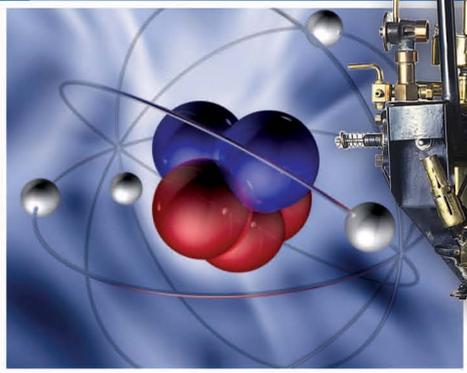
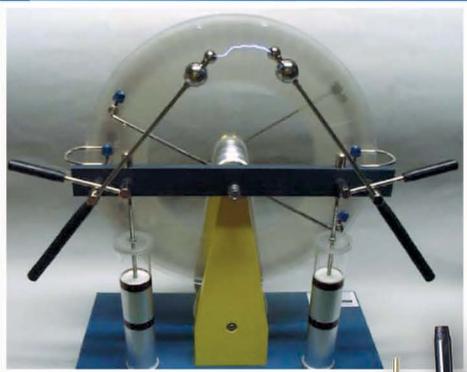


ФИЗИКА

И. В. Яковлев



**Полный курс
подготовки к ЕГЭ**

И. В. Яковлев

ФИЗИКА

Полный курс подготовки к ЕГЭ

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 53
ББК 22.3
Я47

Яковлев И. В.
Физика
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
507 с.
ISBN 978-5-4439-2371-0

В книге изложены все разделы школьной физики. Основное внимание уделяется вопросам, включённым в кодификатор Единого государственного экзамена по физике. Этой направленностью на подготовку к ЕГЭ книга отличается от традиционных учебников и пособий (состоящих, как правило, из нескольких томов и написанных задолго до «эпохи ЕГЭ»).

Вместе с тем книга имеет и другую цель: помочь будущему студенту преодолеть разрыв между уровнями преподавания физики в школе и в вузе. С первых же страниц используется производная, которая служит естественным инструментом физики. Предварительно излагается необходимая математическая теория — на физическом уровне строгости и достаточно подробно (в частности, даётся представление о дифференцировании векторов, отсутствующее в школьных учебниках).

Книга предназначена для старшеклассников, заинтересованных в глубоком изучении физики.

Подготовлено на основе книги:

Яковлев И. В. Физика. Полный курс подготовки к ЕГЭ. Издание 2-е, стереотипное. — М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0934-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)-241-08-04
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-2371-0

© Яковлев И. В., 2014
© МЦНМО, 2016

Оглавление

| | |
|---|----|
| Глава 1. Механика | 14 |
| 1.1. Производная | 15 |
| 1.1.1. Предел | 16 |
| 1.1.2. Мгновенная скорость | 18 |
| 1.1.3. Определение производной | 20 |
| 1.1.4. Табличные производные | 21 |
| 1.1.5. Правила дифференцирования | 22 |
| 1.1.6. Обозначения производной в физике | 24 |
| 1.1.7. Предел векторной величины | 26 |
| 1.1.8. Дифференцирование векторов | 27 |
| 1.2. Механическое движение | 29 |
| 1.2.1. Относительность движения | 30 |
| 1.2.2. Основная задача механики | 30 |
| 1.2.3. Материальная точка | 31 |
| 1.2.4. Траектория, путь, перемещение | 31 |
| 1.2.5. Скорость | 32 |
| 1.2.6. Ускорение | 33 |
| 1.2.7. Примеры вычисления скорости и ускорения | 34 |
| 1.2.8. Закон сложения скоростей | 35 |
| 1.2.9. Виды механического движения | 36 |
| 1.3. Равномерное прямолинейное движение | 37 |
| 1.3.1. Закон движения | 38 |
| 1.3.2. Интегрирование | 39 |
| 1.4. Равноускоренное движение | 40 |
| 1.4.1. Зависимость скорости от времени | 40 |
| 1.4.2. Закон движения | 41 |
| 1.4.3. Прямолинейное равноускоренное движение | 41 |
| 1.4.4. Свободное падение | 42 |
| 1.4.5. Горизонтальный бросок | 43 |
| 1.4.6. Бросок под углом к горизонту | 44 |
| 1.5. Равномерное движение по окружности | 45 |
| 1.5.1. Угловая скорость | 46 |
| 1.5.2. Закон движения | 46 |
| 1.5.3. Центробежное ускорение | 47 |
| 1.5.4. Почему ускорение направлено к центру окружности? | 47 |
| 1.6. Путь при неравномерном движении | 48 |
| 1.7. Первый закон Ньютона | 52 |
| 1.7.1. Инерциальные системы отсчёта | 52 |
| 1.7.2. Принцип относительности | 53 |
| 1.8. Масса и плотность | 54 |
| 1.9. Второй и третий законы Ньютона | 54 |
| 1.9.1. Принцип суперпозиции | 55 |
| 1.9.2. Второй закон Ньютона | 55 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 1.9.3. | Третий закон Ньютона | 56 |
| 1.9.4. | Как найти закон движения? | 56 |
| 1.10. | Сила упругости | 57 |
| 1.10.1. | Деформация | 57 |
| 1.10.2. | Закон Гука | 58 |
| 1.10.3. | Модуль Юнга | 59 |
| 1.11. | Сила тяготения | 59 |
| 1.11.1. | Закон всемирного тяготения | 59 |
| 1.11.2. | Сила тяжести | 60 |
| 1.11.3. | Вес тела. Невесомость | 61 |
| 1.11.4. | Искусственные спутники | 62 |
| 1.12. | Сила трения | 63 |
| 1.12.1. | Сухое трение | 64 |
| 1.12.2. | Вязкое трение | 66 |
| 1.13. | Статика твёрдого тела | 67 |
| 1.13.1. | Момент силы | 68 |
| 1.13.2. | Условия равновесия | 68 |
| 1.14. | Статика жидкостей и газов | 70 |
| 1.14.1. | Гидростатическое давление | 71 |
| 1.14.2. | Закон Паскаля | 71 |
| 1.14.3. | Гидравлический пресс | 72 |
| 1.14.4. | Закон Архимеда | 73 |
| 1.14.5. | Плавание тел | 75 |
| 1.15. | Импульс | 76 |
| 1.15.1. | Второй закон Ньютона в импульсной форме | 76 |
| 1.15.2. | Пример вычисления силы | 78 |
| 1.15.3. | Импульс системы тел | 79 |
| 1.15.4. | Закон сохранения импульса | 80 |
| 1.15.5. | Закон сохранения проекции импульса | 82 |
| 1.16. | Энергия | 83 |
| 1.16.1. | Работа | 83 |
| 1.16.2. | Мощность | 85 |
| 1.16.3. | Механическая энергия | 85 |
| 1.16.4. | Кинетическая энергия | 86 |
| 1.16.5. | Потенциальная энергия тела вблизи поверхности Земли | 87 |
| 1.16.6. | Потенциальная энергия деформированной пружины | 88 |
| 1.16.7. | Закон сохранения механической энергии | 89 |
| 1.16.8. | Закон изменения механической энергии | 89 |
| 1.17. | Простые механизмы | 90 |
| 1.17.1. | Рычаг | 91 |
| 1.17.2. | Неподвижный блок | 91 |
| 1.17.3. | Подвижный блок | 92 |
| 1.17.4. | Наклонная плоскость | 93 |
| 1.17.5. | Золотое правило механики | 94 |
| 1.17.6. | КПД механизма | 94 |
| 1.18. | Механические колебания | 96 |
| 1.18.1. | Гармонические колебания | 96 |
| 1.18.2. | Уравнение гармонических колебаний | 98 |
| 1.18.3. | Пружинный маятник | 99 |
| 1.18.4. | Математический маятник | 100 |

