К. А. Кноп

Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам

Школьные
Математические
Кружки

К. А. Кноп

Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
К53

Кноп К. А.
Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
103 с.
ISBN 978-5-4439-2381-9

Пятая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам о взвешиваниях и предназначена для занятий со школьниками 6–9 классов. В неё вошли разработки семи занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя. Приведены также дополнительные задачи. Для удобства заключительная часть книжки сделана в виде раздаточных материалов.

Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков.

Подготовлено на основе книги: *К. А. Кноп*. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. — 5-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-1034-5.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2381-9

Я посвящаю эту книжку своему отцу,
научившему меня мыслить,
а значит, существовать.

Предисловие

Математические головоломки, как и математические задачи, известны с древности. В течение очень долгого времени они не отделялись друг от друга. Чёткого рубежа нет и поныне, несмотря на появление значительного культурного слоя, как в области олимпиадных задач, так и в области спортивных пазлов, то есть головоломок, традиционно предлагаемых на чемпионатах по решению головоломок (например, к таким пазлам относятся популярные ныне судоку и какуро). В рамках этой книжки автор хотел бы отличать головоломки от задач следующим образом: каждый сюжет перестает быть головоломкой и становится математической задачей тогда, когда к нему найден подход, позволяющий решать не только его, но и аналогичные сюжеты.

Задачи, о которых у нас пойдёт речь, очень популярны среди любителей головоломок и вместе с тем незаслуженно обойдены вниманием в большинстве книжек, предназначенных для занятий математического кружка. О них, конечно же, упоминается, но как-то вскользь. Вероятно, причиной такого положения дел является то, что в этих задачах очень многие видят головоломки, и только головоломки. На самом деле «взвешивательные» сюжеты — отличный полигон для знакомства с самыми разнообразными математическими идеями и методами, в том числе и актуальными для современной математики. Косвенным доказательством этого тезиса служит то, что зачастую простое упражнение всего одной деталью отличается от нерешённой математической проблемы. Например, задача об определении двух фальшивых монет из N за *наименьшее* число взвешиваний на чашечных весах — нерешённая (открытая) проблема. Задач промежуточной трудности (достаточно сложных, но решаемых полностью) не так много. Тем не менее они есть, и именно ими автор и старался наполнить эту книжку. Пользуясь случаем, автор выражает огромную признательность научному редактору книги Александру Васильевичу Шаповалову, вклад которого невозможно переоценить.

Для ряда задач мы выделили специальную часть, содержащую обсуждение основной идеи решения, предварительный анализ условия или иные наводящие соображения. Она напечатана более мелким шрифтом сразу после условия задачи. При решении задачи на занятии кружка учитель может «поделиться» этой частью решения с учениками. Аналогично после текста решений мелким шрифтом набраны комментарии для преподавателя, относящиеся к развитию и возможным обобщениям задачи.

Знаком ☝ обозначается важный комментарий для преподавателя (обычно после решения задачи), разъясняющий, на что следует обратить внимание, а также какие аналогии и обобщения имеют сама задача и приведённое решение.

Рамки этой книги не позволяют упомянуть в ней все сюжеты, имеющие отношение к взвешиваниям. Автору пришлось делать выбор, и не всегда он был лёгким. Так, в книжку не поместились задачи о сортировке, о нестандартных взвешивающих устройствах и многие другие. Впрочем, взвешивания — это только один из типов задач *комбинаторного поиска*. Чтобы напомнить о том, что бывают и другие типы, первое занятие мы целиком посвятили угадываниям задуманных объектов. Не удивляйтесь: это тоже задачи, решение которых сводится к работе с информацией, — а это и есть основное содержание настоящей книги.

Константин Кноп,
Санкт-Петербург, ноябрь 2010.

Занятие 1

Угадай, что я задумал!

В этом занятии, как и во всех последующих, задачи расположены в «генетическом» порядке: следующие задачи развивают предыдущие, а их решения могут существенно опираться на решения предыдущих. Это не значит, что последнюю задачу занятия совсем невозможно решить раньше остальных. Но пытаться решать задачи с конца или вразброс — тупиковый путь: решить, может быть, и решишь, но ничему не научишься. Поэтому, даже выдав листочек сразу со всеми задачами, учитель должен сориентировать школьников на *строго последовательное* решение. С этой целью рекомендуется разбирать первые задачи сразу, как только они решены хотя бы двумя-тремя учениками.

