А. В. Шаповалов

Как построить пример

Школьные
Математические
Кружки

А. В. Шаповалов

Как построить пример?

Электронное издание

Издательство МЦНМО
Москва, 2016

УДК 51(07)
ББК 22.1
Ш24

Шаповалов А. В.
Как построить пример?
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
80 с.
ISBN 978-5-4439-2370-3

Девятая книжка серии «Школьные математические кружки» призвана научить школьников строить математические примеры и конструкции. В книжку вошли разработки пяти занятий математического кружка с подробно разобранными примерами различной сложности, задачами для самостоятельного решения и методическими указаниями для учителя.

Для удобства использования листочки занятий повторены в конце книги в виде раздаточных материалов. Ещё 50 задач с краткими решениями даны дополнительным списком. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она также будет интересна студентам педагогических вузов, школьникам и их родителям, а также всем любителям элементарной математики.

Подготовлено на основе книги: *А. В. Шаповалов*. Как построить пример? — 3-е изд., стереотип.— М.: МЦНМО, 2016. — ISBN 978-5-4439-0666-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2370-3

Предисловие

Данная книга содержит пять тематических занятий математического кружка 5–7 классов. В материалы каждого занятия входят: вступительный текст учителя, подробный разбор нескольких задач по теме занятия (включающий решения и комментарии), задачи для самостоятельного решения, решения этих задач с комментариями.

Кроме того, есть раздел «Дополнительные задачи», где даны около 50 задач разной сложности на построение примеров (или невозможность построения). Наиболее сложные задачи отмечены звёздочкой *. Для удобства в конце каждого занятия приведён список задач из дополнительного раздела, а также из других занятий, которые могут быть решены с использованием методов текущего занятия. Так как большинство задач может быть решено несколькими методами, одна и та же задача может фигурировать в нескольких списках.

В конце книги приведён раздаточный материал.

По сути, весь текст брошюры рассчитан на учителя, а не на школьника. Нормальный младшеклассник предпочитает решать и обсуждать решения, и уж вряд ли станет читать пространные рассуждения на тему «Как можно найти решение» (он скажет: а я решал по-другому). Задача учителя: включить в обсуждение то полезное, что он найдёт в этих текстах.

Особенность брошюры: решения задач и *пути к решению* тщательно разделены. Этим автор хотел подчеркнуть, что в задачах на конструкцию готовое решение (то, что школьник в идеале должен написать) и путь к решению (пояснение, как такое придумать) обычно имеют мало общего. Соответственно, и школьников стоит научить их разделять. Такое разделение полезно, впрочем, и для остальных математических задач.

Первые шесть задач каждого занятия — это, фактически, примеры для коллективного обсуждения. Сложность их различна: первые обычно — одноходовки, последние школьники, скорее всего, решить не успеют. Но даже если школьникам самим не удаётся быстро найти *нужное* решение, стоит его подсказать, в любом случае — разобрать на доске и показать на его примере работу *приёмов*.

Задачи для самостоятельного решения учителю стоит обсуждать индивидуально со школьниками, так или иначе продвинувшимися в их решении.

Соглашение о формулировках. Если в условии требуется *построить*, *разрезать*, *расставить*, то поиск *всех возможных вариантов не требуется* (а если он нужен, это специально оговаривается).

Автор благодарен С. Р. Когаловскому, общение с которым помогло ему прийти к пониманию необходимости разделять *решение* и *путь к решению*, и Л. Э. Медникову — за несколько ярких задач, внимательное прочтение книжки и комментарии, способствовавшие существенному улучшению её текста.

Введение

Как можно определить, есть у младшего школьника творческие способности к математике или нет? Надо дать ему нестандартную задачу. Почти наверняка в ней надо придумать какую-то конструкцию. Все мы помним такие задачи с детства: про волка, козу и капусту, разрежь и сложи, нарисуй, не отрывая карандаша от бумаги, расставь числа в кружочке. Оказывается, умение придумать не слишком зависит от оценки по «обычной» школьной математике. И понятно почему: традиционная оценка прежде всего оценивает умение применять *заранее выученные* приёмы в более-менее *стандартных* ситуациях. Это похоже на открывание двери, и цель обучения часто понимается так: дать ученику связку из как можно большего числа ключей и научить быстро выбирать нужный. Это, конечно, важный аспект обучения, но он не должен быть единственным, особенно при обучении математике.

