А. В. Шаповалов, Л. Э. Медников

Как готовиться к математическим боям

МЦНМО

А. В. Шаповалов, Л. Э. Медников

Как готовиться к математическим боям

400 задач турниров имени А. П. Савина

Электронное издание

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва, 2016

УДК 51
ББК 22.1
Ш24

Шаповалов А. В., Медников Л. Э.
Как готовиться к математическим боям.
400 задач Турниров имени А. П. Савина
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2016
252 с.
ISBN 978-5-4439-2325-3

Проработав много лет в руководстве и жюри Турнира им. Савина и других турниров математических боёв, авторы узнали много секретов игры и делятся ими с читателем. Как, например, избежать ошибок в своих решениях и разоблачить их в решениях соперника? Потренируйтесь на специально подобранных решениях с ошибками!

Дополняя предыдущую книгу авторов, книга подробно рассказывает о математических соревнованиях на летнем Турнире 2012 года, затрагивая и турниры нескольких предыдущих лет. Собраны все задачи 2012 года и избранные задачи 2006 и 2007 гг., всего почти 400 задач для учеников 6—9 классов. Они сгруппированы по темам, снабжены рубрикатором, ко всем даны решения. Большинство задач вполне доступны широкому кругу школьников. Приведены правила математического боя, а также задачи конкурса капитанов и шуточных матбоёв.

Книга адресована тем, кто хотел бы подготовиться или подготовить учеников к математическим боям и другим соревнованиям: школьникам, их родителям и учителям, а также просто любителям математики.

Подготовлено на основе книги:
Шаповалов А. В., Медников Л. Э. Как готовиться к математическим боям. 400 задач Турниров имени А. П. Савина. — М.: МЦНМО, 2014. — 254 с. — ISBN 978-5-4439-0320-0

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2325-3

КАК ГОТОВИТЬСЯ К МАТЕМАТИЧЕСКИМ БОЯМ

За последние 20 лет математические бои в России широко распространились. Учителя математических классов и руководители кружков оценили это соревнование как очень полезное для заинтересованных школьников. Обсуждение задач в кругу самих учащихся, — как в процессе решения, так и на самом бое — во-первых, служит заметным дополнительным источником знаний, а во-вторых, убеждает учащихся в объективном характере таких знаний, что даёт сильный стимул к дальнейшему изучению математики. Работа в команде привлекает даже тех школьников, которые лично для себя не захотели бы дополнительно заниматься математикой. Турниры проводятся на школьном, городском и даже общероссийском уровне, и нередки случаи, когда мест для всех желающих команд просто не хватает.

Итак, решено: играем матбой, и лучше — против соседнего класса, кружка, школы или даже города! Но чтобы не ударить в грязь лицом, надо подготовиться. Способов много, и эта книга поможет выбрать подходящие и воплотить их.

Решение задач

Разумеется, здесь, как и при подготовке к другим математическим соревнованиям, главным средством было и будет решение задач и изучение необходимой теории. Книг с теорией и задачами издано много, немало материала можно найти и в Интернете. Заметим, однако, что большинство сборников задач посвящены в основном задачам олимпиад, а задачи матбоёв имеют свою специфику, о которой мы ещё скажем ниже. А немногочисленные сборники задач математических боёв публикуются обычно без решений или с краткими указаниями вместо решений. Да и большинство задач таких подборок не блещет оригинальностью, попадая в варианты боёв в основном из сборников олимпиад. В этом отношении Турнир им. А. П. Савина является счастливым исключением, с самого начала сохраняя традицию использовать по большей части авторские задачи. Почти 400 задач данного сборника представляют задачи и варианты Турнира. Все задачи снабжены исчерпывающими решениями, и даже те решения, что выглядят подозрительно краткими, являются полными — просто из решения «выжата вода».

Мы постарались структурировать книгу так, чтобы задачи было легко найти и использовать для подготовки школьников от 6 до 9 классов и команд самого разного уровня. В отличие от большинства сборников, задачи разбиты не по вариантам (что бывает нужно довольно редко), а по темам (которые зависят как от условия, так и от метода решения). Если задача, как это часто бывает, может быть отнесена к нескольким темам, то она помещается в одну из них, а в остальных темах на задачу дана ссылка. При каждой задаче указаны классы, которым она подходит. Кроме того, полезно помнить, что задачи игры «Математический квадрат» легче задач устной олимпиады для данного класса, а те, в свою очередь, легче задач командной олимпиады и задач боёв, трудность которых ещё зависит от лиги (см. учебный бой по готовому варианту).

