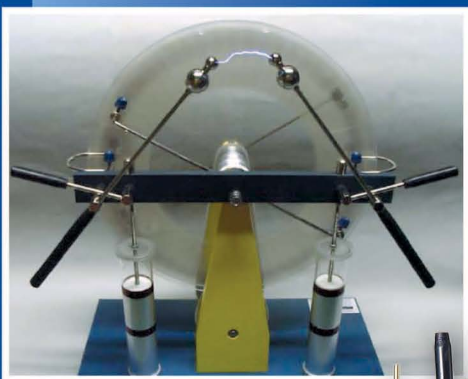
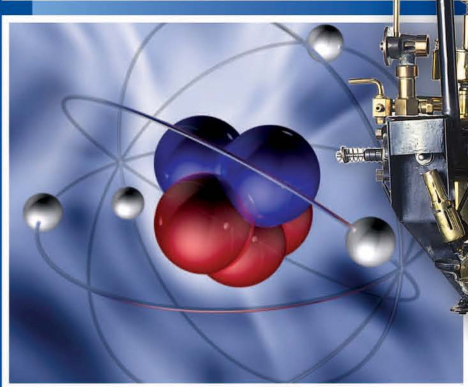
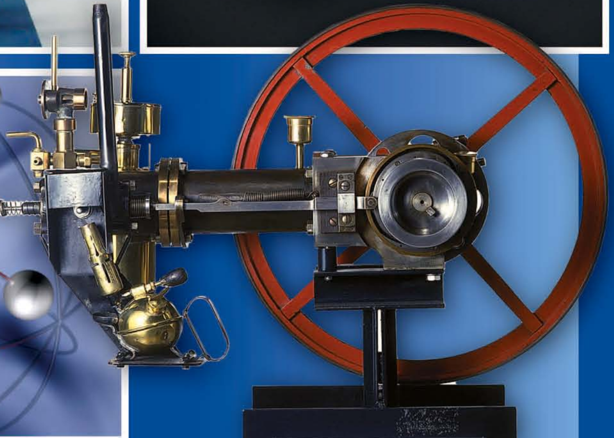
ФИЗИКА



И. В. Яковлев





Полный курс подготовки к ЕГЭ

И. В. Яковлев

ФИЗИКА

Полный курс подготовки к ЕГЭ

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 53
ББК 22.3
Я47

Яковлев И. В.
Физика
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
507 с.
ISBN 978-5-4439-2371-0

В книге изложены все разделы школьной физики. Основное внимание уделяется вопросам, включённым в кодификатор Единого государственного экзамена по физике. Этой направленностью на подготовку к ЕГЭ книга отличается от традиционных учебников и пособий (состоящих, как правило, из нескольких томов и написанных задолго до «эпохи ЕГЭ»).

Вместе с тем книга имеет и другую цель: помочь будущему студенту преодолеть разрыв между уровнями преподавания физики в школе и в вузе. С первых же страниц используется производная, которая служит естественным инструментом физики. Предварительно излагается необходимая математическая теория — на физическом уровне строгости и достаточно подробно (в частности, даётся представление о дифференцировании векторов, отсутствующее в школьных учебниках).

Книга предназначена для старшеклассников, заинтересованных в глубоком изучении физики.

Подготовлено на основе книги:
Яковлев И. В. Физика. Полный курс подготовки к ЕГЭ. Издание 2-е, стереотипное. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0934-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-08-04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2371-0

Оглавление

Предисловие

Перед вами — пособие по физике, охватывающее всю школьную программу и, соответственно, все темы кодификатора ЕГЭ по физике.

Цель данного пособия — обеспечить школьникам исчерпывающую теоретическую подготовку по физике. Такую подготовку, которая позволит успешно выступить на олимпиадах, набрать высокие баллы на ЕГЭ, поступить в желаемый вуз и впоследствии органично перейти к изучению вузовского курса общей физики.

Пособие состоит из семи глав:

1. Механика
2. Молекулярная физика и термодинамика
3. Электродинамика
4. Оптика
5. Теория относительности
6. Квантовая физика
7. Приложение. Векторы в физике

Содержание пособия выходит за рамки кодификатора ЕГЭ и в отдельных местах за рамки школьной программы. Дополнительный материал позволяет лучше понять рассматриваемые темы и служит «мостиком» к дальнейшему вузовскому курсу. Этот «мостик» совершенно необходим, поскольку разрыв между уровнями изложения физики в школе и в вузе весьма велик. Если заранее не преодолеть этот разрыв хотя бы частично, то есть риск получить проблемы с физикой в первую же сессию.

Автор пособия — профессиональный преподаватель с 25-летним стажем, имеющий красный диплом МФТИ (факультет общей и прикладной физики) и несколько сотен учеников, ставших успешными студентами ведущих московских вузов.