Ведь в жизни попадаются *лёгкие*, *но не стандартные* задачи, когда надо что-то сделать, а готового рецепта «как сделать» нет. Ну не нашлось в связке подходящего ключа, а войти надо. Придётся что-то придумать...

Решение задач на построение примеров эту способность придумывать поддерживает и развивает.

Но ведь придумывать надо не только в математике. Придумывают учёные и поэты, шахматисты и цирковые артисты, бизнесмены и политики. Какое отношение такие задачи имеют собственно к обучению математике? Ведь главное, что отличает математику от других видов деятельности, — строгий стандарт доказательств. А тут придумал пример, один из многих, и доказывать ничего не надо?! Эдак не отличишь невежду от хорошо обученного школьника...

Подобные опасения лежат в основе кружковых программ, где умение строить конструкции рассматривается как своего рода «детская болезнь», от которой надо мягко, но настойчиво лечить.

Автор с таким подходом решительно не согласен. Во-первых, в задачах на конструкции математики ничуть не меньше. Во-вторых, научный опыт автора показал, что создание конструкций при поиске доказательств в «высокой математике» требуется ничуть не меньше, чем применение теорем. В конце концов, любое доказательство само по себе является конструкцией! Наконец, бóльшая часть школьников вовсе не станут профессиональными «чистыми» математиками. Более вероятно, что они будут применять свои знания и навыки в прикладной математике, программировании, других науках и вне науки. Так давайте учить их так, чтобы им эти навыки пригодились в любом случае.

В частности, будем учить их придумывать примеры так, чтобы изобретательность как минимум сохранялась, а строгость ей не только не мешала, но чем дальше, тем больше помогала. В решениях автор старался показать, что классические кружковые темы «Чётность», «Принцип Дирихле», «От противного», «Решение с конца» с тем же успехом работают при построении примеров, что и при доказательстве невозможности.

Занятие 1

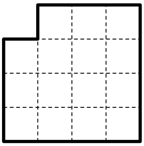
Как такое может быть?

Хороший вопрос — это половина ответа.

Если на вопрос «Может ли?» вы подозреваете ответ «Может», то стоит спросить себя: «Как такое может быть?». Уточните вопрос: «Какими свойствами эта конструкция должна обладать?». И хотя в задании о свойствах не спрашивается, но дополнительное знание может сильно сузить круг поисков или осветить дорогу. Какие именно свойства искать — зависит от задачи. Тут помогает как математический кругозор, так и здравый смысл. В задачах на разрезание считают число сторон, площади, длины, углы. В задачах на делимость раскладывают на простые множители и считают остатки.

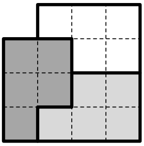
Шерлок Холмс говорил: «Я задаю себе вопросы и последовательно отбрасываю невозможные случаи. То, что останется, и будет правильным, каким бы невероятным это изначально не казалось».

Задавайте себе вопросы на протяжении всего построения. Вы с удивлением увидите, как много конструкций окажутся логичными и единственно возможными.



Задача 1.1. Можно ли квадрат 4×4 без угловой клетки (см. рис.) разрезать на 3 равные части?

Решение. Да, см. рис.



Путь к решению. Надо задаться вопросом о площади части. Вычислив, что площадь *целая* — равна пяти площадям клеток, естественно попробовать разрезать *по границам клеток* на 3 пятиклеточные фигуры.

Задача 1.2. Расшифруйте ребус (одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные — разные):

Б + БЕЕЕ = МУУУ.

Решение. 1 + 1999 = 2000.

Путь к решению. Добавив однозначное число, мы увеличили разряд тысяч. Значит, оба четырёхзначных числа отличаются от «круглого» (кратного тысячи) числа не больше чем на 9. У таких чисел три одинаковые последние цифры могут быть только 999 или 000, и разница между такими числами равна 1.