Устные задачи

Бой начинается с конкурса капитанов. Двум капитанам или представителям команд даётся устная задача «на ответ», обычно несложная, но часто — с подвохом. Побеждает тот, кто первым скажет правильный ответ (часто, впрочем, выигрывает тот, кто не торопится, — противник даёт неправильный ответ и проигрывает). На конкурс капитанов нередко выставляют не капитана, а другого игрока — с более быстрой реакцией.

Для тренировки мы собрали около двух десятков таких задач в главе «Конкурс капитанов». К ним можно ещё добавить наиболее лёгкие задачи из «Математического квадрата». Все эти задачи можно использовать также для устной разминки всех участников в начале занятия кружка.

Вязкие задачи

На олимпиадах ценятся задачи с компактным и легко проверяемым решением и нещадно отбраковываются задачи, по которым можно ожидать от школьников длинных решений. В самом деле, кому из жюри хочется читать или выслушивать «оперы» и долго и нудно объяснять школьнику, почему он неправ? А в математическом бое как раз и надо, чтобы при изложении решения завязывалась дискуссия между докладчиком и оппонентом. Поэтому используются задачи с подвохами, с разбором случаев, которые можно и не заметить, задачи, решающиеся в два или несколько ходов. Соответственно, полные и безупречные решения таких задач получить и изложить очень непросто. Найдя основную идею, стоит подумать, как довести её до решения, ещё лучше — до компактного или хотя бы просто излагаемого решения. Получив полное решение, надо его тщательно проверить и перепроверить. Тут очень помогает командная работа. Хорошо иметь в команде одного-двух скептиков, которые будут выслушивать решения и «цепляться» к сомнительным местам и неясностям. Даже если решение и в самом деле безупречно, они своими вопросами предвосхитят вопросы оппонентов, тем самым лишив их эффекта неожиданности.

Кроме того, такое выслушивание решений позволяет оценить степень вязкости задачи. Поскольку на какие-то задачи придётся вызывать соперников, желательно вызывать их на самые вязкие задачи: пусть лучше они ошибаются и теряют очки при рассказе!

Специализация по темам

Хорошо составленный вариант боя тематически разнообразен: в нём обязательно есть и геометрия, и алгебра, и задачи комбинаторного плана. Кому-то нравится всё, но чаще отдельный ученик предпочитает задачи на какую-то определённую тему, она у него лучше получается. И если для успеха на олимпиаде ученик должен быть «всеядным», то в команде не меньшим почётом могут пользоваться и «узкие специалисты», способные решить очень трудную задачу, но только на свою излюбленную тему. Впрочем, в хорошей команде есть «специалисты» по разным темам. Если по какой-то теме специалиста нет, полезно предложить кому-нибудь из игроков освоить «вторую специальность». Даже если он задачу и не решит, то сможет хотя бы более осмысленно прооппонировать такую задачу.

Подборка задач данной книги сгруппирована, как уже говорилось выше, как раз по темам. Это удобно как для проведения тематических занятий кружка, так и для тренировки специалистов.

Устный доклад для ровесников. Умение слушать и возражать

Мало решить задачу, надо ещё суметь её доложить. Хотя в принципе школьнику проще рассказать решение сверстникам, чем учителю, такой рассказ всё равно требует некоторой привычки. Рассказывать учителю можно «пунктиром», учитель и так всё знает, поэтому может пропуски заполнить сам. Сверстник такими навыками не обладает, для него придётся рассказывать подробнее. Тем более это касается сверстника, выступающего в роли оппонента, которому выгодно тебя «срезать». К тому же сверстник может задать не очень понятный вопрос.

