа в неделю, а всем известно, что за это время ничего нельзя успеть, только выучить наизусть основные определения, да несколько формул?.. Ответ очень прост — олимпиаду проводите вы, делайте так, как считаете правильным.

Лично я считаю, что олимпиада без необычных и трудных задач просто не имеет смысла. Возможно, целесообразен компромисс: одна—две задачи достаточно просты и доступны каждому, одна потруднее, ещё одна — «олимпиадная», для настоящих любителей. Собственно, так и делают практически на всех олимпиадах — от районных и до Всероссийских.

Нужно сказать, что даже простые задачи по физике вовсе не так просты, практика показывает — нет таких задач, с которыми часть участников не смогли бы не справиться, «нулевые» работы всё равно будут, и немало. На мой взгляд, это не так уж страшно, для некоторых учеников это будет полезным стимулом для развития, остальным небесполезно будет узнать о пределах их компетенции — в школе ещё не поздно сменить приоритеты в изучении разных наук (каждый учитель встречал хороших, милых, старательных, добросовестных учеников и учениц, которым предмет «физика» давался с трудом — тем более трудолюбиво они его преодолевали, честь им и хвала за это — но пусть именно олимпиада всё расставит по местам).

Стоит иметь в виду и связь школьной физической олимпиады с олимпиадами следующих уровней — районной (окружной), городской и выше. Если на школьной олимпиаде задачи будут совсем простыми, то победители школьного тура выступят на более серьёзной олимпиаде совсем плохо, такой провал намного сильнее действует на честолюбивого подростка, чем неудача в школьном туре,— в результате он, скорее всего, никогда больше на олимпиаду по физике не пойдёт.

Виды задач. Обычно на олимпиадах по физике даются задачи «теоретического», вычислительного характера. В принципе вполне возможны задачи и совершенно других типов — экспериментальные задания, в которых нужно провести измерения и получить определённые результаты, «качественные» задачи, в которых нет определённого ответа, а оценить нужно рассуждения и объяснения участника. Возможны задания тестового типа, где приходится выбрать один из предлагаемых вариантов ответа, иногда встречаются задания причудливого типа — в виде кроссворда, текста с пропущенными словами или выражениями — этот ряд можно продолжить.

Экспериментальные задания очень хороши для заключительного этапа соревнования, если олимпиада проводится в несколько этапов. Тестовые задания и всякие кроссворды, на мой взгляд, совершенно неинтересны для сколько-нибудь разумных участников, а по поводу включения в олимпиады качественных заданий суждения встречаются разные. Всё же, на мой взгляд, предпочтительны именно задания первого типа — в них можно достаточно объективно оценить успешность решения (это в меньшей степени относится к полному и правильному решению задачи — тут всё ясно для любого типа заданий, а вот если решение не вполне верное, оценить его для «теоретической» задачи можно довольно аккуратно, для других же типов заданий разумных критериев предложить, скорее всего, не удастся — вернее, предложить-то можно, а вот достигнуть согласия по этому поводу среди членов жюри почти невозможно, практика это подтверждает). Объективность же оценки решений для олимпиады-соревнования очень важна.

Новизна и оригинальность. Нужно ли для школьного тура подбирать непременно новые, ранее не публиковавшиеся задачи? Ну, хорошо бы, конечно — да где же их взять... Даже на заключительных турах Всероссийских олимпиад значительная часть задач выглядит подозрительно знакомой. Немного поискав, можно найти практически те же задачи в старых (а то и не очень старых) номерах журнала «Квант», да и в распространённых сборниках задач повышенного уровня — недостатка в таких сборниках в последние годы нет. Для большинства школьников новыми будут почти любые задачи, особенно стараться придумать что-то совсем новое и не стоит. Впрочем, среди собранных в сборнике заданий изрядная часть окажется неизвестной большинству будущих участников школьных физических олимпиад (во всяком случае — я на это надеюсь).