| | |
|--|------------|
| 1.18.5. Свободные и вынужденные колебания | 101 |
| 1.19. Механические волны | 103 |
| 1.19.1. Продольные и поперечные волны | 103 |
| 1.19.2. Звук | 105 |
| Глава 2. Молекулярная физика и термодинамика | 106 |
| 2.1. Основные положения МКТ | 106 |
| 2.1.1. Атомы и молекулы | 107 |
| 2.1.2. Тепловое движение атомов и молекул | 109 |
| 2.1.3. Взаимодействие частиц вещества | 109 |
| 2.2. Газы, жидкости и твёрдые тела | 110 |
| 2.2.1. Газы | 110 |
| 2.2.2. Твёрдые тела | 111 |
| 2.2.3. Жидкости | 112 |
| 2.3. Основные формулы молекулярной физики | 113 |
| 2.4. Температура | 115 |
| 2.4.1. Термодинамическая система | 115 |
| 2.4.2. Тепловое равновесие | 115 |
| 2.4.3. Температурная шкала. Абсолютная температура | 116 |
| 2.5. Уравнение состояния идеального газа | 117 |
| 2.5.1. Средняя кинетическая энергия частиц газа | 118 |
| 2.5.2. Основное уравнение МКТ идеального газа | 118 |
| 2.5.3. Энергия частиц и температура газа | 119 |
| 2.5.4. Уравнение Менделеева—Клапейрона | 119 |
| 2.6. Изопроцессы | 120 |
| 2.6.1. Термодинамический процесс | 121 |
| 2.6.2. Изотермический процесс | 121 |
| 2.6.3. Графики изотермического процесса | 122 |
| 2.6.4. Изобарный процесс | 123 |
| 2.6.5. Графики изобарного процесса | 124 |
| 2.6.6. Изохорный процесс | 124 |
| 2.6.7. Графики изохорного процесса | 125 |
| 2.7. Насыщенный пар | 126 |
| 2.7.1. Испарение и конденсация | 126 |
| 2.7.2. Динамическое равновесие | 127 |
| 2.7.3. Свойства насыщенного пара | 128 |
| 2.7.4. Влажность воздуха | 129 |
| 2.8. Внутренняя энергия | 130 |
| 2.8.1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа | 131 |
| 2.8.2. Функция состояния | 131 |
| 2.8.3. Изменение внутренней энергии: совершение работы | 132 |
| 2.8.4. Изменение внутренней энергии: теплопередача | 132 |
| 2.8.5. Теплопроводность | 132 |
| 2.8.6. Конвекция | 133 |
| 2.8.7. Тепловое излучение | 134 |
| 2.9. Количество теплоты | 136 |
| 2.9.1. Удельная теплоёмкость вещества | 136 |
| 2.9.2. Уравнение теплового баланса | 137 |
| 2.10. Фазовые переходы | 138 |

| | |
|--|------------|
| 2.10.1. Плавление и кристаллизация | 138 |
| 2.10.2. График плавления | 139 |
| 2.10.3. Удельная теплота плавления | 140 |
| 2.10.4. График кристаллизации | 141 |
| 2.10.5. Парообразование и конденсация | 142 |
| 2.10.6. Кипение | 143 |
| 2.10.7. График кипения | 145 |
| 2.10.8. График конденсации | 146 |
| 2.11. Первый закон термодинамики | 147 |
| 2.11.1. Работа газа в изобарном процессе | 147 |
| 2.11.2. Работа газа в произвольном процессе | 148 |
| 2.11.3. Работа, совершаемая над газом | 148 |
| 2.11.4. Первый закон термодинамики | 149 |
| 2.11.5. Применение первого закона термодинамики к изопроцессам | 149 |
| 2.11.6. Адиабатный процесс | 150 |
| 2.12. Тепловые машины | 150 |
| 2.12.1. Тепловые двигатели | 151 |
| 2.12.2. Холодильные машины | 153 |
| 2.12.3. Тепловая машина Карно | 155 |
| 2.12.4. Тепловые двигатели и охрана окружающей среды | 156 |
| 2.13. Второй закон термодинамики | 157 |
| 2.13.1. Необратимость процессов в природе | 157 |
| 2.13.2. Постулаты Клаузиуса и Кельвина | 158 |
| 2.13.3. Эквивалентность постулатов Клаузиуса и Кельвина | 158 |
| 2.13.4. Обратимые процессы | 159 |
| 2.13.5. Обратимость машины Карно | 160 |
| Глава 3. Электродинамика | 162 |
| 3.1. Электрический заряд | 163 |
| 3.1.1. Два вида заряда | 164 |
| 3.1.2. Электризация тел | 165 |
| 3.1.3. Закон сохранения заряда | 167 |
| 3.2. Закон Кулона | 168 |
| 3.2.1. Принцип суперпозиции | 169 |
| 3.2.2. Закон Кулона в диэлектрике | 170 |
| 3.3. Напряжённость электрического поля | 170 |
| 3.3.1. Дальнейшее действие и близкое действие | 171 |
| 3.3.2. Электрическое поле | 171 |
| 3.3.3. Напряжённость поля точечного заряда | 172 |
| 3.3.4. Принцип суперпозиции электрических полей | 174 |
| 3.3.5. Поле равномерно заряженной плоскости | 175 |
| 3.3.6. Линии напряжённости электрического поля | 176 |
| 3.4. Потенциал электрического поля | 177 |
| 3.4.1. Консервативные силы | 177 |
| 3.4.2. Потенциальность электростатического поля | 178 |
| 3.4.3. Потенциальная энергия заряда в однородном поле | 179 |
| 3.4.4. Потенциальная энергия взаимодействия точечных зарядов | 180 |
| 3.4.5. Потенциал | 181 |
| 3.4.6. Разность потенциалов | 182 |

| | | |
|---------|---|-----|
| 3.4.7. | Принцип суперпозиции для потенциалов | 183 |
| 3.4.8. | Однородное поле: связь напряжения и напряжённости | 183 |
| 3.4.9. | Эквипотенциальные поверхности | 184 |
| 3.5. | Проводники в электрическом поле | 185 |
| 3.5.1. | Поле внутри проводника | 186 |
| 3.5.2. | Заряд внутри проводника | 188 |
| 3.5.3. | Поле вне проводника | 188 |
| 3.5.4. | Потенциал проводника | 189 |
| 3.5.5. | Напряжённость и потенциал поля проводящей сферы | 189 |
| 3.6. | Диэлектрики в электрическом поле | 191 |
| 3.6.1. | Диэлектрическая проницаемость | 191 |
| 3.6.2. | Полярные диэлектрики | 192 |
| 3.6.3. | Неполярные диэлектрики | 193 |
| 3.7. | Конденсатор. Энергия электрического поля | 194 |
| 3.7.1. | Ёмкость уединённого проводника | 194 |
| 3.7.2. | Ёмкость плоского конденсатора | 195 |
| 3.7.3. | Энергия заряженного конденсатора | 198 |
| 3.7.4. | Энергия электрического поля | 200 |
| 3.8. | Постоянный электрический ток | 201 |
| 3.8.1. | Направление электрического тока | 202 |
| 3.8.2. | Действие электрического тока | 202 |
| 3.8.3. | Сила и плотность тока | 203 |
| 3.8.4. | Скорость направленного движения зарядов | 204 |
| 3.8.5. | Стационарное электрическое поле | 205 |
| 3.9. | Закон Ома | 207 |
| 3.9.1. | Закон Ома для участка цепи | 208 |
| 3.9.2. | Электрическое сопротивление | 208 |
| 3.9.3. | Удельное сопротивление | 209 |
| 3.10. | Соединения проводников | 210 |
| 3.10.1. | Резисторы и подводящие провода | 210 |
| 3.10.2. | Последовательное соединение | 211 |
| 3.10.3. | Параллельное соединение | 212 |
| 3.10.4. | Смешанное соединение | 214 |
| 3.11. | Работа и мощность тока | 215 |
| 3.11.1. | Работа тока | 215 |
| 3.11.2. | Мощность тока | 216 |
| 3.11.3. | Закон Джоуля—Ленца | 216 |
| 3.12. | ЭДС. Закон Ома для полной цепи | 217 |
| 3.12.1. | Сторонняя сила | 217 |
| 3.12.2. | Закон Ома для полной цепи | 218 |
| 3.12.3. | КПД электрической цепи | 219 |
| 3.12.4. | Закон Ома для неоднородного участка | 220 |
| 3.13. | Электрический ток в металлах | 222 |
| 3.13.1. | Свободные электроны | 222 |
| 3.13.2. | Опыт Рикке | 223 |
| 3.13.3. | Опыт Стюарта—Толмена | 224 |
| 3.13.4. | Зависимость сопротивления от температуры | 225 |
| 3.14. | Электрический ток в электролитах | 227 |
| 3.14.1. | Электролитическая диссоциация | 227 |
| 3.14.2. | Ионная проводимость | 230 |