Ещё больше тренировки требует умение слушать доклад ровесника и обоснованно возражать. Можно сделать так, чтобы параллельно школьники тренировались рассказывать: ученик идёт к доске рассказывать решённую им задачу, а все остальные слушают, задают вопросы. В конце тот, кто задавал наиболее существенные вопросы, получает право на заключение. Конечно, всё это требует времени, и такими тренировками не стоит злоупотреблять: достаточно разбирать по одной задаче в конце занятия. Кроме того, может мешать отсутствие мотивации. Обыкновенно у слушателей нет никакого желания «топить» товарища, поэтому «острых» вопросов они задавать не будут. Если они даже что-то поняли не до конца, то предпочтут отмолчаться, чем обнаружить своё непонимание. Чтобы всё заработало, надо изменить мотивацию, погрузить и докладчика, и слушателей в атмосферу матбоя. Однако учебный бой слишком часто не устроишь — нет времени.

Для тренировки в рассказе и оппонировании один из авторов этой книги практиковал у себя на кружке «Непрерывный матбой». В конце каждого занятия один из учеников, считавших, что он решил какую-то домашнюю задачу, вызывал остальных на неё. Если кто-то кроме него желал рассказать задачу, то выходил и рассказывал, а вызвавший оппонировал. Иначе рассказывал он, а оппонировали все вместе. За каждый раунд начислялись очки, и при прочих равных условиях преимущество выхода имел тот, у кого было меньше очков. Так в рассказ вовлекались и не самые сильные ученики, что давало больше возможностей оппонентам для обнаружения огрехов.

Учебный бой по готовому варианту

Хотя задачи сгруппированы тематически, а не по вариантам, восстановить и использовать варианты турнира 2012 года несложно. В рубрикаторе в конце книги все варианты перечислены, для каждого приведён список из номеров задач. Выберите подходящий вариант по классу и сложности и сыграйте по нему товарищеский бой, а затем сравните рассказанные решения с решениями из данной книги. Чтобы лучше ориентироваться, напомним, что самая сильная лига называлась высшей, следующая — первой, ещё более слабая лига — второй. Ещё слабее была смешанная лига 6—7 классов, поскольку туда попали команды, занявшие последние места в командной олимпиаде 6 и 7 классов. Варианты одного класса для разных лиг обычно пересекались как минимум по 4 задачам. По уровню: две самые сложные задачи высшей лиги рассчитаны на победителей Московской олимпиады по соответствующему классу, ещё две — на призёров. Две самые сложные задачи первой лиги рассчитаны на призёров (3-й диплом или похвальный отзыв), ещё две — на призёров окружного тура. Остальные задачи высшей и первой лиг рассчитаны на кружковцев и учащихся матклассов, занимающихся не первый год. Задачи второй лиги рассчитаны по большей части на кружковцев первого года обучения.

Оценка и самооценка решений

Если противник решил всё, а ваша команда ничего — победы не ждите. Но так бывает редко: как правило, в турнирах противники столь разной силы оказываются в разных лигах и между собою не встречаются. В большинстве боёв количество решённых задач у команд отличается не больше чем на два. На олимпиаде две задачи — это огромный разрыв. Но математический бой — игра с другими правилами, окончательный счёт зависит от самой игры ничуть не меньше, чем от количества решённых задач. Опытные команды без труда припомнят случаи, когда, сидя «без двух», команды сводили бой вничью или даже выигрывали. Тут обычно не обходится без тактических хитростей, имеющих к математике отдалённое отношение. Но неожиданные исходы случались и в боях тактически опытных команд. Что же за «палочка-выручалочка» помогала «неудачникам» спастись? И какое отношение она может иметь к математической подготовке, если не помогла решить задачи?

Палочкой-выручалочкой была *глубина понимания*. Представим себе двух альпинистов, которые покоряют вершину и стараются опередить друг друга. Одному из них осталось до вершины совсем немного, но из-за тумана он её не видит и считает, что он уже там. Другой от вершины пока гораздо дальше, но у него есть прибор ночного видения, и он чётко понимает, где находится и в каком направлении двигаться. Понятно, что в такой ситуации шансы второго покорить вершину гораздо выше. Вот так же и с задачами: почти решил не значит решил. Решение ещё надо изложить и защитить. Если ты не видишь скользкого места, оппонент вполне может тебя туда направить и дать поскользнуться.