Составление заданий. Несколько практических советов по подготовке и проведению олимпиады. Задания для олимпиады подготовить не слишком трудно — интересных задач по физике можно без особого труда набрать с избытком. Труднее сбалансировать их по уровню трудности, охвату пройденных на занятиях тем, характеру заданий. Удачным можно считать набор, в котором представлены и трудные, и лёгкие (ну, относительно лёгкие) задания, где примерно половина заданий относится к недавно пройденному материалу, где хотя бы одна задача может быть решена практически без вычислений, на уровне здравого смысла, где есть хотя бы одна задача, которую почти никто из участников не решит (если совсем никто — это неудача, значит вы плохо знаете уровень своих учеников), где есть хотя бы одна задача, которая вызовет интерес и жаркие споры среди участников, где есть хотя бы одна задача, которую участник принесёт домой и будет предлагать родителям её решить, а они не решат... В общем, список пожеланий неограничен, выполнить их все вряд ли получится — не беда, к совершенству можно стремиться не только в текущем году, что-нибудь можно оставить на следующий год.

Задач должно быть не слишком много — для 7 и 8 классов можно ограничиться тремя задачами и дать для решения два часа (астрономических), для 9 и 10 классов задач лучше дать четыре задачи на три часа. Для 11 класса можно поступить так же, но лучше предложить вариант потруднее, из пяти задач на четыре часа (благо список возможных тем для выпускников намного шире, чем даже для десятиклассников посреди учебного года). Задания стоит распечатать и раздать каждому из участников, тексты заданий можно им оставить — есть шанс, что они ещё раз смогут над ними подумать дома, после окончания олимпиады.

Разбор задач. Нет смысла проводить разбор задач сразу после окончания работы — большинство участников будут сильно утомлены решением задач, им трудно будет даже внимательно слушать. А вот сделать разбор на занятии физического кружка (если он в школе работает) будет очень полезно. В ином случае можно распечатать и раздать (или вывесить на стенде) краткие решения задач с комментариями, касающимися выставления баллов за возможные неполные решения.

Оценка решений. Целесообразно оценивать каждую задачу одинаковым числом баллов (после долгих споров на «больших» физических олимпиадах принято делать именно так), удобно взять максимальный балл равным пяти. Полное решение задачи оценивается полным баллом, не слишком серьёзные погрешности (например, не доведённое до численного ответа решение либо неверный численный ответ при верном «буквенном», нехватка действительно необходимых, хотя бы кратких, пояснений, другие погрешности, которые вы не сочтёте слишком серьёзными) уменьшают оценку до 4 баллов. Если существенная часть задачи сделана, но задача не доведена до конца (за что, по вашему мнению, оценку 4 ставить было бы слишком щедро) — оценка задачи будет 3 балла. Это касалось тех случаев, когда задача в основном решена (полностью, не совсем полностью, либо частично). А если задача решена неверно — можно поставить 1 балл (за проблески разумного в написанном) или 2 балла (за существенные соображения, из которых всё же не видно решения).

Оценка работ. Для окончательного расчёта предлагается учитывать только полностью (5 баллов) или почти полностью решённые (4 балла) задачи — каждую за *одну* решённую задачу, не делая различий между 4 и 5 баллами, а задачи, оценённые тремя баллами, считать каждую за *половину* решённой задачи. Места, занятые участниками, определяются по числу решённых задач, без учёта «мелких» баллов 0, 1 и 2. Таким образом, участник с баллами 1, 4, 5, 3, 3 имеет *три* решённые задачи, участник 3, 5, 4, 5, 2 имеет 3,5 решённые задачи, а участник 2, 2, 1, 1, 3 имеет 0,5 решённой задачи. Мелкие же баллы можно учитывать только для определения «тонких» различий между участниками, набравшими *одинаковое* количество решённых задач. Такая система имеет определённые преимущества, она «сглаживает» небольшие отклонения в оценках (намного проще выделить случаи, когда задача *практически решена* и поставить за неё 4 или 5 баллов, когда задача *решена наполовину* и поставить за это 3 балла, чем суммировать «мусорные» баллы, полученные непонятно за что...). Такая система оценок понятна участникам и, как показывает многолетняя практика, легко ими принимается.