Все главы пособия обсуждались на форуме преподавателей компании «Ваш репетитор», которая является крупнейшим в России репетиторским сообществом. Я выражаю глубокую благодарность Дмитрию Андреевичу Сухоручкину, Антону Марковичу Безбородову, Михаилу Владимировичу Солину, Борису Семёновичу Семёнову, Юрию Анатольевичу Боравлёву, а также другим ведущим преподавателям компании, чьи квалифицированные замечания способствовали улучшению изложения материала.

Глава 1

Механика

Механика изучает механическое движение тел. Полёт камня и движение автомобиля, суточное и орбитальное вращение Земли, колебания маятника и распространение звука — всё это примеры механического движения.

Не каждое движение является механическим. Скажем, распространение электромагнитных волн не описывается механикой и подчиняется совсем другим законам. Тут работает другой раздел физики — электродинамика.

В механике принято выделять три основные части.

1. Кинематика. Кинематика рассматривает движение тела как таковое и не интересуется тем, почему это движение возникло. Тело каким-то образом движется — вот давайте и будем исследовать характеристики его движения. Траектория, путь, перемещение, скорость, ускорение — примеры физических величин, с которыми имеет дело кинематика.

Поскольку причины возникновения движения не выясняются, из поля зрения кинематики выпадают такие величины, как масса и сила.

Кинематике посвящены следующие разделы данной главы:

- Механическое движение
- Равномерное прямолинейное движение
- Равноускоренное движение
- Равномерное движение по окружности
- Путь при неравномерном движении

2. Динамика. Динамика изучает причины возникновения механического движения. В динамике рассматриваются взаимодействия тел, в результате чего появляются новые понятия: масса, сила, импульс, работа, энергия.

Динамика излагается в следующих разделах:

- Первый закон Ньютона
- Масса и плотность
- Второй и третий законы Ньютона
- Сила упругости
- Сила тяготения
- Сила трения
- Импульс
- Энергия
- Простые механизмы

- Механические колебания
- Механические волны

Динамика стоит на «трёх китах» — трёх законах Ньютона. Законы Ньютона являются первичными утверждениями, или постулатами: они основаны на многочисленных опытных фактах и не являются логическим следствием каких-то других утверждений. Попросту говоря, законы Ньютона ниоткуда не выводятся [1]; они просто констатируют факт — вот по таким правилам живёт природа.

3. Статика. Статика — сравнительно небольшая часть механики, изучающая условия равновесия тела.

В статике твёрдого тела появляется понятие момента силы, а необходимым условием равновесия служит так называемое правило моментов. Статика жидкостей и газов изучает равновесие тел в этих средах; основную роль тут играют законы Паскаля и Архимеда.

Статике посвящены следующие два раздела:

- Статика твёрдого тела
- Статика жидкостей и газов

* * *

Значительно больше внимания (чем это принято в школьных учебниках) уделено использованию производной. Автор не считает нужным «скрывать» от школьников, что производная является естественным инструментом физики. Наоборот, чем скорее и лучше школьник освоится с этим аппаратом, тем проще будет ему впоследствии перейти к вузовским курсам общей физики и теоретической механики.

Поэтому первый раздел «Производная» настоящей главы посвящён дифференцированию. Изложение математических вопросов ведётся на физическом уровне строгости: опуская значительную долю формализма, мы стараемся вывести на первый план основные идеи, связанные с понятием производной. В частности, мы рассказываем о дифференцировании векторов (чего в школе обычно не делают). В вузе, как показывает опыт, никто уже не будет заниматься «разжёвыванием» этого материала.

1.1. Производная

Производная скалярной или векторной функции есть скорость изменения этой функции. В физике мы постоянно интересуемся быстротой изменения каких-либо величин. Вот почему использование производной пронизывает всю физику.

Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела, которое в школе не проходят. Но определение предела нам сейчас

[1] В продвинутых курсах теоретической физики законы Ньютона выводятся из более общих принципов. Но тогда уже эти новые принципы становятся постулатами, то есть первичными утверждениями, ниоткуда не вытекающими.

и незачем. Самое главное — уловить основную идею, которая лежит в основе понятия предела.

1.1.1. Предел

Рассмотрим последовательность:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

Изобразим члены данной последовательности на числовой оси (рис. 1.1).

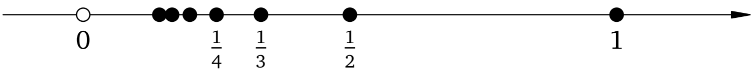


Рис. 1.1. Последовательность чисел $\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$

Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают). Начиная с $n = 10$ все члены последовательности окажутся на расстоянии не более $\dfrac{1}{10}$ от нуля; начиная с $n = 100$ все они будут на расстоянии не более $\dfrac{1}{100}$ от нуля; начиная с $n = 1000$ все они будут на расстоянии не более $\dfrac{1}{1000}$ от нуля и т. д.

Говорят, что последовательность $\dfrac{1}{n}$ *стремится к нулю*, или *сходится к нулю*, или что *предел* этой последовательности равен нулю. Записывают это так:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0. Понятие предела как раз и отражает факт этого «втекания».