Итак, самой серьёзной ошибкой на математическом бое является переоценка того, насколько задача решена. Такая самоуверенность может оказаться губительной на всех стадиях. Если на этапе решения задач команда ошибочно считает нерешённую задачу Z решённой, она перестаёт тратить силы на её решение. А ведь может быть ещё 10 минут — и вместо псевдорешения получилось бы решение! Если команду вызывают на задачу Z, то она может пойти её рассказывать и вместо заслуженных 10—12 очков получить 0, а то и подарить 6 очков противнику, доказавшему отсутствие решения; или даже подарить все 12, если противник задачу решил. Наконец, если вы сами вызвали на задачу Z и получили проверку корректности, то существует большой риск, что вызов окажется некорректным. Тогда вы подарили противнику 6 очков и вынуждены вызывать опять — быть может, на заведомо несложную задачу.

И наоборот, даже для нерешённой задачи оказывается полезным разобраться в ней глубже, чем противник. В первую очередь это пригодится, когда вас на эту задачу вызовут и вы сделаете проверку корректности. Вы должны понять соперника и, обнаружив у него отсутствие решения, рассказанное им псевдорешение «утопить». А вот если глубже разобрался соперник, то «потопить» его вряд ли удастся, и он может уйти безнаказанным, «бесплатно» передав вам очередь вызова.

Итак, в отличие от олимпиады, жизненно важно научить школьников отличать полные решения от неполных, а неполные — от неправильных. Тут, однако, есть проблема. Тренировка эффективна, когда в докладе встречаются ошибки и неточности. Обычно же получается, что добровольно соглашается представлять задачу только достаточно сильный участник или участница кружка, и недочётов в решении мало.

Обсуждение «липовых» решений

Ошибки, возникающие «естественным» путём, обычно достаточно прозрачны и возникают непредсказуемо. Поэтому для целей тренировки их недостаточно. Руководителю надо взять на себя нелёгкий труд рассказывать ученикам «липовые» решения, сначала заранее предупредив, а потом и без предупреждения. Но где взять такие решения? Первый источник — софизмы. Их, к сожалению, немного, но пару десятков в Интернете найти всё-таки удаётся. Но софизмы, увы, имеют обычно мало общего с теми ошибками, которые допускают школьники на боях. Более похожи на них те распространённые, но неполные или неправильные решения, которые попадаются в книгах торопливых авторов. Иные читатели даже предпочитают такие решения правильным ввиду их «простоты и краткости»! В своей книге[1] мы поместили пару десятков таких решений вслед за правильными под рубрикой «Ложный след». Их тоже можно использовать, но надо иметь в виду, что задачи той книги сложнее, чем этой. Наконец, опытный преподаватель и сам не раз сталкивался в своей практике с неправильными решениями, где ошибки вовсе не очевидны. Осталось вспомнить эти решения, оформить и употребить в дело.

По зрелом размышлении авторы взяли на себя труд сделать подборку таких решений и в данной книге. 26 задач с псевдорешениями, их разоблачениями и отсылками к правильным решениям читатель найдёт в главе «Липовая роща». Пытливый ученик может поработать с этими решениями и самостоятельно. Прочитайте задачу, порешайте её некоторое время, а затем прочтите предложенное псевдорешение и попытайтесь найти в нём все ошибки и недочёты. Запишите их коротко, а затем прочтите правильное решение (ссылка на него есть в конце решения). Попробуйте ещё раз найти все ошибки и оценить, сколько они стоят в очках. Наконец, почитайте разоблачение и сравните его с вашим списком ошибок и их оценкой.

[1] *Медников Л. Э., Шаповалов А. В.* Турнир городов: мир математики в задачах. М.: МЦНМО, 2012.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЗАДАЧНИКУ

Здесь собраны все задачи математических боёв и олимпиад турнира 2012 года, задачи «Математического квадрата» и конкурса капитанов, а также более сотни избранных задач двух прошлых турниров 2006 и 2007 года — всего около 400 задач. Мы разделили их на игровые (задачи «Математического квадрата» и конкурса капитанов) и основные (все остальные). Все игровые задачи — не новые, поэтому они выделены в отдельную главу и публикуются без указания автора. У основных задач автор, как правило, указан, а в тех редких случаях, когда он неизвестен, указан источник задачи или написано «Фольклор». Стоит отметить, что среди задач основных соревнований новые авторские задачи составляют свыше 80 %. Для турниров математических боёв это беспрецедентно много. Традиция идёт от самых первых турниров, где все 100 % задач были новыми и авторскими — благодаря настойчивости их первого организатора С. И. Токарева. С ростом популярности турнира росло число лиг, задач требовалось больше, новизна всех задач стала нереальной. Впрочем, отступления от требования новизны допускаются почти исключительно в тех лигах, где школьники по разным причинам не обладают широким кругозором по части олимпиадных задач.