Проверка работ. Очень удобно поручить оценку одной задачи во всех работах данного класса одному проверяющему — это заметно повышает объективность проверки, что всегда является трудной проблемой, когда часть работ проверяет один член жюри, а часть — другой. Во всех случаях целесообразно после окончания основной проверки внимательно просмотреть все работы, претендующие на награждение (таких работ обычно не так много): часто при проверке происходят обидные ошибки (легко просто не заметить не слишком аккуратно написанное решение, пропустить важную часть решения — при длительной работе глаз проверяющего «замыливается», он может пропустить что-то важное, а то и зачесть за решение просто похожее, но неверное рассуждение — даже и без всякого злого умысла).

На больших олимпиадах обычно предусмотрена возможность апелляции, когда участник может попытаться «защитить» своё решение при заниженной оценке его работы членом жюри. Вряд ли это нужно для школьной олимпиады, по крайней мере официально. Всё же учитель должен быть готов признать допущенную при проверке работы ошибку, если участник на неё укажет — такое встречается очень часто (я имею в виду ошибки при проверке), никакой, даже многолетний опыт участия в проведении олимпиад, не гарантирует безошибочной проверки — я знаю, о чём говорю!

Оригинальные решения. Особенно важно не допустить ошибки при оценке оригинального, нетривиального решения задачи — такие решения, к счастью, попадаются регулярно, многие школьники (особенно младшие) соображают просто блестяще, и подобные случаи нельзя пропускать. Положение усложняется тем, что такие решения часто излагаются сумбурно, без достаточных обоснований, порой — и с ошибками. Тем не менее, ценность подобных решений следует отмечать отдельно, если при награждении победителей олимпиады мы учитываем только число решённых задач, то следует предусмотреть специальные призы «за красивое и оригинальное решение задачи».

Проведение олимпиады. Во время проведения олимпиады, как правило, запрещено пользоваться учебными пособиями, справочниками, сделанными ранее записями (например, школьными тетрадями) — иначе некоторые участники могут получить неоправданные преимущества. Есть смысл ограничить применение мощной вычислительной техники (например, разрешить пользоваться только непрограммируемыми калькуляторами) — возможности современных «наладонников» поражают воображение, такой малогабаритный компьютер размером с обычный калькулятор может содержать, например, обширную базу задач, возможно и с решениями. Во всяком случае, на физических олимпиадах высокого уровня (включая международные) такие ограничения приняты уже давно.

Списывание. Во время проведения олимпиады приходится решать множество проблем — например, пресечение списывания (школьники в нашей стране списывают повсеместно, и на олимпиадах тоже), не очень помогают и привычные заклинания «работайте самостоятельно, списывать на олимпиаде — просто нечестно по отношению к окружающим» — многих это не останавливает. Помогает то, что при проверке работ многие случаи списывания сразу бросаются в глаза — большинство списывающих плохо понимают, что они списывают, они совершают глупейшие ошибки, копируют чужой текст с абсолютной точностью, включая ненужные подробности — при выявлении таких работ следует проявлять решительность и беспощадность, честная игра на олимпиадах — важная сторона дела.

Кого позвать на помощь. Во многих школах охотно привлекают к проведению олимпиад студентов — будущих физиков и математиков, выпускников своей школы — это просто замечательная традиция, она позволяет поднять престиж участия школьников в олимпиаде до небывалых высот, студенты очень неплохо проверяют олимпиадные работы, да и списывать при них становится затруднительным. Кстати, для проведения олимпиады в младших классах можно привлечь и некоторых старшеклассников — польза тут получается взаимной. А вот привлекать к проведению олимпиады родителей — дело очень, как бы это сказать, неоднозначное — родителям очень трудно быть объективными и справедливыми, их можно понять, но не стоит звать на олимпиаду (кстати, и для учителя могут стать проблемой собственные дети, участвующие в олимпиаде...).