| | |
|--|-----|
| 3.14.3. Электролиз | 231 |
| 3.15. Электрический ток в газах | 232 |
| 3.15.1. Свободные заряды в газе | 233 |
| 3.15.2. Несамостоятельный заряд | 235 |
| 3.15.3. Вольт-амперная характеристика газового разряда | 236 |
| 3.15.4. Самостоятельный разряд | 237 |
| 3.16. Полупроводники | 238 |
| 3.16.1. Ковалентная связь | 239 |
| 3.16.2. Кристаллическая структура кремния | 239 |
| 3.16.3. Собственная проводимость | 240 |
| 3.16.4. Примесная проводимость | 243 |
| 3.16.5. p - n -переход | 246 |
| 3.17. Магнитное поле. Линии | 248 |
| 3.17.1. Взаимодействие магнитов | 248 |
| 3.17.2. Линии магнитного поля | 249 |
| 3.17.3. Опыт Эрстеда | 249 |
| 3.17.4. Магнитное поле прямого провода с током | 251 |
| 3.17.5. Магнитное поле витка с током | 252 |
| 3.17.6. Магнитное поле катушки с током | 252 |
| 3.17.7. Гипотеза Ампера. Элементарные токи | 254 |
| 3.18. Магнитное поле. Силы | 254 |
| 3.18.1. Сила Лоренца | 255 |
| 3.18.2. Сила Ампера | 255 |
| 3.18.3. Рамка с током в магнитном поле | 257 |
| 3.19. Электромагнитная индукция | 259 |
| 3.19.1. Магнитный поток | 260 |
| 3.19.2. ЭДС индукции | 262 |
| 3.19.3. Закон электромагнитной индукции Фарадея | 262 |
| 3.19.4. Правило Ленца | 263 |
| 3.19.5. Взаимодействие магнита с контуром | 264 |
| 3.19.6. Закон Фарадея + Правило Ленца = Снятие модуля | 265 |
| 3.19.7. Вихревое электрическое поле | 266 |
| 3.19.8. ЭДС индукции в движущемся проводнике | 268 |
| 3.20. Самоиндукция | 270 |
| 3.20.1. Индуктивность | 271 |
| 3.20.2. Электромеханическая аналогия | 273 |
| 3.20.3. Энергия магнитного поля | 273 |
| 3.21. Электромагнитные колебания | 274 |
| 3.21.1. Колебательный контур | 274 |
| 3.21.2. Энергетические превращения в колебательном контуре | 277 |
| 3.21.3. Электромеханические аналогии | 278 |
| 3.21.4. Гармонический закон колебаний в контуре | 279 |
| 3.21.5. Вынужденные электромагнитные колебания | 281 |
| 3.22. Переменный ток. 1 | 282 |
| 3.22.1. Условие квазистационарности | 283 |
| 3.22.2. Резистор в цепи переменного тока | 284 |
| 3.22.3. Конденсатор в цепи переменного тока | 285 |
| 3.22.4. Катушка в цепи переменного тока | 287 |
| 3.23. Переменный ток. 2 | 289 |
| 3.23.1. Метод вспомогательного угла | 289 |

| | |
|--|------------|
| 3.23.2. Колебательный контур с резистором | 289 |
| 3.23.3. Резонанс в колебательном контуре | 291 |
| 3.24. Мощность переменного тока | 294 |
| 3.24.1. Мощность тока через резистор | 295 |
| 3.24.2. Мощность тока через конденсатор | 296 |
| 3.24.3. Мощность тока через катушку | 298 |
| 3.24.4. Мощность тока на произвольном участке | 299 |
| 3.25. Электроэнергия | 300 |
| 3.25.1. Производство электроэнергии | 300 |
| 3.25.2. Передача электроэнергии | 302 |
| 3.25.3. Трансформатор | 303 |
| 3.26. Электромагнитное поле | 307 |
| 3.26.1. Гипотеза Максвелла | 308 |
| 3.26.2. Понятие электромагнитного поля | 309 |
| 3.26.3. Об уравнениях Максвелла | 310 |
| 3.27. Электромагнитные волны | 311 |
| 3.27.1. Открытый колебательный контур | 312 |
| 3.27.2. Свойства электромагнитных волн | 314 |
| 3.27.3. Плотность потока излучения | 315 |
| 3.27.4. Виды электромагнитных излучений | 317 |
| Глава 4. Оптика | 321 |
| 4.1. Световые лучи | 322 |
| 4.1.1. Законы геометрической оптики | 323 |
| 4.1.2. Геометрическая тень | 324 |
| 4.2. Отражение света | 325 |
| 4.2.1. Закон отражения | 325 |
| 4.2.2. Плоское зеркало | 326 |
| 4.3. Преломление света | 328 |
| 4.3.1. Закон преломления (частный случай) | 329 |
| 4.3.2. Обратимость световых лучей | 330 |
| 4.3.3. Закон преломления (общий случай) | 331 |
| 4.3.4. Полное внутреннее отражение | 332 |
| 4.4. Линзы. Ход лучей | 333 |
| 4.4.1. Двояковыпуклая линза | 334 |
| 4.4.2. Двояковогнутая линза | 336 |
| 4.4.3. Виды собирающих и рассеивающих линз | 337 |
| 4.5. Тонкие линзы. Ход лучей | 338 |
| 4.5.1. Понятие тонкой линзы | 338 |
| 4.5.2. Оптический центр и фокальная плоскость | 340 |
| 4.5.3. Ход луча через оптический центр | 341 |
| 4.5.4. Ход лучей в собирающей линзе | 342 |
| 4.5.5. Ход лучей в рассеивающей линзе | 343 |
| 4.6. Тонкие линзы. Построение изображений | 345 |
| 4.6.1. Собирающая линза: действительное изображение точки | 345 |
| 4.6.2. Собирающая линза: действительное изображение предмета | 348 |
| 4.6.3. Собирающая линза: мнимое изображение точки | 349 |
| 4.6.4. Собирающая линза: мнимое изображение предмета | 351 |
| 4.6.5. Собирающая линза: предмет в фокальной плоскости | 352 |

| | | |
|-----------------|---|------------|
| 4.6.6. | Рассеивающая линза: мнимое изображение точки | 353 |
| 4.6.7. | Рассеивающая линза: мнимое изображение предмета | 355 |
| 4.7. | Глаз человека | 355 |
| 4.7.1. | Строение глаза | 355 |
| 4.7.2. | Аккомодация | 356 |
| 4.7.3. | Угол зрения | 358 |
| 4.7.4. | Расстояние наилучшего зрения | 359 |
| 4.7.5. | Близорукость | 359 |
| 4.7.6. | Дальнозоркость | 360 |
| 4.8. | Оптические приборы | 361 |
| 4.8.1. | Невооружённый глаз | 361 |
| 4.8.2. | Лупа | 362 |
| 4.8.3. | Микроскоп | 364 |
| 4.8.4. | Труба Кеплера | 366 |
| 4.8.5. | Труба Галилея | 367 |
| 4.9. | Принцип Гюйгенса | 368 |
| 4.9.1. | Волновые поверхности и лучи | 368 |
| 4.9.2. | Сферическая волна | 370 |
| 4.9.3. | Плоская волна | 370 |
| 4.9.4. | Вторичные волны | 371 |
| 4.9.5. | Вывод закона отражения | 373 |
| 4.9.6. | Вывод закона преломления | 374 |
| 4.10. | Интерференция волн | 375 |
| 4.10.1. | Сложение колебаний | 376 |
| 4.10.2. | Интенсивность волны | 377 |
| 4.10.3. | Когерентные источники | 378 |
| 4.10.4. | Условие максимума и минимума | 378 |
| 4.10.5. | Интерференционная картина | 379 |
| 4.10.6. | Схема Юнга | 381 |
| 4.11. | Интерференция света | 383 |
| 4.11.1. | Усреднение интенсивности | 383 |
| 4.11.2. | Некогерентность независимых источников | 384 |
| 4.11.3. | Зеркала Френеля | 386 |
| 4.11.4. | Интерференция в тонких плёнках | 387 |
| 4.11.5. | Кольца Ньютона | 388 |
| 4.11.6. | Просветление оптики | 391 |
| 4.12. | Дифракция света | 391 |
| 4.12.1. | Принцип Гюйгенса—Френеля | 392 |
| 4.12.2. | Опыт Юнга | 394 |
| 4.12.3. | Дифракционная решётка | 395 |
| 4.12.4. | Дифракционная решётка как спектральный прибор | 398 |
| 4.13. | Дисперсия света | 399 |
| 4.13.1. | Опыт Ньютона | 399 |
| 4.13.2. | Хроматическая аберрация | 400 |
| Глава 5. | Теория относительности | 401 |
| 5.1. | Принцип относительности Галилея | 401 |
| 5.1.1. | Наблюдатель на корабле | 401 |
| 5.1.2. | Инвариантность законов механики | 402 |