Во всех задачах на угадывание алгоритм считается верным, если он работает (то есть укладывается в заданное число действий и при этом решает поставленную задачу) во *всех* возможных случаях, а не только тогда, когда угадывающему повезло.

Если не оговаривается противное, то во всех последующих задачах этого занятия загадывающий даёт на вопросы ответы «да» либо «нет».

Задача 1.1. Петя загадал натуральное число от 1 до 8. Витя хочет отгадать его, задавая Пете вопросы, на которые тот отвечает «да» либо «нет». Как должен действовать Витя, чтобы отгадать загаданное число за 3 вопроса?

Несложная задача, допускает много различных решений. Например, первым вопросом можно спрашивать: «Верно ли, что загаданное тобой число чётно?». Если ученики предлагают решение с использованием неравенств, то полезно обратить их внимание на существенную разницу между строгими и нестрогими неравенствами. Например, один и тот же вопрос можно задать и как: «Верно ли, что твоё число не больше четырёх?», и как: «Верно ли, что твоё число меньше пяти?». Ещё один способ облегчить ученикам решение — предложить им разбиться на пары и поиграть за Петю и Витю.

Решение. Будем оформлять ход угадывания в виде такой таблички:

<table>
<tr><th>Вопр. 1</th><th>Отв. 1</th><th>Вопр. 2</th><th>Отв. 2</th><th>Вопр. 3</th><th>Отв. 3</th><th>Число</th></tr>
<tr><td rowspan="8">Больше 4?</td><td rowspan="4">Да</td><td rowspan="4">Больше 6?</td><td rowspan="2">Да</td><td rowspan="2">Больше 7?</td><td>Да</td><td>8</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет</td><td rowspan="2">Больше 5?</td><td>Да</td><td>6</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нет</td><td rowspan="4">Больше 2?</td><td rowspan="2">Да</td><td rowspan="2">Больше 3?</td><td>Да</td><td>4</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Нет</td><td rowspan="2">Больше 1?</td><td>Да</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>1</td></tr>
</table>

Первым вопросом Витя спрашивает: «Верно ли, что твоё число больше четырёх?» Ответить «да» Петя может, если он задумал 5, 6, 7 или 8, а ответ «нет» означает, что задумано одно из чисел 1, 2, 3 или 4. Как после ответа «да», так и после ответа «нет» Вите останется угадать задуманное число из четырёх возможных вариантов, и второй вопрос Вити для этих вариантов различен. После второго ответа у Вити останется для задуманного числа два варианта, а после третьего — только один, приведённый в столбце «Число».

Задача 1.2. Сколько вопросов понадобится Вите, если Петя может загадать число от 1 до 32?

Как правило, ученикам не нужно подсказывать, что 32, как и 8, — степень двойки. Однако если задача «зависла» надолго, учитель может задать наводящие вопросы: как свести эту задачу к предыдущей? Сколько вопросов для этого потребуется Вите?

Ответ: 5 вопросов.

Решение. Как и в предыдущей задаче, каждым вопросом Витя может делить пополам тот интервал, в котором может лежать задуманное Петей число. После первого вопроса он оставит 16 вариантов, после второго — 8, затем 4, 2 и, наконец, 1.

Задача 1.3. а) Петя загадал одну из сторон правильного восьмиугольника. Витя может провести любую диагональ в этом восьмиугольнике и спросить Петю, в какой из двух получившихся частей лежит загаданная сторона. Как Вите отгадать сторону за 3 вопроса? б) То же для семиугольника.

Несложная задача, демонстрирующая, что вовсе не обязательно загадывать числа, а тип разрешённых вопросов может быть сильно ограничен условиями задачи.

Решение. а) Первая диагональ должна соединять две противоположные вершины (последующие диагонали уже могут быть проведены по-разному).

б) Первая проведённая Витей диагональ должна разделить семиугольник на части, содержащие 4 и 3 стороны.

Задача 1.4. Петя загадывает число от 1 до 10. Докажите, что Вите не хватит трёх вопросов, чтобы угадать это число.

Сразу стоит напомнить, что «не хватит» означает, что *не во всех случаях* хватит. Так что это первая задача, в которой мы хотим получить от учеников *доказательство оценки*. Причём здесь ещё реально провести доказательство полным перебором, а вот в более сложных задачах это уже затруднительно. Однако дальнейшие задачи будут решаться намного проще, если в этом месте учитель предложит ученикам снова поиграть за Петю и Витю, причем «Пете» разрешит не загадывать число на самом деле, а выбирать свои ответы так, чтобы максимально затруднить «Вите» угадывание.