Точно так же последовательность

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

будет «втекать» в точку 3. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3.$$

Подчеркнём, что «втекание последовательности в точку a» означает, что вблизи числа a находятся *все* члены данной последовательности начиная с некоторого номера. Более точно, смысл выражения «предел последовательности a_n равен a» таков: какое бы расстояние ε мы наперёд ни задали, *все* числа a_n начиная с некоторого номера будут находиться от числа a на расстоянии меньше ε.

Например, знакопеременная последовательность $1, -1, 1, -1, \ldots$ не имеет предела: она не «втекает» ни в какую точку. Почему, например, число 1 не является пределом данной последовательности? Потому что найдётся бесконечно много членов последовательности (а именно, все члены с чётными номерами, равные -1), удалённых от точки 1 на расстояние 2. Иными словами, не найдётся такого номера, начиная с которого все члены данной последовательности окажутся достаточно близко к точке 1.

Можно говорить не только о пределе последовательности, но и о пределе функции. Напомним, что функция $y = f(x)$ — это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого числа x получить единственное соответствующее ему число y. При этом число x называется *аргументом* функции, а число y — *значением* функции.

Нас будет интересовать понятие предела функции в точке. Оно формализует ту же самую идею «втекания». Только на сей раз график функции $y = f(x)$ будет «втекать» в некоторую точку координатной плоскости, когда аргумент x стремится к некоторому значению.

Так, на рис. 1.2 вы видите хорошо известную параболу — график функции $y = x^2$. Возьмём значение $x = 2$ и отметим на графике соответствующую точку $A(2, 4)$.

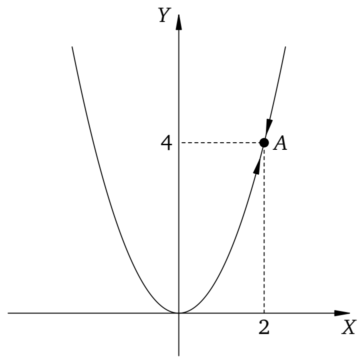


Рис. 1.2. График функции $y = x^2$

Представим себе, что x приближается к 2 (справа или слева — неважно). При этом график «втекает» в точку A, что и показано на рисунке стрелками. Иными словами, значение функции стремится к 4, и данный факт записывается следующим образом:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4. \tag{1.1}$$

«А что тут такого особенного? — скажете вы. — Ясно же, что если x стремится к 2, то x^2 стремится к $2^2 = 4$. Зачем огород городить, говоря о каких-то пределах?»

Здесь не всё так просто. Взгляните на рис. 1.3.

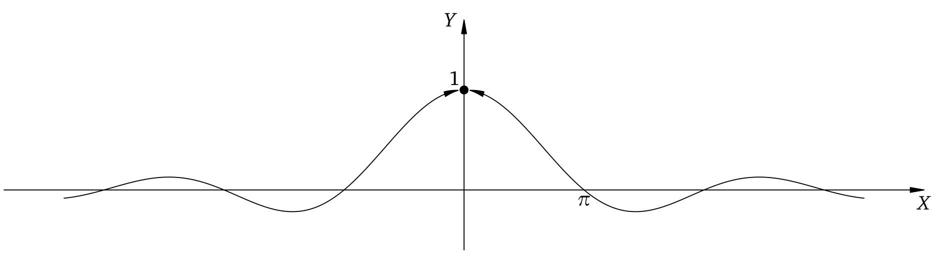


Рис. 1.3. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$

Перед вами график функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

И вот что интересно: значение функции при $x = 0$ не определено (при попытке вычислить $f(0)$ мы получаем нуль в знаменателе), но при этом график «втекает» в точку (0, 1), то есть хотя $f(0)$ не существует, тем не менее при $x \to 0$ значение функции стремится к числу 1. Иными словами, существует предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{1.2}$$

Он называется *первым замечательным пределом*.

Вы легко можете убедиться в справедливости формулы (1.2), взяв в руки калькулятор. Переведите его в режим «радианы» и вычислите

$$\frac{\sin 0{,}1}{0{,}1}, \quad \frac{\sin 0{,}01}{0{,}01}, \quad \frac{\sin 0{,}001}{0{,}001}, \quad \ldots$$

Вы увидите, что значение дроби становится всё ближе и ближе к единице.

Уяснив, что такое предел, мы теперь обсудим важнейшее физическое понятие *мгновенной скорости*. Оно вплотную подведёт нас к определению производной.

1.1.2. Мгновенная скорость

Спидометр автомобиля показывает 60 км/ч. Что это значит? Ответ простой: если автомобиль будет ехать так в течение часа, то он проедет 60 км.

Допустим, однако, что автомобиль вовсе не собирается ехать так целый час. Например, водитель разгоняет автомобиль с места, давит на газ, в какой-то момент бросает взгляд на спидометр и видит стрелку на отметке 60 км/ч. В следующий момент стрелка уползёт ещё выше. Как же понимать, что *в данный момент времени* скорость равна 60 км/ч?