| | | |
|--|--|------------|
| 5.2. | Принципы СТО | 405 |
| 5.2.1. | Гипотеза о мировом эфире | 405 |
| 5.2.2. | Постулаты Эйнштейна | 407 |
| 5.3. | Релятивистская кинематика | 410 |
| 5.3.1. | Одновременность событий | 410 |
| 5.3.2. | Относительность одновременности | 413 |
| 5.3.3. | Относительность промежутков времени | 414 |
| 5.3.4. | Относительность расстояний | 416 |
| 5.3.5. | Преобразования Лоренца | 418 |
| 5.3.6. | Релятивистский закон сложения скоростей | 419 |
| 5.4. | Релятивистская динамика | 421 |
| 5.4.1. | Релятивистская энергия | 421 |
| 5.4.2. | Релятивистский импульс | 424 |
| 5.4.3. | Связь энергии и импульса | 426 |
| 5.4.4. | Релятивистское уравнение движения | 427 |
| Глава 6. Квантовая физика | | 430 |
| 6.1. | Фотоэффект | 430 |
| 6.1.1. | Опыты Столетова | 431 |
| 6.1.2. | Зависимость фототока от напряжения | 432 |
| 6.1.3. | Законы фотоэффекта | 433 |
| 6.1.4. | Трудности классического объяснения фотоэффекта | 434 |
| 6.1.5. | Гипотеза Планка о квантах | 435 |
| 6.1.6. | Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта | 436 |
| 6.2. | Фотоны | 438 |
| 6.2.1. | Энергия фотона | 438 |
| 6.2.2. | Импульс фотона | 439 |
| 6.2.3. | Давление света | 439 |
| 6.2.4. | Двойственная природа света | 441 |
| 6.3. | Корпускулярно-волновой дуализм | 441 |
| 6.3.1. | Гипотеза де Бройля | 442 |
| 6.3.2. | Дифракция электронов | 443 |
| 6.3.3. | Соотношение неопределённостей | 444 |
| 6.4. | Линейчатые спектры | 445 |
| 6.4.1. | Спектр испускания | 445 |
| 6.4.2. | Спектр поглощения | 446 |
| 6.4.3. | Спектральный анализ | 446 |
| 6.5. | Строение атома | 447 |
| 6.5.1. | Модель Томсона | 447 |
| 6.5.2. | Опыты Резерфорда | 448 |
| 6.5.3. | Планетарная модель атома | 449 |
| 6.6. | Атом Бора | 450 |
| 6.6.1. | Постулаты Бора | 451 |
| 6.6.2. | Атом водорода | 452 |
| 6.6.3. | Достоинства и недостатки теории Бора | 455 |
| 6.7. | Лазер | 456 |
| 6.7.1. | Индукцированное излучение | 457 |
| 6.7.2. | Инверсная населённость | 458 |
| 6.7.3. | Трёхуровневая система рубина | 459 |

| | |
|---|------------|
| 6.7.4. Устройство лазера | 460 |
| 6.8. Строение ядра | 461 |
| 6.8.1. Нуклонная модель ядра | 461 |
| 6.8.2. Изотопы | 461 |
| 6.9. Радиоактивность | 462 |
| 6.9.1. Виды радиоактивных излучений | 463 |
| 6.9.2. Радиоактивные превращения | 464 |
| 6.9.3. Закон радиоактивного распада | 465 |
| 6.10. Энергия связи ядра | 467 |
| 6.10.1. Ядерные силы | 468 |
| 6.10.2. Атомная единица массы | 468 |
| 6.10.3. Удельная энергия связи | 471 |
| 6.10.4. Насыщение ядерных сил | 472 |
| 6.11. Ядерные реакции | 473 |
| 6.11.1. Энергетический выход ядерной реакции | 474 |
| 6.11.2. Деление ядер | 477 |
| 6.11.3. Цепная ядерная реакция | 479 |
| 6.11.4. Термоядерная реакция | 479 |
| Глава 7. Приложение. Векторы в физике | 482 |
| 7.1. Скалярные и векторные величины | 482 |
| 7.2. Сложение векторов | 484 |
| 7.2.1. Правило треугольника | 484 |
| 7.2.2. Правило параллелограмма | 485 |
| 7.2.3. Свойства сложения векторов | 487 |
| 7.2.4. Вычитание векторов | 489 |
| 7.3. Умножение скаляра на вектор | 490 |
| 7.3.1. Что такое умножение скаляра на вектор? | 491 |
| 7.3.2. Свойства умножения скаляра на вектор | 491 |
| 7.4. Угол между векторами | 494 |
| 7.4.1. Что такое угол между векторами? | 494 |
| 7.4.2. Угол между вектором и осью | 494 |
| 7.5. Проекция вектора на ось | 495 |
| 7.5.1. Что такое проекция вектора на ось? | 495 |
| 7.5.2. Свойства проектирования вектора на ось | 496 |
| 7.5.3. Операция проектирования в физике | 499 |
| 7.6. Векторы и координаты на плоскости | 499 |
| 7.6.1. Разложение вектора по базису | 499 |
| 7.6.2. Нахождение модуля вектора по его проекциям | 500 |
| 7.7. Векторы и координаты в пространстве | 501 |
| 7.7.1. Разложение вектора по базису | 501 |
| 7.7.2. Нахождение модуля вектора по его проекциям | 502 |
| 7.8. Скалярное произведение векторов | 502 |
| 7.8.1. Что такое скалярное произведение? | 503 |
| 7.8.2. Свойства скалярного произведения | 504 |
| 7.8.3. Скалярное произведение в физике | 505 |
| 7.8.4. Вычисление скалярного произведения в координатах | 505 |

Предисловие

Перед вами — пособие по физике, охватывающее всю школьную программу и, соответственно, все темы кодификатора ЕГЭ по физике.

Цель данного пособия — обеспечить школьникам исчерпывающую теоретическую подготовку по физике. Такую подготовку, которая позволит успешно выступить на олимпиадах, набрать высокие баллы на ЕГЭ, поступить в желаемый вуз и впоследствии органично перейти к изучению вузовского курса общей физики.

Пособие состоит из семи глав:

1. Механика
2. Молекулярная физика и термодинамика
3. Электродинамика
4. Оптика
5. Теория относительности
6. Квантовая физика
7. Приложение. Векторы в физике

Содержание пособия выходит за рамки кодификатора ЕГЭ и в отдельных местах за рамки школьной программы. Дополнительный материал позволяет лучше понять рассматриваемые темы и служит «мостиком» к дальнейшему вузовскому курсу. Этот «мостик» совершенно необходим, поскольку разрыв между уровнями изложения физики в школе и в вузе весьма велик. Если заранее не преодолеть этот разрыв хотя бы частично, то есть риск получить проблемы с физикой в первую же сессию.

Автор пособия — профессиональный преподаватель с 25-летним стажем, имеющий красный диплом МФТИ (факультет общей и прикладной физики) и несколько сотен учеников, ставших успешными студентами ведущих московских вузов.

Все главы пособия обсуждались на форуме преподавателей компании «Ваш репетитор», которая является крупнейшим в России репетиторским сообществом. Я выражаю глубокую благодарность Дмитрию Андреевичу Сухоручкину, Антону Марковичу Безбородову, Михаилу Владимировичу Солину, Борису Семёновичу Семёнову, Юрию Анатольевичу Боравлёву, а также другим ведущим преподавателям компании, чьи квалифицированные замечания способствовали улучшению изложения материала.

Глава 1

Механика

Механика изучает механическое движение тел. Полёт камня и движение автомобиля, суточное и орбитальное вращение Земли, колебания маятника и распространение звука — всё это примеры механического движения.

Не каждое движение является механическим. Скажем, распространение электромагнитных волн не описывается механикой и подчиняется совсем другим законам. Тут работает другой раздел физики — электродинамика.

В механике принято выделять три основные части.

1. Кинематика. Кинематика рассматривает движение тела как таковое и не интересуется тем, почему это движение возникло. Тело каким-то образом движется — вот давайте и будем исследовать характеристики его движения. Траектория, путь, перемещение, скорость, ускорение — примеры физических величин, с которыми имеет дело кинематика.

Поскольку причины возникновения движения не выясняются, из поля зрения кинематики выпадают такие величины, как масса и сила.