Задача 1.3. Арбуз разрезали на 4 части и съели. Осталось 5 корок. Как такое может быть, если корок никто не грыз?

Решение. Проделав сквозную дырку, вырежем из арбуза продолговатый кусок мякоти с нашлёпками корки с двух сторон. Остальное разрежем на три части плоскими разрезами через ось дырки.

Путь к решению. На вопрос «Как такое могло быть» найдём ответ по принципу Дирихле: должна быть часть с двумя (или более) корками. Понятно, что эти корки соединены куском мякоти.

Задача 1.4. Найдутся ли три натуральных числа, которые друг на друга не делятся, но каждое делит произведение двух других?

Решение. Да. Например, 6, 10 и 15.

Путь к решению.

— Понятно, почему числа не делятся на самое большое из них, а почему не делятся на самое маленькое?

— Наверное, в маленьком есть простой множитель, которого нет в больших?

— Но произведение ведь делится, значит, где-то этот множитель есть...

— Есть в одном, а в другом его нет.

— Ладно, а почему тогда другое на маленькое число не делится?

— Значит, в нём нет другого простого множителя.

— Идея: пусть каждое число раскладывается на два простых множителя, а с любым другим у него только один общий простой множитель. Группируя попарно множители 2, 3, 5, получим пример.

Задача 1.5. Мюнхгаузен говорит: «Позавчера мне было 40 лет, а в следующем году мне исполнится 43». Могут ли его слова быть правдой?

Решение. Могут, если барон родился 31 декабря, а фразу произнёс 1 января.

Путь к решению. Как такое может быть? Если в следующем году барону исполнится 43, то в текущем — 42, а в прошлом — 41.

— Но ведь позавчера было ещё только 40?

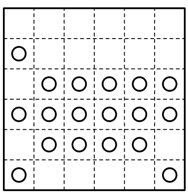
— Значит, 41 исполнилось вчера.

— Но ведь исполнилось в прошлом году?

— Значит, вчера был прошлый год.

Задача 1.6. Расставьте шашки на клетчатой доске 6×6 так, чтобы на всех горизонталях стояло разное число шашек, а на всех вертикалях — одинаковое.

Решение. Например, см. рис.



Путь к решению. Число шашек на горизонтали может быть любым — от 0 до 6. Это даёт 7 вариантов.

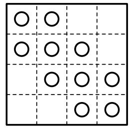
Если бы были 7 разных горизонталей, сумма была бы

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.$$

Но один ряд надо убрать, и сумма при этом должна разделиться на 6. Единственная возможность — убрать 3. Далее надо так распределить шашки на горизонталях, чтобы в каждой вертикали оказалось по 3 шашки. Проще всего сгруппировать 5 с 1, а 4 с 2 так, чтобы каждая пара дала по одной шашке на каждую вертикаль (см. рис.).

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.7. В квадрате 4×4 отметили 10 клеток (см. рис.). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые по форме части так, чтобы они содержали соответственно 1, 2, 3 и 4 отмеченные клетки.



Задача 1.8. Среди четырёх людей нет трёх с одинаковым именем, или с одинаковым отчеством, или с одинаковой фамилией, но у каждых двух совпадает или имя, или отчество, или фамилия. Может ли так быть?

Задача 1.9. Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. А будут ли после неё ещё такие даты в нашем столетии?

Задача 1.10. Придумайте способ разрезать квадрат на семиугольник и восьмиугольник так, чтобы для каждой стороны восьмиугольника нашлась равная ей сторона семиугольника.

Задача 1.11. В однокруговом турнире за победу давали 2 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. «Спартак» одержал больше всех побед. Мог ли он набрать меньше всех очков?

Задача 1.12. Барон Мюнхгаузен каждый день ходил на охоту, а возвратившись, говорил: «Сегодня я добыл уток больше, чем позавчера, но меньше, чем неделю назад».

а) Могли ли его слова 7 дней подряд быть правдой?

б) Какое наибольшее число дней подряд эти слова могли быть правдой?

Оглавление