Давайте выясним это на примере. Предположим, что путь s, пройденный автомобилем, зависит от времени t следующим образом:

$$s(t) = t^2,$$

где путь измеряется в метрах, а время — в секундах, то есть при $t = 0$ путь равен нулю, к моменту времени $t = 1$ пройденный путь равен $s(1) = 1$, к моменту времени $t = 2$ путь равен $s(2) = 4$, к моменту времени $t = 3$ путь равен $s(3) = 9$ и т. д.

Видно, что идёт разгон, то есть автомобиль набирает скорость с течением времени. Действительно:

- за первую секунду пройдено расстояние 1;
- за вторую секунду пройдено расстояние $s(2) - s(1) = 3$;
- за третью секунду пройдено расстояние $s(3) - s(2) = 5$,

и далее по нарастающей.

А теперь вопрос. Пусть, например, через три секунды после начала движения наш водитель взглянул на спидометр. Что покажет стрелка? Иными словами, какова *мгновенная* скорость автомобиля в момент времени $t = 3$?

Просто поделить путь на время не получится: привычная формула $v = s/t$ работает только для *равномерного* движения (то есть когда стрелка спидометра застыла в некотором фиксированном положении). Но именно эта формула лежит в основе способа, позволяющего найти мгновенную скорость.

Идея способа такова. Отсчитаем от нашего момента $t = 3$ небольшой промежуток времени Δt, найдём путь Δs, пройденный автомобилем за этот промежуток, и поделим Δs на Δt. *Чем меньше будет Δt, тем точнее мы приблизимся к искомой величине мгновенной скорости.*

Давайте посмотрим, как эта идея реализуется. Возьмём для начала $\Delta t = 1$. Тогда

$$\Delta s = s(4) - s(3) = 4^2 - 3^2 = 7,$$

и для скорости получаем

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7}{1} = 7 \tag{1.3}$$

(скорость, разумеется, измеряется в м/с).

Будем уменьшать промежуток Δt. Берём $\Delta t = 0{,}1$:

$$\Delta s = s(3{,}1) - s(3) = 3{,}1^2 - 3^2 = 0{,}61,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = 6{,}1. \tag{1.4}$$

Теперь берём $\Delta t = 0{,}01$:

$$\Delta s = s(3{,}01) - s(3) = 3{,}01^2 - 3^2 = 0{,}0601,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}0601}{0{,}01} = 6{,}01. \tag{1.5}$$

Ну и возьмём ещё $\Delta t = 0{,}001$:

$$\Delta s = s(3{,}001) - s(3) = 3{,}001^2 - 3^2 = 0{,}006001,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0{,}006001}{0{,}001} = 6{,}001. \tag{1.6}$$

Глядя на значения (1.3)–(1.6), мы понимаем, что величина $\Delta s/\Delta t$ приближается к числу 6. Это означает, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$ составляет 6 м/с.

Таким образом, при безграничном уменьшении Δt путь Δs также стремится к нулю, но отношение $\Delta s/\Delta t$ стремится к некоторому пределу v, который и называется *мгновенной скоростью* в данный момент времени t:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{1.7}$$

Можно написать и так:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \tag{1.8}$$

Давайте вернёмся к нашему примеру с $s(t) = t^2$ и проделаем в общем виде те выкладки, которые выше были выполнены с числами. Итак,

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \Delta t(2t + \Delta t),$$

и для мгновенной скорости имеем

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = 2t. \tag{1.9}$$

В частности, при $t = 3$ формула (1.9) даёт $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$, как и было получено выше.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми предварительными сведениями и полностью готовы перейти к обсуждению производной.

1.1.3. Определение производной

Скорость бывает не только у автомобиля. Мы можем говорить о скорости изменения чего угодно — например, физической величины или экономического показателя. Производная как раз и служит обобщением понятия мгновенной скорости на случай абстрактных математических функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Напомним, что x называется *аргументом* данной функции. Отметим на оси X некоторое значение аргумента x, а на оси Y — соответствующее значение функции $f(x)$ (рис. 1.4).

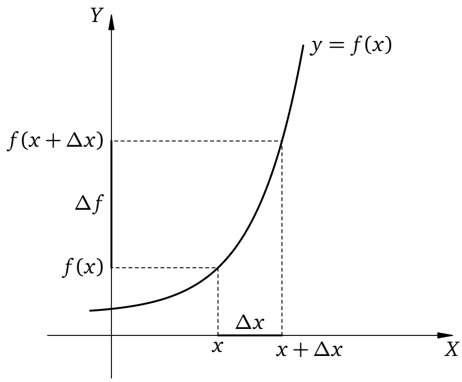


Рис. 1.4. Приращение аргумента и приращение функции

Дадим аргументу x некоторое *приращение*, обозначаемое Δx. Попадём в точку $x + \Delta x$. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции $f(x + \Delta x)$.

Величина

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1.10}$$

называется *приращением функции*, которое отвечает данному приращению аргумента Δx.