Первое решение. Проследим за количеством вариантов (возможностей для загаданного числа), остающихся после ответов Пети. Каким бы ни был первый вопрос Вити, общее количество чисел, соответствующих ответам «да» или «нет», равно 10, поэтому после первого ответа в неблагоприятном случае может остаться не менее 5 вариантов. Каким бы ни был второй вопрос, после ответа на него может остаться не менее $\left[\frac{5}{2}\right]+1=3$ вариантов, а после третьего — не менее $\left[\frac{3}{2}\right]+1=2$. Но это и значит, что после трёх ответов Вите не удалось угадать число.

Второе решение. Предположим, что Вите как-то удалось составить набор вопросов, решающих задачу, и оформить табличку как в задаче 1.1: для второго вопроса он, возможно, заготовил 2 варианта — для ответов «да» и «нет» на первый вопрос, для третьего — 4 варианта. Теперь есть 8 вариантов развития событий, которые мы для краткости назовем «наборами ответов». Например, набор «да, нет, да» означает, что на первый вопрос был дан ответ «да». Далее Витя задал второй вопрос, приготовленный для случая ответа «да», получил ответ «нет», задал третий вопрос, приготовленный для случая ответов «да, нет», и получил на него ответ «да». Теперь он обязан предъявить число. Каждому набору ответов должно соответствовать не более одного числа, иначе мы не решили задачу. Но такое невозможно: чисел больше, чем наборов ответов. Противоречие.

Задача 1.5. В орфографическом словарике 120 страниц, на каждой из них по 60 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Попробуйте подсказать, что сначала нужно угадать страницу, а потом — номер слова на этой странице. На первое действие уйдёт не более 7 вопросов, на второе — не более 6. А вот поставленный в задаче вопрос о меньшем числе вопросов — это повторение задачи об оценке, но тут уже полный перебор не помогает. Предложите ученикам подумать над тем, сколько всего различных слов в словарике.

Решение. Поскольку $120 < 128$, для угадывания номера страницы Вите хватит 7 вопросов. Затем ещё за 6 вопросов Витя угадает номер слова на этой странице ($60 < 2^6 = 64$). Таким образом, 13 вопросов Вите точно хватит. А вот меньшего числа не хватит, так как задуманным может быть любое из $120 \cdot 60 = 7200$ слов, а 12 вопросов позволяют угадать не более чем из $4096 = 2^{12}$ вариантов.

Задача 1.6*. В англо-русском словарике 80 страниц, на каждой из них по 50 слов. Петя открыл словарь на случайной странице и загадал случайное слово с этой страницы. Сможет ли Витя угадать его за 13 вопросов? А за меньшее число?

Задача с некоторым подвохом. Если решать её так, как предыдущую, то получается решение за $7 + 6$ вопросов. Но вот оценка даёт только 12, потому что $80 \times 50 = 4000 < 2^{12} = 4096$. (Разумеется, школьники могут не знать ни логарифмирования, ни даже возведения в степень, но здесь хватает умения делить на 2 и сосчитать, сколько таких делений необходимо.) Зато после вычисления оценки приходит идея, что можно с самого начала перенумеровать слова от 1 до 4000 и отгадывать номер слова! Систематическое применение этой идеи и превращает головоломку в более-менее стандартную математическую задачу.

Ещё можно порекомендовать поиграть в «угадай дату»: учитель загадывает дату (день и месяц), а ученики пытаются её угадать, называя свои даты. Учитель отвечает: раньше или позже его дата, чем названная.

Решение. Мысленно перенумеруем все слова — их не более 4000, поэтому угадать задуманное слово можно не более чем за 12 вопросов.

Задача 1.7. Петя загадал пару натуральных чисел и сообщил Вите, что их произведение равно 60. Помогите Вите угадать эти числа за три вопроса. Порядок чисел в паре не имеет значения.

Решение. Перечислим все варианты: $(1, 60)$, $(2, 30)$, $(3, 20)$, $(4, 15)$, $(5, 12)$, $(6, 10)$. Их всего шесть, и Витя может просто отгадывать меньшее число в каждой паре! Впрочем, нетрудно придумать за него и другие варианты отгадывания. Например, первым вопросом может быть: «Верно ли, что одно из загаданных чисел делится на 4?»

В занятии 5 мы вернёмся к этой же задаче в усложнённом варианте.