Кинематике посвящены следующие разделы данной главы:

- Механическое движение
- Равномерное прямолинейное движение
- Равноускоренное движение
- Равномерное движение по окружности
- Путь при неравномерном движении

2. Динамика. Динамика изучает причины возникновения механического движения. В динамике рассматриваются взаимодействия тел, в результате чего появляются новые понятия: масса, сила, импульс, работа, энергия.

Динамика излагается в следующих разделах:

- Первый закон Ньютона
- Масса и плотность
- Второй и третий законы Ньютона
- Сила упругости
- Сила тяготения
- Сила трения
- Импульс
- Энергия
- Простые механизмы

- Механические колебания
- Механические волны

Динамика стоит на «трёх китах» — трёх законах Ньютона. Законы Ньютона являются первичными утверждениями, или постулатами: они основаны на многочисленных опытных фактах и не являются логическим следствием каких-то других утверждений. Попросту говоря, законы Ньютона ниоткуда не выводятся¹⁾; они просто констатируют факт — вот по таким правилам живёт природа.

3. Статика. Статика — сравнительно небольшая часть механики, изучающая условия равновесия тела.

В статике твёрдого тела появляется понятие момента силы, а необходимым условием равновесия служит так называемое правило моментов. Статика жидкостей и газов изучает равновесие тел в этих средах; основную роль тут играют законы Паскаля и Архимеда.

Статике посвящены следующие два раздела:

- Статика твёрдого тела
- Статика жидкостей и газов

* * *

Значительно больше внимания (чем это принято в школьных учебниках) уделено использованию производной. Автор не считает нужным «скрывать» от школьников, что производная является естественным инструментом физики. Наоборот, чем скорее и лучше школьник освоится с этим аппаратом, тем проще будет ему впоследствии перейти к вузовским курсам общей физики и теоретической механики.

Поэтому первый раздел «Производная» настоящей главы посвящён дифференцированию. Изложение математических вопросов ведётся на физическом уровне строгости: опуская значительную долю формализма, мы стараемся вывести на первый план основные идеи, связанные с понятием производной. В частности, мы рассказываем о дифференцировании векторов (чего в школе обычно не делают). В вузе, как показывает опыт, никто уже не будет заниматься «разжёвыванием» этого материала.

1.1. Производная

Производная скалярной или векторной функции есть скорость изменения этой функции. В физике мы постоянно интересуемся быстротой изменения каких-либо величин. Вот почему использование производной пронизывает всю физику.

Строгое математическое определение производной опирается на понятие предела, которое в школе не проходят. Но определение предела нам сейчас

¹⁾В продвинутых курсах теоретической физики законы Ньютона выводятся из более общих принципов. Но тогда уже эти новые принципы становятся постулатами, то есть первичными утверждениями, ниоткуда не вытекающими.

и незачем. Самое главное — уловить основную идею, которая лежит в основе понятия предела.

1.1.1. Предел

Рассмотрим последовательность:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Изобразим члены данной последовательности на числовой оси (рис. 1.1).

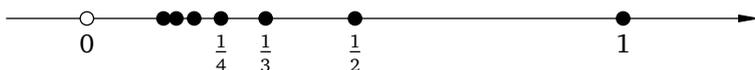


Рис. 1.1. Последовательность чисел $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$)

Мы видим, что наши числа неограниченно приближаются к нулю (но никогда его не достигают). Начиная с $n = 10$ все члены последовательности окажутся на расстоянии не более $\frac{1}{10}$ от нуля; начиная с $n = 100$ все они будут на расстоянии не более $\frac{1}{100}$ от нуля; начиная с $n = 1000$ все они будут на расстоянии не более $\frac{1}{1000}$ от нуля и т. д.

Говорят, что последовательность $\frac{1}{n}$ *стремится к нулю*, или *сходится к нулю*, или что *предел* этой последовательности равен нулю. Записывают это так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Образно говоря, наша последовательность «втекает» в точку 0. Понятие предела как раз и отражает факт этого «втекания».

Точно так же последовательность

$$a_n = 3 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

будет «втекать» в точку 3. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = 3.$$

Подчеркнём, что «втекание последовательности в точку a » означает, что вблизи числа a находятся *все* члены данной последовательности начиная с некоторого номера. Более точно, смысл выражения «предел последовательности a_n равен a » таков: какое бы расстояние ε мы наперёд ни задали, *все* числа a_n начиная с некоторого номера будут находиться от числа a на расстоянии меньше ε .

Например, знакопеременная последовательность $1, -1, 1, -1, \dots$ не имеет предела: она не «втекает» ни в какую точку. Почему, например, число 1 не является пределом данной последовательности? Потому что найдётся бесконечно много членов последовательности (а именно, все члены с чётными номерами, равные -1), удалённых от точки 1 на расстояние 2. Иными словами,

не найдётся такого номера, начиная с которого все члены данной последовательности окажутся достаточно близко к точке 1.

Можно говорить не только о пределе последовательности, но и о пределе функции. Напомним, что функция $y = f(x)$ — это некоторое правило, которое позволяет для любого допустимого числа x получить единственное соответствующее ему число y . При этом число x называется *аргументом* функции, а число y — *значением* функции.

Нас будет интересовать понятие предела функции в точке. Оно формализует ту же самую идею «втекания». Только на сей раз график функции $y = f(x)$ будет «втекать» в некоторую точку координатной плоскости, когда аргумент x стремится к некоторому значению.

Так, на рис. 1.2 вы видите хорошо известную параболу — график функции $y = x^2$. Возьмём значение $x = 2$ и отметим на графике соответствующую точку $A(2, 4)$.

Представим себе, что x приближается к 2 (справа или слева — неважно). При этом график «втекает» в точку A , что и показано на рисунке стрелками. Иными словами, значение функции стремится к 4, и данный факт записывается следующим образом:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4. \quad (1.1)$$

«А что тут такого особенного? — скажете вы. — Ясно же, что если x стремится к 2, то x^2 стремится к $2^2 = 4$. Зачем огоро� городить, говоря о каких-то пределах?»

Здесь не всё так просто. Взгляните на рис. 1.3.

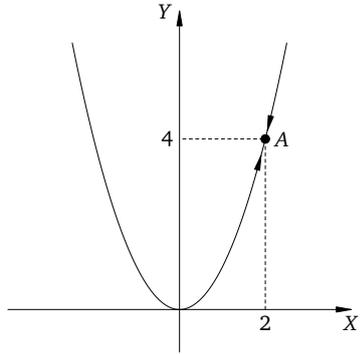


Рис. 1.2. График функции $y = x^2$

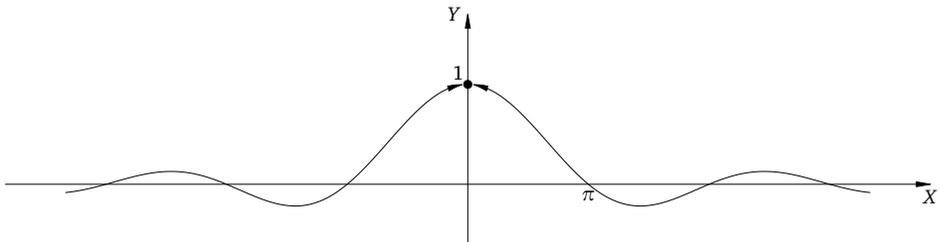


Рис. 1.3. График функции $y = \frac{\sin x}{x}$

Перед вами график функции

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

И вот что интересно: значение функции при $x = 0$ не определено (при попытке вычислить $f(0)$ мы получаем нуль в знаменателе), но при этом график

«втекает» в точку $(0, 1)$, то есть хотя $f(0)$ не существует, тем не менее при $x \rightarrow 0$ значение функции стремится к числу 1. Иными словами, существует предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.2)$$

Он называется *первым замечательным пределом*.

Вы легко можете убедиться в справедливости формулы (1.2), взяв в руки калькулятор. Переведите его в режим «радианы» и вычислите

$$\frac{\sin 0,1}{0,1}, \quad \frac{\sin 0,01}{0,01}, \quad \frac{\sin 0,001}{0,001}, \quad \dots$$

Вы увидите, что значение дроби становится всё ближе и ближе к единице.

Уяснив, что такое предел, мы теперь обсудим важнейшее физическое понятие *мгновенной скорости*. Оно вплотную подведёт нас к определению производной.

1.1.2. Мгновенная скорость

Спидометр автомобиля показывает 60 км/ч. Что это значит? Ответ простой: если автомобиль будет ехать так в течение часа, то он проедет 60 км.