Вы видите сходство с предыдущим пунктом? Приращение аргумента Δx есть абстрактный аналог промежутка времени Δt, а соответствующее приращение функции Δf — это аналог пути Δs, пройденного за время Δt. Но на этом аналогия не заканчивается. Производная — это в точности аналог мгновенной скорости.

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.11}$$

Сравните с формулами (1.7) и (1.8). По сути написано одно и то же, не правда ли? Можно сказать, что производная — это мгновенная скорость изменения функции.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием*. Нам предстоит научиться дифференцировать различные функции.

Прежде всего нужно знать несколько стандартных производных, которые называются табличными. Самые простые табличные производные вычисляются непосредственно с помощью формулы (1.11).

1.1.4. Табличные производные

Начнём с функции, которая является константой: $f(x) = c$. Приращение этой функции равно нулю:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Соответственно, обращается в нуль и производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Итак, имеем первый результат — *производная константы равна нулю*:

$$\boxed{c' = 0.}$$

Теперь будем дифференцировать степенную функцию, то есть функцию вида $f(x) = x^a$. Найдём производную простейшей такой функции: $f(x) = x$. Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Итак,

$$x' = 1.$$

Перейдём к функции $f(x) = x^2$. Это абстрактный аналог рассмотренной выше физической ситуации с $s(t) = t^2$, в которой мы искали мгновенную скорость. Нам остаётся лишь повторить (в других обозначениях) те вычисления, которые привели нас к формуле (1.9).

Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом,

$$(x^2)' = 2x.$$

Точно так же можно показать, что:

$$\begin{aligned}(x^3)' &= 3x^2,\\ (x^4)' &= 4x^3,\\ &\ldots\\ (x^n)' &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Оказывается, последняя формула справедлива не только для целого n, но и вообще для любого показателя степени a:

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}.} \tag{1.12}$$

Найдём с помощью этой формулы производную функции $f(x) = \sqrt{x}$:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Эта производная встречается очень часто, и её имеет смысл выучить. Запомнить можно так: «производная корня есть один делить на два корня».

Перейдём к тригонометрическим функциям: синусу и косинусу. Вычисления с помощью формулы (1.11) и первого замечательного предела приводят к следующему результату:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.}$$

Четыре производные в рамочке (константа, степенная функция, синус и косинус), как мы сказали выше, называются *табличными*. Эти производные нужно твёрдо знать.

Вычисления производной по определению (то есть как предела) легко проходят для функций, устроенных наиболее просто. А как быть, если нужно продифференцировать функцию наподобие такой: $f(x) = x^7 \sin \sqrt[3]{4x^2 - 5x}$? Здесь вычислять предел (1.11) — занятие не из приятных. В подобных случаях на помощь приходят *правила дифференцирования*, которые позволяют сконструировать производную данной функции из производных более простых функций.

1.1.5. Правила дифференцирования

Как мы уже сказали, правила дифференцирования позволяют находить производные функций достаточно сложного вида. Идея состоит в «расщеплении» исходной функции на более простые функции, производные которых известны и играют роль «кирпичиков» при конструировании искомой производной. Зная небольшое число табличных производных и располагая правилами дифференцирования, мы можем вычислять производные огромного количества функций, не прибегая к определению производной и не вычисляя соответствующий предел (1.11).

Всего имеется пять правил дифференцирования. Мы приводим их здесь без доказательства. Функции $u(x)$ и $v(x)$ являются теми самыми «кирпичиками», из которых строятся функции более сложного вида.

0. Константа выносится за знак производной: если c — число, то $(cu)' = cu'$.

Данное правило легко получается в качестве следствия правила 2 о дифференцировании произведения. Но применяется оно настолько часто, что мы сделали его «нулевым» правилом, обособленным от остальных.

Согласно этому правилу имеем, например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 10x,$$
$$(-3\sin x)' = -3(\sin x)' = -3\cos x.$$

1. Дифференцирование суммы: $(u+v)' = u' + v'$ (*производная суммы равна сумме производных*).

Так, применяя правила 0 и 1, находим

$$(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x,$$
$$(x^3 + 4\cos x - 10)' = (x^3)' + (4\cos x)' + (-10)' = 3x^2 - 4\sin x$$

(производная константы -10 равна нулю!).

2. Дифференцирование произведения: $(uv)' = u'v + uv'$.

Вот пример дифференцирования произведения:

$$(x^2\sin x)' = (x^2)'\sin x + x^2(\sin x)' = 2x\sin x + x^2\cos x.$$

А вот как получается правило 0:

$$(cu)' = c'u + cu' = cu',$$

поскольку $c' = 0$.

3. Дифференцирование частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Правило дифференцирования частного позволяет найти, например, производную тангенса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Нам осталось обсудить последнее правило — дифференцирование сложной функции. Мы сначала объясним, что такое сложная функция, затем продемонстрируем правило дифференцирования на примерах, и только потом — когда станет ясно, как оно работает — дадим формулировку этого правила.