Итак... В предлагаемом сборнике собраны олимпиадные задачи разной трудности — от совсем простых и до весьма сложных, особенно трудные задачи отмечены «звёздочкой» (не всегда трудную задачу легко отличить «на глаз»). К некоторым задачам приведены подсказки, такие задачи в тексте помечены буквой «п» (например, **1.10$^{\text{п}}$**). К большинству задач приведены не только ответы, но и краткие решения, часть задач решена довольно подробно. Задачи разбиты по темам, но не разделены «по классам» — при современной разноголосице программ изучения предмета это сделать затруднительно, самим вам виднее, к какому классу при выбранной программе удобно отнести данную задачу. Предлагаются и готовые наборы задач — с примерами оценивания решений «в баллах», может быть, это поможет вам выбрать удобную систему оценивания олимпиадных работ. Кроме обычных задач приведено несколько (совсем немного) примеров заданий других типов — игровых методик «измерь сам», экспериментальных заданий, задач «на сообразительность», задач-шуток.

РАЗДЕЛ 1

Кинематика

Примеры решения задач

Задача 1. Первый час автомобиль ехал по дороге со скоростью 40 км/ч, следующий час — со скоростью 60 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на всём пути и среднюю скорость на второй половине пути.

Решение. Всего автомобиль проехал 100 км за 2 часа, его средняя скорость на всём пути равна 50 км/ч. Всю вторую половину пути (и, кстати, некоторую часть первой половины — но это не важно) автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, значит его средняя скорость на второй половине пути равна 60 км/ч. А вот посчитать его среднюю скорость на первой половине пути было бы сложнее, хорошо, что нас об этом не спрашивали…

Задача 2. Автомобиль ехал из города *М* в город *Д* со скоростью ровно 40 км/ч, назад — со скоростью 60 км/ч. Найдите его среднюю скорость перемещения за всё время путешествия туда и обратно.

Решение. Полное перемещение автомобиля оказалось нулевым — следовательно, его средняя скорость равна нулю! А вот для того, чтобы получить «правильный ответ — 48 км/ч», нужно сформулировать задачу иначе, что и сделано в следующей задаче.

Задача 3. Автомобиль ехал из города *М* в город *Д* по прямой дороге, половину пути со скоростью 40 км/ч, вторую половину — со скоростью 60 км/ч. Найдите его среднюю скорость за всё время путешествия.

Решение. Длина пути в условии не задана, одно из двух: либо эта величина для решения не понадобится (какая бы ни была длина пути, ответ получится один и тот же), либо её просто забыли дать — такое бывает, и не слишком редко, и даже на школьных олимпиадах. В любом случае полезно задать эту длину: в «буквенном» виде или прямо в численном, что немного проще. Сделаем это — пусть расстояние между городами равно 240 км (число не хуже любого другого, а его половинки делятся на 40 и 60, что упрощает вычисления). Тогда время путешествия

$$T = \frac{120}{40} + \frac{120}{60} = 5 \text{ (часов)}.$$

Отсюда средняя скорость

$$V = \frac{240}{5} = 48 \text{ км/ч}.$$

Если бы мы взяли другую длину пути (например, вдвое больше), то общее время изменилось бы соответственно, и ответ остался бы тем же. На самом деле задачу мы решили (если догадались записать последнее рассуждение), но без труда решение можно сделать аккуратнее. Запишем его в «буквенном» виде: пусть вся длина пути составляет L, тогда время проезда первой половины $\frac{L}{2V_1}$, для второй половины $\frac{L}{2V_2}$, средняя скорость на всём пути

$$V = \frac{L}{\frac{0{,}5L}{V_1} + \frac{0{,}5L}{V_2}} = \frac{2V_1 \cdot V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 60}{100} = 48 \text{ км/час}.$$

Движение тела в поле тяжести. Немного теории

Часто этот раздел кинематики называют немного иначе — движение тела (иногда говорят про «материальную точку»), брошенного под углом к горизонту. Это название не слишком удачное — попробуйте бросить тело как-то иначе, не под углом к горизонту, а потом расскажите, что у вас получилось... Но дело не в названиях — раздел этот не слишком прост, многие задачи требуют изрядной сообразительности и аккуратности в «арифметической» части решения, и тему нужно изучать серьёзно.