Допустим, однако, что автомобиль вовсе не собирается ехать так целый час. Например, водитель разгоняет автомобиль с места, давит на газ, в какой-то момент бросает взгляд на спидометр и видит стрелку на отметке 60 км/ч. В следующий момент стрелка уползёт ещё выше. Как же понимать, что в *данный момент времени* скорость равна 60 км/ч?

Давайте выясним это на примере. Предположим, что путь s , пройденный автомобилем, зависит от времени t следующим образом:

$$s(t) = t^2,$$

где путь измеряется в метрах, а время — в секундах, то есть при $t = 0$ путь равен нулю, к моменту времени $t = 1$ пройденный путь равен $s(1) = 1$, к моменту времени $t = 2$ путь равен $s(2) = 4$, к моменту времени $t = 3$ путь равен $s(3) = 9$ и т. д.

Видно, что идёт разгон, то есть автомобиль набирает скорость с течением времени. Действительно:

- за первую секунду пройдено расстояние 1;
- за вторую секунду пройдено расстояние $s(2) - s(1) = 3$;
- за третью секунду пройдено расстояние $s(3) - s(2) = 5$,

и далее по нарастающей.

А теперь вопрос. Пусть, например, через три секунды после начала движения наш водитель взглянул на спидометр. Что покажет стрелка? Иными словами, какова *мгновенная* скорость автомобиля в момент времени $t = 3$?

Просто поделить путь на время не получится: привычная формула $v = s/t$ работает только для *равномерного* движения (то есть когда стрелка спидометра застыла в некотором фиксированном положении). Но именно эта формула лежит в основе способа, позволяющего найти мгновенную скорость.

Идея способа такова. Отсчитаем от нашего момента $t = 3$ небольшой промежуток времени Δt , найдём путь Δs , пройденный автомобилем за этот промежуток, и поделим Δs на Δt . Чем меньше будет Δt , тем точнее мы приблизимся к искомой величине мгновенной скорости.

Давайте посмотрим, как эта идея реализуется. Возьмём для начала $\Delta t = 1$. Тогда

$$\Delta s = s(4) - s(3) = 4^2 - 3^2 = 7,$$

и для скорости получаем

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{7}{1} = 7 \quad (1.3)$$

(скорость, разумеется, измеряется в м/с).

Будем уменьшать промежуток Δt . Берём $\Delta t = 0,1$:

$$\Delta s = s(3,1) - s(3) = 3,1^2 - 3^2 = 0,61,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,61}{0,1} = 6,1. \quad (1.4)$$

Теперь берём $\Delta t = 0,01$:

$$\Delta s = s(3,01) - s(3) = 3,01^2 - 3^2 = 0,0601,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,0601}{0,01} = 6,01. \quad (1.5)$$

Ну и возьмём ещё $\Delta t = 0,001$:

$$\Delta s = s(3,001) - s(3) = 3,001^2 - 3^2 = 0,006001,$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0,006001}{0,001} = 6,001. \quad (1.6)$$

Глядя на значения (1.3)–(1.6), мы понимаем, что величина $\Delta s/\Delta t$ приближается к числу 6. Это означает, что мгновенная скорость автомобиля в момент времени $t = 3$ составляет 6 м/с.

Таким образом, при безграничном уменьшении Δt путь Δs также стремится к нулю, но отношение $\Delta s/\Delta t$ стремится к некоторому пределу v , который и называется *мгновенной скоростью* в данный момент времени t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Можно написать и так:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (1.8)$$

Давайте вернёмся к нашему примеру с $s(t) = t^2$ и проделаем в общем виде те выкладки, которые выше были выполнены с числами. Итак,

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = (t + \Delta t)^2 - t^2 = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t^2 = \Delta t(2t + \Delta t),$$

и для мгновенной скорости имеем

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t. \quad (1.9)$$

В частности, при $t = 3$ формула (1.9) даёт $v(3) = 2 \cdot 3 = 6$, как и было получено выше.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми предварительными сведениями и полностью готовы перейти к обсуждению производной.

1.1.3. Определение производной

Скорость бывает не только у автомобиля. Мы можем говорить о скорости изменения чего угодно — например, физической величины или экономического показателя. Производная как раз и служит обобщением понятия мгновенной скорости на случай абстрактных математических функций.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Напомним, что x называется *аргументом* данной функции. Отметим на оси X некоторое значение аргумента x , а на оси Y — соответствующее значение функции $f(x)$ (рис. 1.4).

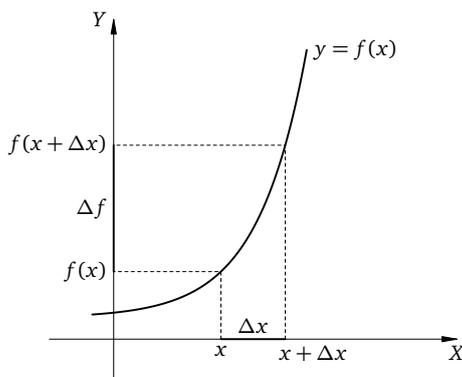


Рис. 1.4. Приращение аргумента и приращение функции

Дадим аргументу x некоторое *приращение*, обозначаемое Δx . Попадём в точку $x + \Delta x$. Обозначим её на рисунке вместе с соответствующим значением функции $f(x + \Delta x)$.

Величина

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (1.10)$$

называется *приращением функции*, которое отвечает данному приращению аргумента Δx .

Вы видите сходство с предыдущим пунктом? Приращение аргумента Δx есть абстрактный аналог промежутка времени Δt , а соответствующее приращение функции Δf — это аналог пути Δs , пройденного за время Δt . Но на этом аналогия не заканчивается. Производная — это в точности аналог мгновенной скорости.

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x — это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.11)$$

Сравните с формулами (1.7) и (1.8). По сути написано одно и то же, не правда ли? Можно сказать, что производная — это мгновенная скорость изменения функции.

Нахождение производной функции называется *дифференцированием*. Нам предстоит научиться дифференцировать различные функции.

Прежде всего нужно знать несколько стандартных производных, которые называются табличными. Самые простые табличные производные вычисляются непосредственно с помощью формулы (1.11).

1.1.4. Табличные производные

Начнём с функции, которая является константой: $f(x) = c$. Приращение этой функции равно нулю:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = c - c = 0.$$

Соответственно, обращается в нуль и производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Итак, имеем первый результат — *производная константы равна нулю*:

$$c' = 0.$$

Теперь будем дифференцировать степенную функцию, то есть функцию вида $f(x) = x^a$. Найдём производную простейшей такой функции: $f(x) = x$. Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Итак,

$$x' = 1.$$

Перейдём к функции $f(x) = x^2$. Это абстрактный аналог рассмотренной выше физической ситуации с $s(t) = t^2$, в которой мы искали мгновенную скорость. Нам остаётся лишь повторить (в других обозначениях) те вычисления, которые привели нас к формуле (1.9).

Приращение функции:

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Производная:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом,

$$(x^2)' = 2x.$$

Точно так же можно показать, что:

$$\begin{aligned}(x^3)' &= 3x^2, \\(x^4)' &= 4x^3, \\&\dots \\(x^n)' &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Оказывается, последняя формула справедлива не только для целого n , но и вообще для любого показателя степени a :

$$\boxed{(x^a)' = ax^{a-1}, \quad a \in \mathbb{R}.} \quad (1.12)$$

Найдём с помощью этой формулы производную функции $f(x) = \sqrt{x}$:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Эта производная встречается очень часто, и её имеет смысл выучить. Запомнить можно так: «производная корня есть один делить на два корня».

Перейдём к тригонометрическим функциям: синусу и косинусу. Вычисления с помощью формулы (1.11) и первого замечательного предела приводят к следующему результату:

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.}$$

Четыре производные в рамочке (константа, степенная функция, синус и косинус), как мы сказали выше, называются *табличными*. Эти производные нужно твёрдо знать.

Вычисления производной по определению (то есть как предела) легко проходят для функций, устроенных наиболее просто. А как быть, если нужно продифференцировать функцию наподобие такой: $f(x) = x^7 \sin \sqrt[3]{4x^2 - 5x}$? Здесь вычислять предел (1.11) — занятие не из приятных. В подобных случаях на помощь приходят *правила дифференцирования*, которые позволяют сконструировать производную данной функции из производных более простых функций.