Пусть, например, $u(x) = \sin x$ и $v(x) = \sqrt{x}$. Давайте сначала извлекать корень из x (то есть применять к x функцию v), а потом брать синус полученного числа (то есть действовать на полученное число $v(x)$ функцией u). Тогда возникает функция:

$$u(v(x)) = \sin\sqrt{x}.$$

Это и есть *сложная* функция, или *композиция* функций u и v. Идея понятна: число x поступает на вход *первой* функции v, а полученное число $v(x)$ поступает на вход *второй* функции u.

Можно, наоборот, сделать u первой функцией, а v — второй. Тогда сначала от x будет вычисляться синус, а потом из синуса извлекаться корень. Получится другая сложная функция:

$$v(u(x)) = \sqrt{\sin x}.$$

Дифференцирование сложной функции — это как снятие листов с кочана капусты. Сначала находим производную второй («внешней») функции и умножаем её на производную первой («внутренней») функции. Применительно к нашим примерам это выглядит так:

$$(\sin\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$(\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x.$$

Приведём для ясности ещё один пример:

$$[(4x^2+3x+2)^5]' = 5(4x^2+3x+2)^4\cdot(4x^2+3x+2)' = 5(4x^2+3x+2)^4\cdot(8x+3).$$

И ещё пример (очень важный для физики; здесь A, ω и α — константы):

$$[A\sin(\omega x+\alpha)]' = A\cos(\omega x+\alpha)\cdot(\omega x+\alpha)' = A\omega\cos(\omega x+\alpha).$$

Понятно, как работает правило? Тогда — формулировка.

4. Дифференцирование сложной функции: $[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x)$.

1.1.6. Обозначения производной в физике

Переходя к физическим приложениям производной, мы будем использовать несколько иные обозначения — те, которые приняты в физике.

Во-первых, меняется обозначение функций. В самом деле, какие функции мы собираемся дифференцировать? Этими функциями служат физические величины, зависящие от времени. Например, координата тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$ могут быть заданы формулами

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2, \tag{1.13}$$

$$v(t) = 12 - 6t. \tag{1.14}$$

Таким образом, аргументом функции теперь является время t, а буква x отныне обозначает функцию — координату точки.

Во-вторых, меняется обозначение производной. Штрих в физике зарезервирован для других целей, и вместо него мы используем точку над буквой:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \dot{x}(t) \tag{1.15}$$

(читается «икс с точкой»).

Имеется ещё одно обозначение производной, очень распространённое как в математике, так и в физике:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{dx}{dt} \tag{1.16}$$

(читается «дэ икс по дэ тэ»).

Остановимся подробнее на смысле обозначения (1.16). Математик понимает его двояко — либо как предел:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \tag{1.17}$$

либо как дробь, в знаменателе которой стоит приращение времени dt, а в числителе — так называемый *дифференциал* dx функции $x(t)$. Понятие дифференциала несложно, но мы не будем его сейчас обсуждать; оно ждёт вас на первом курсе.

Физик, не скованный требованиями математической строгости, понимает обозначение (1.16) более неформально. Пусть dx есть изменение координаты за время dt. Возьмём интервал dt настолько маленьким, что отношение $\frac{dx}{dt}$ близко к своему пределу (1.17) с устраивающей нас точностью.

И тогда, — скажет физик, — *производная координаты по времени есть попросту дробь, в числителе которой стоит достаточно малое изменение координаты dx, а в знаменателе — достаточно малый промежуток времени dt, в течение которого это изменение координаты произошло*.

Такое нестрогое понимание производной характерно для рассуждений в физике. Далее мы будем придерживаться именно этого физического уровня строгости.

Производная $\dot{x}(t)$ физической величины $x(t)$ снова является функцией времени, и эту функцию снова можно продифференцировать — найти производную производной, или *вторую производную* функции $x(t)$. Вот одно обозначение второй производной:

$$\text{вторая производная функции } x(t) \text{ обозначается } \ddot{x}(t)$$

(читается «икс с двумя точками»), а вот другое:

$$\text{вторая производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{d^2x}{dt^2}$$

(читается «дэ два икс по дэ тэ квадрат» или «дэ два икс по дэ тэ дважды»).

Давайте вернёмся к исходному примеру (1.13) и посчитаем производную координаты, а заодно посмотрим на совместное использование обозначений (1.15) и (1.16):

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(1 + 12t - 3t^2) = 12 - 6t.$$

(Символ дифференцирования $\frac{d}{dt}$ перед скобкой — это всё равно что штрих сверху за скобкой в прежних обозначениях.)

Обратите внимание на то, что производная координаты оказалась равна скорости (1.14). Это не случайное совпадение. Связь производной координаты со скоростью тела будет выяснена в следующем разделе «Механическое движение».

1.1.7. Предел векторной величины

Физические величины бывают не только скалярными, но и векторными. Соответственно, часто нас интересует скорость изменения векторной величины, то есть производная вектора. Однако прежде чем говорить о производной, нужно разобраться с понятием предела векторной величины.