Итак, задача: тело брошено из заданной точки под заданным углом α к горизонту, при броске ему сообщили известную скорость V_0. Нужно описать движение тела при некоторых упрощающих предположениях — ускорение свободного падения g одинаково во всех точках, где тело побывало (можно сказать и иначе: «землю считать плоской!»), сопротивлением воздуха при движении тела пренебречь.

Не всегда эти предположения разумны — если бросить тело с очень большой скоростью, оно сможет улететь очень далеко от поверхности земли, а там притяжение может серьёзно ослабеть (а значит, и ускорение свободного падения нельзя будет считать неизменным — таким же, как и у поверхности). Да и сила сопротивления воздуха может играть очень важную роль. Чаще всего мы просто вынуждены пренебрегать сопротивлением воздуха, чтобы не усложнять задачу до полной нерешаемости — но следует уметь отличать случаи, в которых это предположение не слишком искажает ответ, от прочих случаев!

Для решения таких задач удобно применить математический приём — ввести вертикальную и горизонтальную оси координат и рассмотреть *как бы* два независимых простых движения вдоль этих осей. Почему так можно поступать — насколько независимы такие два движения? Что касается вертикального движения, это вполне разумно: бросим одновременно несколько тел с одинаковыми вертикальными и различными горизонтальными составляющими скоростей — все эти тела в любой момент времени окажутся на одной и той же высоте, одновременно достигнут верхней точки полёта и одновременно упадут на землю. А вот движения по горизонтали не совсем уж независимы от вертикальной компоненты скорости — тела, брошенные с разными вертикальными и одинаковыми горизонтальными составляющими скорости, упадут на землю не одновременно, а значит, пролетят различные расстояния по горизонтали. Получившиеся движения довольно просты — особенно вдоль горизонтальной оси, — это просто равномерное движение с постоянной скоростью $V_X = V_0 \cdot \cos\alpha$. Движение по вертикали происходит с постоянным ускорением, и там всё тоже просто.

Выберем начало координат в точке броска, направление вертикальной оси вверх будем считать положительным (при этом ускорение вдоль этой оси получится $-g$). Тогда координаты будут изменяться со временем так:

$$X(t) = V_X \cdot t = V_0 \cdot t \cdot \cos\alpha$$

и

$$Y(t) = V_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - 0{,}5 \cdot g \cdot t^2.$$

Эти уравнения могут оказаться полезными, например, для такой задачи: камень бросают с высоты 1 м с начальной скоростью 20 м/с под углом 45° к поверхности. Перелетит ли он стену высоты 20 м, находящуюся на расстоянии 30 м от точки броска? Выбрав $X = 30$ м, найдём время полёта до стены «по горизонтали»

$$t = \frac{30}{20 \cdot \cos 45^\circ} \approx 2{,}1 \text{ с}$$

(точно считать совсем необязательно — впрочем, это будет видно дальше). Теперь посмотрим, какая координата по вертикали будет через такое время, и сравним её с величиной $(20 - 1) = 19$ м:

$$Y = 20 \cdot 2{,}1 \cdot \sin 45^\circ - 0{,}5 \cdot 10 \cdot 2{,}1^2 = 29 - 22 = 7 < 19 \text{ м}.$$

Итак, не перелетит, причём нехватка очень большая, и точный расчёт не был необходим, мы даже ускорение свободного падения разумно округлили! И учёт сопротивления воздуха результат наш не изменит, даже ещё труднее было бы перебросить стену.

А вот при высоте стены 8 м пришлось бы повторить расчёт, сделать его поточнее, да и ускорение свободного падения пришлось бы взять поаккуратнее, а если бы получился ответ типа «перелетит с запасом 5 см», то непременно нужно было бы сказать, что учёт сопротивления воздуха тут просто необходим!

Ещё одно важное замечание относительно полученных уравнений: до момента броска тело не двигалось (или, по крайней мере, двигалось не так), после падения на землю эти уравнения тоже нельзя применять. Ясно, что нужно дополнительно записать ограничения для t в этих уравнениях: $0 \leqslant t \leqslant t_{\Pi}$.