1.1.5. Правила дифференцирования

Как мы уже сказали, правила дифференцирования позволяют находить производные функций достаточно сложного вида. Идея состоит в «расщеплении» исходной функции на более простые функции, производные которых известны и играют роль «кирпичиков» при конструировании искомой производной. Зная небольшое число табличных производных и располагая правилами дифференцирования, мы можем вычислять производные огромного количества функций, не прибегая к определению производной и не вычисляя соответствующий предел (1.11).

Всего имеется пять правил дифференцирования. Мы приводим их здесь без доказательства. Функции $u(x)$ и $v(x)$ являются теми самыми «кирпичиками», из которых строятся функции более сложного вида.

0. Константа выносится за знак производной: если c — число, то $(cu)' = cu'$.

Данное правило легко получается в качестве следствия правила 2 о дифференцировании произведения. Но применяется оно настолько часто, что мы сделали его «нулевым» правилом, обособленным от остальных.

Согласно этому правилу имеем, например,

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 10x,$$

$$(-3 \sin x)' = -3(\sin x)' = -3 \cos x.$$

1. Дифференцирование суммы: $(u + v)' = u' + v'$ (производная суммы равна сумме производных).

Так, применяя правила 0 и 1, находим

$$(\sin x + \cos x)' = (\sin x)' + (\cos x)' = \cos x - \sin x,$$

$$(x^3 + 4 \cos x - 10)' = (x^3)' + (4 \cos x)' + (-10)' = 3x^2 - 4 \sin x$$

(производная константы -10 равна нулю!).

2. Дифференцирование произведения: $(uv)' = u'v + uv'$.

Вот пример дифференцирования произведения:

$$(x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

А вот как получается правило 0:

$$(cu)' = c'u + cu' = cu',$$

поскольку $c' = 0$.

3. Дифференцирование частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Правило дифференцирования частного позволяет найти, например, производную тангенса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Нам осталось обсудить последнее правило — дифференцирование сложной функции. Мы сначала объясним, что такое сложная функция, затем продемонстрируем правило дифференцирования на примерах, и только потом — когда станет ясно, как оно работает — дадим формулировку этого правила.

Пусть, например, $u(x) = \sin x$ и $v(x) = \sqrt{x}$. Давайте сначала извлекать корень из x (то есть применять к x функцию v), а потом брать синус полученного числа (то есть действовать на полученное число $v(x)$ функцией u). Тогда возникает функция:

$$u(v(x)) = \sin \sqrt{x}.$$

Это и есть *сложная функция*, или *композиция функций* u и v . Идея понятна: число x поступает на вход *первой* функции v , а полученное число $v(x)$ поступает на вход *второй* функции u .

Можно, наоборот, сделать u первой функцией, а v — второй. Тогда сначала от x будет вычисляться синус, а потом из синуса извлекаться корень. Получится другая сложная функция:

$$v(u(x)) = \sqrt{\sin x}.$$

Дифференцирование сложной функции — это как снятие листов с кочана капусты. Сначала находим производную второй («внешней») функции и умножаем её на производную первой («внутренней») функции. Применительно к нашим примерам это выглядит так:

$$\begin{aligned}(\sin \sqrt{x})' &= \cos \sqrt{x} \cdot (\sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}, \\ (\sqrt{\sin x})' &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot (\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x.\end{aligned}$$

Приведём для ясности ещё один пример:

$$[(4x^2 + 3x + 2)^5]' = 5(4x^2 + 3x + 2)^4 \cdot (4x^2 + 3x + 2)' = 5(4x^2 + 3x + 2)^4 \cdot (8x + 3).$$

И ещё пример (очень важный для физики; здесь A , ω и α — константы):

$$[A \sin(\omega x + \alpha)]' = A \cos(\omega x + \alpha) \cdot (\omega x + \alpha)' = A \omega \cos(\omega x + \alpha).$$

Понятно, как работает правило? Тогда — формулировка.

4. Дифференцирование сложной функции: $[u(v(x))]' = u'(v(x))v'(x)$.

1.1.6. Обозначения производной в физике

Переходя к физическим приложениям производной, мы будем использовать несколько иные обозначения — те, которые приняты в физике.

Во-первых, меняется обозначение функций. В самом деле, какие функции мы собираемся дифференцировать? Этими функциями служат физические величины, зависящие от времени. Например, координата тела $x(t)$ и его скорость $v(t)$ могут быть заданы формулами

$$x(t) = 1 + 12t - 3t^2, \quad (1.13)$$

$$v(t) = 12 - 6t. \quad (1.14)$$

Таким образом, аргументом функции теперь является время t , а буква x отныне обозначает функцию — координату точки.

Во-вторых, меняется обозначение производной. Штрих в физике зарезервирован для других целей, и вместо него мы используем точку над буквой:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \dot{x}(t) \quad (1.15)$$

(читается «икс с точкой»).

Имеется ещё одно обозначение производной, очень распространённое как в математике, так и в физике:

$$\text{производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{dx}{dt} \quad (1.16)$$

(читается «дэ икс по дэ тэ»).

Остановимся подробнее на смысле обозначения (1.16). Математик понимает его двояко — либо как предел:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad (1.17)$$

либо как дробь, в знаменателе которой стоит приращение времени dt , а в числителе — так называемый *дифференциал* dx функции $x(t)$. Понятие дифференциала несложно, но мы не будем его сейчас обсуждать; оно ждёт вас на первом курсе.

Физик, не скованный требованиями математической строгости, понимает обозначение (1.16) более неформально. Пусть dx есть изменение координаты за время dt . Возьмём интервал dt настолько маленьким, что отношение $\frac{dx}{dt}$ близко к своему пределу (1.17) с устраивающей нас точностью.

И тогда, — скажет физик, — *производная координаты по времени есть попросту дробь, в числителе которой стоит достаточно малое изменение координаты dx , а в знаменателе — достаточно малый промежуток времени dt , в течение которого это изменение координаты произошло.*

Такое нестрогое понимание производной характерно для рассуждений в физике. Далее мы будем придерживаться именно этого физического уровня строгости.

Производная $\dot{x}(t)$ физической величины $x(t)$ снова является функцией времени, и эту функцию снова можно продифференцировать — найти производную производной, или *вторую производную* функции $x(t)$. Вот одно обозначение второй производной:

$$\text{вторая производная функции } x(t) \text{ обозначается } \ddot{x}(t)$$

(читается «икс с двумя точками»), а вот другое:

$$\text{вторая производная функции } x(t) \text{ обозначается } \frac{d^2x}{dt^2}$$

(читается «дэ два икс по дэ тэ квадрат» или «дэ два икс по дэ тэ дважды»).

Давайте вернёмся к исходному примеру (1.13) и посчитаем производную координаты, а заодно посмотрим на совместное использование обозначений (1.15) и (1.16):

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + 12t - 3t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}(1 + 12t - 3t^2) = 12 - 6t. \end{aligned}$$

(Символ дифференцирования $\frac{d}{dt}$ перед скобкой — это всё равно что штрих сверху за скобкой в прежних обозначениях.)

Обратите внимание на то, что производная координаты оказалась равна скорости (1.14). Это не случайное совпадение. Связь производной координаты со скоростью тела будет выяснена в следующем разделе «Механическое движение».

1.1.7. Предел векторной величины

Физические величины бывают не только скалярными, но и векторными. Соответственно, часто нас интересует скорость изменения векторной величины, то есть производная вектора. Однако прежде чем говорить о производной, нужно разобраться с понятием предела векторной величины.

Рассмотрим последовательность векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots$. Сделаем, если необходимо, параллельный перенос, сведём их начала в одну точку O (рис. 1.5):

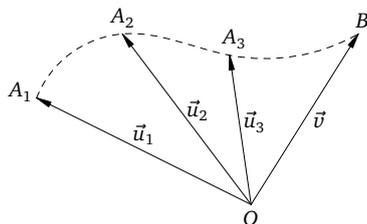


Рис. 1.5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n = \vec{v}$

Концы векторов обозначим A_1, A_2, A_3, \dots . Таким образом, имеем:

$$\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA_1}, \quad \vec{u}_2 = \overrightarrow{OA_2}, \quad \vec{u}_3 = \overrightarrow{OA_3}, \quad \dots$$

Предположим, что последовательность точек A_1, A_2, A_3, \dots «втекает»²⁾ в точку B :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = B.$$

Обозначим $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Мы скажем тогда, что последовательность векторов \vec{u}_n стремится к вектору \vec{v} или что вектор \vec{v} является пределом последовательности векторов \vec{u}_n :

$$\vec{v} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{u}_n.$$

Предположим теперь, что концы векторов на рис. 1.5 пробегают не дискретный набор значений, а непрерывную кривую (например, указанную пунктирной линией). Таким образом, мы имеем дело не с последовательностью векторов \vec{u}_n , а с вектором $\vec{u}(t)$, который меняется со временем. Это как раз то, что нам и нужно в физике!