Рассмотрим последовательность векторов $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, … Сделав, если необходимо, параллельный перенос, сведём их начала в одну точку O (рис. 1.5):

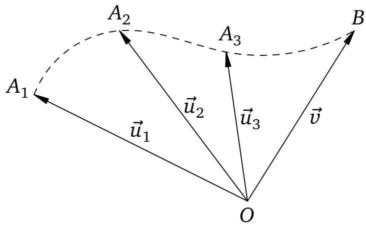


Рис. 1.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{u}_n = \vec{v}$

Концы векторов обозначим A_1, A_2, A_3, … Таким образом, имеем:

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \vec{u}_2 = \overrightarrow{OA_2}, \quad \vec{u}_3 = \overrightarrow{OA_3}, \quad \ldots$$

Предположим, что последовательность точек A_1, A_2, A_3, … «втекает»[2)] в точку B:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = B.$$

Обозначим $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Мы скажем тогда, что последовательность векторов $\vec{u}_n$ стремится к вектору $\vec{v}$ или что вектор $\vec{v}$ является пределом последовательности векторов $\vec{u}_n$:

$$\vec{v} = \lim_{n\to\infty} \vec{u}_n.$$

Предположим теперь, что концы векторов на рис. 1.5 пробегают не дискретный набор значений, а непрерывную кривую (например, указанную пунктирной линией). Таким образом, мы имеем дело не с последовательностью векторов $\vec{u}_n$, а с вектором $\vec{u}(t)$, который меняется со временем. Это как раз то, что нам и нужно в физике!

Дальнейшее объяснение почти такое же. Пусть t стремится к некоторому значению t_0. Если при этом концы векторов $\vec{u}(t)$ «втекают» в некоторую

[2)] Вполне достаточно интуитивного понимания этого «втекания», но вас, быть может, интересует более строгое объяснение? Тогда вот оно.

Пусть дело происходит на плоскости. «Втекание» последовательности A_1, A_2, A_3, … в точку B означает следующее: сколь бы малый круг с центром в точке B мы ни взяли, *все* точки последовательности, начиная с некоторой, попадут внутрь этого круга. Иными словами, вне любого круга с центром B имеется лишь конечное число точек нашей последовательности.

А если дело происходит в пространстве? Определение «втекания» модифицируется незначительно: нужно лишь заменить слово «круг» на слово «шар».

точку B, то мы говорим, что вектор $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ является пределом векторной величины $\vec{u}(t)$:

$$\vec{v} = \lim_{t\to t_0} \vec{u}(t).$$

1.1.8. Дифференцирование векторов

Выяснив, что такое предел векторной величины, мы готовы сделать следующий шаг — ввести понятие производной вектора.

Предположим, что имеется некоторый вектор $\vec{u}(t)$, зависящий от времени. Это означает, что длина данного вектора и его направление могут меняться с течением времени.

По аналогии с обычной (скалярной) функцией вводится понятие изменения (или приращения) вектора. *Изменение вектора* $\vec{u}$ за время Δt есть векторная величина:

$$\Delta\vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t).$$

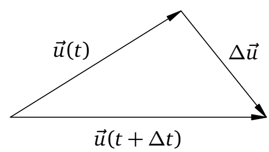


Рис. 1.6. Изменение вектора

Обратите внимание на то, что в правой части данного соотношения стоит *разность векторов*. Изменение вектора $\vec{u}$ показано на рис. 1.6 (напомним, что при вычитании векторов мы сводим их начала в одну точку, соединяем концы и «укалываем» стрелкой тот вектор, из которого производится вычитание).

Если промежуток времени Δt достаточно мал, то и вектор $\vec{u}$ за это время меняется мало (в физике, по крайней мере, так считается всегда). Соответственно, если при $\Delta t \to 0$ отношение $\dfrac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной вектора* $\vec{u}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}. \tag{1.18}$$

При обозначении производной вектора мы не будем использовать точку сверху (так как символ $\dot{\vec{u}}$ не слишком хорошо смотрится) и ограничиваемся обозначением (1.18). Но для производной скаляра мы, разумеется, свободно используем оба обозначения.

Напомним, что $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ — это *символ* производной. Его можно понимать и как дробь, в числителе которой стоит *дифференциал* вектора $\vec{u}$, соответствующий промежутку времени dt. Выше мы не стали обсуждать понятие дифференциала, так как в школе его не проходят; не будем обсуждать дифференциал и здесь.

Однако на физическом уровне строгости производную $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ можно считать дробью, в знаменателе которой стоит очень малый интервал времени dt, а в числителе — соответствующее малое изменение $d\vec{u}$ вектора $\vec{u}$. При достаточно малом dt величина данной дроби отличается от предела в правой части равенства (1.18) столь мало, что с учётом имеющейся точности измерений этим отличием можно пренебречь.

Этого (не вполне строгого) физического понимания производной нам окажется вполне достаточно.

Правила дифференцирования векторных выражений во многом аналогичны правилам дифференцирования скаляров. Нам понадобятся лишь самые простые правила.