Задача 1.8. Петя загадывает два натуральных числа от 1 до 10 — одно чётное и одно нечётное. Помогите Вите угадать эти числа за 5 вопросов.

Ещё один сюжет, в котором требуется научиться делить пополам, потому что если отгадывать числа по отдельности, то потребуется шесть вопросов. Подсказка, которую можно дать ученикам, если они не справятся самостоятельно: первым вопросом Витя может спросить, верно ли, что сумма загаданных чисел меньше 12. Впрочем, в решениях приведён ещё более простой рецепт.

Первое решение («идейное»). Пусть Витя просто пронумерует все возможные пары загаданных чисел (в любом порядке), покажет листок с нумерацией Пете, а дальше будет задавать вопросы про пару с таким-то номером. Номеров всего 25, $25 < 2^5 = 32$, поэтому Витя сумеет угадать пару за 5 вопросов.

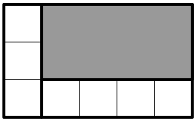
Второе решение («техническое»). Выпишем все 25 возможных сумм загаданных чисел: $1+2=3$, $1+4=2+3=5$, $1+6=2+5=3+4=7$, $1+8=2+7=3+6=4+5=9$, $1+10=2+9=3+8=4+7=5+6=11$, $3+10=4+9=5+8=6+7=13$, $5+10=6+9=7+8=15$, $7+10=8+9=17$, $9+10=19$.

Сначала все варианты нужно разделить на две части так, чтобы в каждой части оказалось не более 16 вариантов (а лучше — ещё меньше). Например, это можно сделать вопросом: «Верно ли, что сумма твоих чисел меньше 12?» Для следующего вопроса надо проследить, чтобы при любом ответе на него осталось не более 8 вариантов, для третьего — не более 4 и т. д.

Задача 1.9. а) Петя загадывает клетку шахматной доски 8×8. Витя каждым ходом может обвести по границам клеток любой прямоугольник и узнать у Пети, попала ли в него загаданная клетка. Как должен действовать Витя, чтобы угадать

Петину клетку за 6 ходов? б) Решите ту же задачу для доски 5×5 и пяти ходов.

Решение. а) Например, Витя может сначала за три хода определить горизонталь, в которой находится искомая клетка, а потом ещё за три хода найти вертикаль. Впрочем, он может и чередовать «горизонтальные» и «вертикальные» ходы, лишь бы каждый ход делил множество подозрительных клеток пополам.



б) После ответа Пети на очевидный первый ход подозрительные клетки могут составить прямоугольник 3×5, из которого вторым ходом Вите надо вырезать прямоугольник 2×4. Если искомая клетка находится в нём, то дальше поступаем аналогично решению а), а если вне прямоугольника, то каёмка прямоугольника 3×5 следующим ходом делится на части 3×1 и 1×4 (см. рисунок слева).

Задача 1.10. Карточный фокус. Фокусник кладёт перед зрителем колоду из 36 карт и просит его посмотреть и запомнить одну из карт. После этого фокусник раскладывает все карты в 6 стопок и просит зрителя сказать, в какой из них лежит его карта. Затем фокусник тасует карты, снова выкладывает их в 6 стопок и снова просит зрителя назвать ту из них, в которой лежит задуманная им карта. После этого фокусник сразу вытаскивает эту карту из стопки. В чём секрет такого фокуса?

Конечно, фокусник «тасует» карты не произвольно, а отслеживает, в какую стопку какая карта попадёт.

Решение. Зритель дважды сообщает фокуснику число от 1 до 6. Задача фокусника — так раскладывать карты в кучке, чтобы все 36 вариантов сообщений (для разных карт) были различными. А именно, в каждой кучке должно лежать ровно по 6 карт, причём во второй раскладке все эти карты должны оказаться в разных кучках.

Задача 1.11. Угадывание по делимости — 1. Петя загадал натуральное число A от 1 до 8. Витя называет любое натуральное число X, и Петя отвечает, верно ли, что X делится на A. Может ли Витя угадать A после трёх таких вопросов?

Подсказка: каждое Витино число X должно делить множество вариантов точно пополам (то есть чтобы после ответов «да» и «нет» оставались 4 варианта, иначе угадать задуманное Петей число будет невозможно). Например, таким числом может быть 6, потому что оно делится на 1, 2, 3, 6 и не делится на остальные четыре числа.

Оглавление

ISBN 978-5-4439-0085-8