Для многих применений полезно исключить из этих двух уравнений время t и получить одно уравнение, которое связывает между собой вертикальные и горизонтальные координаты для каждой из точек, в которых побывает тело при полёте — это и есть знаменитое «уравнение траектории». Проще выразить t из первого уравнения и подставить во второе. После простых преобразований получим:

$$Y = X \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gX^2}{2V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha},$$

или

$$Y = X \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gX^2}{2V_0^2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Второй вариант формулы удобнее — в неё входит только одна функция угла: $\operatorname{tg} \alpha$. Предыдущую задачу при помощи этого уравнения можно было решить совсем просто — подставить вместо X расстояние до стены 30 м и найти величину Y, после чего опять сравнить её с величиной 19 м (с учётом того, что начало координат смещено вверх на 1 м — высота точки броска). Впрочем, при её первом решении мы делали то же, что и при выводе формулы траектории.

Но уравнение траектории подходит и для куда более сложных расчётов. Рассмотрим пример: тело бросают из точки, которая находится на высоте H над поверхностью земли. Точка, в которую нужно попасть, лежит на расстоянии L по горизонтали от точки броска. При какой скорости бросания это возможно? Понятно, что нужно найти минимальное значение скорости, а любое бóльшее значение условию задачи удовлетворяет. Ясно и то, что нам не задан угол бросания, и его придётся находить самостоятельно — этот оптимальный угол, при котором окажется достаточной минимальная скорость бросания. Если бы точки старта и финиша находились на одной высоте (случай $H = 0$), то выгоднее всего было бы бросать под углом 45 градусов.

А в нашем случае придётся думать. Итак, запишем уравнение траектории, которая проходит через точку $(-H, L)$:

$$-H = L \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL^2}{2V_0^2} \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

У нас получилось уравнение, в котором удобно рассматривать в качестве неизвестной величины значение $\operatorname{tg} \alpha$ (если вы привыкли обозначать неизвестные одной буквой, можно этот тангенс обозначить буквой Z, потому как X и Y уже заняты). Получится

$$\frac{gL^2}{2V_0^2} \cdot Z^2 - L \cdot Z + \frac{gL^2}{2V_0^2} - H = 0.$$

Для любого значения скорости можно попытаться найти угол бросания. Сколько таких углов мы получим для каждого заданного значения скорости? Если скорость мала, то корней у нашего уравнения вообще не будет, если скорость достаточно велика, то корни будут, и их будет два, как у обычного квадратного уравнения. По мере уменьшения скорости бросания корни уравнения (т. е. подходящие углы) становятся всё ближе друг к другу, и при определённом (минимально возможном) значении скорости корни сливаются в один — это и есть оптимальный угол. Для нахождения минимальной скорости вовсе не обязательно решать полученное квадратное уравнение — достаточно исследовать его дискриминант. Приравняем дискриминант этого квадратного уравнения к нулю:

$$D = L^2 - 4\frac{gL^2}{2V_0^2} \cdot \left(\frac{gL^2}{2V_0^2} - H\right) = 0$$

(условие на минимальность скорости бросания). Отсюда легко получить значение квадрата минимальной скорости:

$$\frac{gL^2}{V_0^2} = H + \sqrt{H^2 + L^2},$$

$$V_0^2 = g \cdot (\sqrt{H^2 + L^2} - H).$$

Для $H = 0$ получим известное значение $V_0 = \sqrt{gL}$. Кстати, для уравнения с нулевым дискриминантом и оптимальный

В сборник вошли задачи по физике, предназначенные для подготовки школьников 7—11 классов к физическим олимпиадам. Некоторые задачи совсем просты, другие — намного сложнее — на олимпиадах всякое бывает... В начале каждого раздела приводятся важные для понимания задачи с подробными решениями, для других задач предлагаются подсказки, ответы и/или краткие решения, часть задач не содержит даже ответов — для того, чтобы учителю было удобно их использовать для работы в классе. Автор надеется, что сборник окажется полезным как для интересующихся физикой школьников, так и для их учителей.

ISBN 978-5-94057-626-6