1. Постоянный скалярный множитель выносится за знак производной: если $c = \text{const}$, то

$$\frac{d(c\vec{u})}{dt} = c\,\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Мы используем это правило в разделе «Импульс», когда второй закон Ньютона

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

будет переписан в виде

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

2. Постоянный векторный множитель выносится за знак производной: если $\vec{c} = \text{const}$, то

$$\frac{d}{dt}\big(x(t)\vec{c}\big) = \dot{x}(t)\vec{c}.$$

3. Производная суммы векторов равна сумме их производных:

$$\frac{d}{dt}\big(\vec{u}+\vec{v}\big) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Последними двумя правилами мы будем пользоваться неоднократно. Посмотрим, как они работают в важнейшей ситуации дифференцирования вектора при наличии в пространстве прямоугольной системы координат *OXYZ* (рис. 1.7).

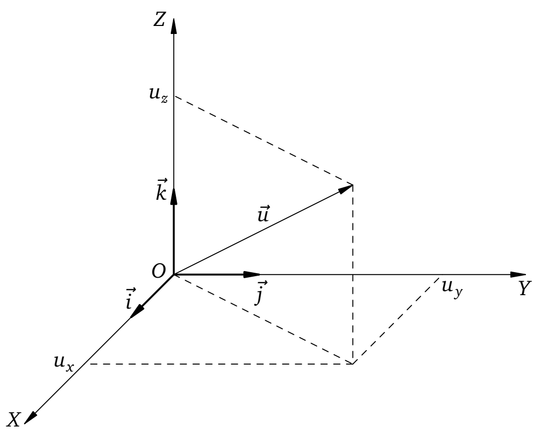


Рис. 1.7. Разложение вектора по базису

Как известно, любой вектор $\vec{u}$ единственным образом раскладывается по базису единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}.$$

Здесь u_x, u_y, u_z — проекции вектора $\vec{u}$ на координатные оси. Они же являются координатами вектора $\vec{u}$ в данном базисе.

Вектор $\vec{u}$ в нашем случае зависит от времени, а это значит, что его координаты u_x, u_y, u_z являются функциями времени:

$$\vec{u}(t) = u_x(t)\,\vec{i} + u_y(t)\,\vec{j} + u_z(t)\vec{k}. \tag{1.19}$$

Продифференцируем это равенство. Сначала воспользуемся правилом дифференцирования суммы:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\big(u_x(t)\vec{i}\big) + \frac{d}{dt}\big(u_y(t)\vec{j}\big) + \frac{d}{dt}\big(u_z(t)\vec{k}\big).$$

Затем вынесем постоянные векторы за знак производной:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x(t)\vec{i} + \dot{u}_y(t)\,\vec{j} + \dot{u}_z(t)\vec{k}. \tag{1.20}$$

Таким образом, если вектор $\vec{u}$ имеет координаты (u_x, u_y, u_z), то координаты производной $\dfrac{d\vec{u}}{dt}$ являются производными координат вектора $\vec{u}$, то есть имеют вид $(\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$.

Ввиду особой важности формулы (1.20) дадим более непосредственный её вывод.

В момент времени $t + \Delta t$ согласно (1.19) имеем:

$$\vec{u}(t+\Delta t) = u_x(t+\Delta t)\,\vec{i} + u_y(t+\Delta t)\,\vec{j} + u_z(t+\Delta t)\vec{k}.$$

Напишем изменение вектора $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{u} &= \vec{u}(t+\Delta t) - \vec{u}(t) = \\ &= \big(u_x(t+\Delta t)\,\vec{i} + u_y(t+\Delta t)\,\vec{j} + u_z(t+\Delta t)\vec{k}\big) - \big(u_x(t)\,\vec{i} + u_y(t)\,\vec{j} + u_z(t)\vec{k}\big) = \\ &= (u_x(t+\Delta t) - u_x(t))\,\vec{i} + (u_y(t+\Delta t) - u_y(t))\,\vec{j} + (u_z(t+\Delta t) - u_z(t))\,\vec{k} = \\ &= \Delta u_x \cdot \vec{i} + \Delta u_y \cdot \vec{j} + \Delta u_z \cdot \vec{k}.\end{aligned}$$

Разделим обе части полученного равенства на Δt:

$$\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta u_x}{\Delta t}\,\vec{i} + \frac{\Delta u_y}{\Delta t}\,\vec{j} + \frac{\Delta u_z}{\Delta t}\,\vec{k}.$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ дроби $\Delta u_x/\Delta t$, $\Delta u_y/\Delta t$, $\Delta u_z/\Delta t$ переходят соответственно в производные $\dot{u}_x$, $\dot{u}_y$, $\dot{u}_z$, и мы снова получаем соотношение (1.20):

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x\vec{i} + \dot{u}_y\vec{j} + \dot{u}_z\vec{k}.$$

1.2. Механическое движение

Понятие движения является чрезвычайно общим и охватывает самый широкий круг явлений. В физике изучают различные виды движения. Простейшим из них является механическое движение.

Механическое движение — это изменение положение тела (или его частей) в пространстве относительно других тел с течением времени.