Дальнейшее объяснение почти такое же. Пусть t стремится к некоторому значению t_0 . Если при этом концы векторов $\vec{u}(t)$ «втекают» в некоторую

²⁾Вполне достаточно интуитивного понимания этого «втекания», но вас, быть может, интересует более строгое объяснение? Тогда вот оно.

Пусть дело происходит на плоскости. «Втекание» последовательности A_1, A_2, A_3, \dots в точку B означает следующее: сколь бы малый круг с центром в точке B мы ни взяли, все точки последовательности, начиная с некоторой, попадут внутрь этого круга. Иными словами, вне любого круга с центром B имеется лишь конечное число точек нашей последовательности.

А если дело происходит в пространстве? Определение «втекания» модифицируется незначительно: нужно лишь заменить слово «круг» на слово «шар».

точку B , то мы говорим, что вектор $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ является пределом векторной величины $\vec{u}(t)$:

$$\vec{v} = \lim_{t \rightarrow t_0} \vec{u}(t).$$

1.1.8. Дифференцирование векторов

Выяснив, что такое предел векторной величины, мы готовы сделать следующий шаг — ввести понятие производной вектора.

Предположим, что имеется некоторый вектор $\vec{u}(t)$, зависящий от времени. Это означает, что длина данного вектора и его направление могут меняться с течением времени.

По аналогии с обычной (скалярной) функцией вводится понятие изменения (или приращения) вектора. *Изменение вектора \vec{u} за время Δt есть векторная величина:*

$$\Delta \vec{u} = \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t).$$

Обратите внимание на то, что в правой части данного соотношения стоит *разность векторов*. Изменение вектора \vec{u} показано на рис. 1.6 (напомним, что при вычитании векторов мы сводим их начала в одну точку, соединяем концы и «укальываем» стрелкой тот вектор, из которого производится вычитание).

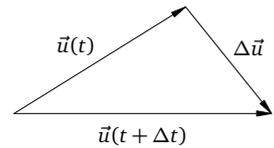


Рис. 1.6. Изменение вектора

Если промежуток времени Δt достаточно мал, то и вектор \vec{u} за это время меняется мало (в физике, по крайней мере, так считается всегда). Соответственно, если при $\Delta t \rightarrow 0$ отношение $\frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной вектора \vec{u}* :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}. \quad (1.18)$$

При обозначении производной вектора мы не будем использовать точку сверху (так как символ $\dot{\vec{u}}$ не слишком хорошо смотрится) и ограничиваемся обозначением (1.18). Но для производной скаляра мы, разумеется, свободно используем оба обозначения.

Напомним, что $\frac{d\vec{u}}{dt}$ — это *символ* производной. Его можно понимать и как дробь, в числителе которой стоит *дифференциал* вектора \vec{u} , соответствующий промежутку времени dt . Выше мы не стали обсуждать понятие дифференциала, так как в школе его не проходят; не будем обсуждать дифференциал и здесь.

Однако на физическом уровне строгости производную $\frac{d\vec{u}}{dt}$ можно считать дробью, в знаменателе которой стоит очень малый интервал времени dt , а в числителе — соответствующее малое изменение $d\vec{u}$ вектора \vec{u} . При достаточно малом dt величина данной дроби отличается от предела в правой части равенства (1.18) столь мало, что с учётом имеющейся точности измерений этим отличием можно пренебречь.

Этого (не вполне строгого) физического понимания производной нам окажется вполне достаточно.

Правила дифференцирования векторных выражений во многом аналогичны правилам дифференцирования скаляров. Нам понадобятся лишь самые простые правила.

1. Постоянный скалярный множитель выносится за знак производной: если $c = \text{const}$, то

$$\frac{d(c\vec{u})}{dt} = c \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Мы используем это правило в разделе «Импульс», когда второй закон Ньютона

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

будет переписан в виде

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}.$$

2. Постоянный векторный множитель выносится за знак производной: если $\vec{c} = \text{const}$, то

$$\frac{d}{dt}(x(t)\vec{c}) = \dot{x}(t)\vec{c}.$$

3. Производная суммы векторов равна сумме их производных:

$$\frac{d}{dt}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Последними двумя правилами мы будем пользоваться неоднократно. Посмотрим, как они работают в важнейшей ситуации дифференцирования вектора при наличии в пространстве прямоугольной системы координат $OXYZ$ (рис. 1.7).

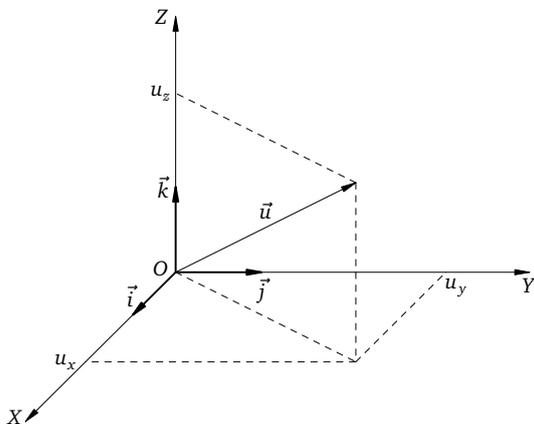


Рис. 1.7. Разложение вектора по базису

Как известно, любой вектор \vec{u} единственным образом раскладывается по базису единичных векторов \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} :

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}.$$

Здесь u_x, u_y, u_z — проекции вектора \vec{u} на координатные оси. Они же являются координатами вектора \vec{u} в данном базисе.

Вектор \vec{u} в нашем случае зависит от времени, а это значит, что его координаты u_x, u_y, u_z являются функциями времени:

$$\vec{u}(t) = u_x(t)\vec{i} + u_y(t)\vec{j} + u_z(t)\vec{k}. \quad (1.19)$$

Продифференцируем это равенство. Сначала воспользуемся правилом дифференцирования суммы:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(u_x(t)\vec{i}) + \frac{d}{dt}(u_y(t)\vec{j}) + \frac{d}{dt}(u_z(t)\vec{k}).$$

Затем вынесем постоянные векторы за знак производной:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x(t)\vec{i} + \dot{u}_y(t)\vec{j} + \dot{u}_z(t)\vec{k}. \quad (1.20)$$

Таким образом, если вектор \vec{u} имеет координаты (u_x, u_y, u_z) , то координаты производной $\frac{d\vec{u}}{dt}$ являются производными координат вектора \vec{u} , то есть имеют вид $(\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$.

Ввиду особой важности формулы (1.20) дадим более непосредственный её вывод.

В момент времени $t + \Delta t$ согласно (1.19) имеем:

$$\vec{u}(t + \Delta t) = u_x(t + \Delta t)\vec{i} + u_y(t + \Delta t)\vec{j} + u_z(t + \Delta t)\vec{k}.$$

Напишем изменение вектора \vec{u} :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{u} &= \vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t) = \\ &= (u_x(t + \Delta t)\vec{i} + u_y(t + \Delta t)\vec{j} + u_z(t + \Delta t)\vec{k}) - (u_x(t)\vec{i} + u_y(t)\vec{j} + u_z(t)\vec{k}) = \\ &= (u_x(t + \Delta t) - u_x(t))\vec{i} + (u_y(t + \Delta t) - u_y(t))\vec{j} + (u_z(t + \Delta t) - u_z(t))\vec{k} = \\ &= \Delta u_x \cdot \vec{i} + \Delta u_y \cdot \vec{j} + \Delta u_z \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Разделим обе части полученного равенства на Δt :

$$\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta u_x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta u_y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta u_z}{\Delta t}\vec{k}.$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ дроби $\Delta u_x/\Delta t$, $\Delta u_y/\Delta t$, $\Delta u_z/\Delta t$ переходят соответственно в производные \dot{u}_x , \dot{u}_y , \dot{u}_z , и мы снова получаем соотношение (1.20):

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{u}_x\vec{i} + \dot{u}_y\vec{j} + \dot{u}_z\vec{k}.$$

1.2. Механическое движение

Понятие движения является чрезвычайно общим и охватывает самый широкий круг явлений. В физике изучают различные виды движения. Простейшим из них является механическое движение.

Механическое движение — это изменение положение тела (или его частей) в пространстве относительно других тел с течением времени.