Основных задач набралось около трёхсот. Читателю непросто сориентироваться в таком массиве, разбиение по вариантам и по хронологии тут мало помогает. Для удобства поиска и работы мы разбили задачи на темы, снабжённые подзаголовками, а темы сгруппировали в четыре раздела: логика, комбинаторика, арифметика/алгебра и геометрия. Далее пронумеровали задачи от 1 до 275 и для каждой указали, каким классам она подходит. Как обычно, наиболее трудные задачи помечены одной или двумя звёздочками.

Названия тем являются одновременно как бы статьями рубрикатора. За подзаголовком следуют номера дополнительных задач. Эти задачи находятся в других темах или среди игровых, но тематически подходят.

Игровые задачи упорядочены и расположены в соответствии с особенностями «Математического квадрата». Они нумеровались кодами: например, код 8Ал4 означает 8 *класс*, «*Алгебра*», 4-*я задача*.

Все основные задачи снабжены полными решениями, вынесенными в отдельную главу. К некоторым задачам приведены два решения. Иногда после решения под заголовком «Путь к решению» приведены соображения, как такое решение можно придумать.

Все игровые задачи снабжены ответами, а также указаниями или краткими решениями.

Мы старались выбирать короткие и содержательные решения и излагать их так, чтобы они были доступны ученикам соответствующего класса — и по материалу, и по идеям. Иногда ради этого приходилось жертвовать краткостью. В других случаях мы приводили два решения: скажем, более длинное — для семиклассников, затем более короткое — для восьмиклассников.

Для желающих узнать состав вариантов, подборки задач по годам и по авторам созданы соответствующие списки номеров в рубрикаторе. При этом в списках для олимпиад порядок в списке соответствует порядку на олимпиаде, а в остальных списках порядок номеров случаен, так как он не важен.

Тексты условий задач в данной брошюре могут несколько отличаться от тех вариантов, которые давались во время турнира. Исправления делались для единообразия формулировок и устранения двусмысленностей и языковых шероховатостей. Большинство решений этой книги сообщены нам членами методической комиссии и авторами задач, за что мы им очень благодарны. Мы, однако, несём ответственность за все ошибки и опечатки этой книги.

Основные задачи

Арифметика и алгебра

Цифры

См. также задачи 20, 21, 53, 56, 6Ц1, 6Ц2, 6Ц4, 6Ц5, 6Ч1, 8Ал2, 8Ар4, 8К1.

1. (6—7) Дата 21.02.2012 читается одинаково слева направо и справа налево. Сколько всего таких дат в XXI веке?

(*А. Шаповалов*)

2. (6—7) Астролог считает год счастливым, если в его записи используются четыре последовательные цифры. Например, следующий, 2013-й год будет именно таким. А когда, по мнению этого астролога, был предыдущий счастливый год? (*Н. Нетрусова*)

3. (6) Четырёхзначное число назовём *временны́м*, если можно расположить его цифры и поставить посередине двоеточие так, чтобы получилось какое-то показание часов (например, *временны́ми* являются числа 2010 и 1995, так как часы могут показывать время 00:12 и 19:59). Найдите наименьшее невременно́е число, большее чем 2007. (*А. Шаповалов*)

4. (6—8) Решите ребус: РОТОР : СОКОЛ = 3 : 1. (*А. Хачатурян*)

5. (6—7) Решите ребус: FOOLS + ROADS = RUSSIA. (*К. Кноп*)

6. (6—7) На доске было написано равенство. Дежурный по классу успел стереть некоторые цифры (сколько цифр он стёр, неизвестно). На доске осталось:

$$1127\ldots173 \times 1017\ldots565 = 1126\ldots745.$$

Могло ли исходное равенство быть верным? (*Фольклор*)

7. (7—8) На доске выписаны все целые числа от 1 до n. Сеня посчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это число записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n, если известно, что оно

а) двузначно; б) трёхзначно. (*А. Шаповалов*)

8. (7—8) Каждая цифра натурального числа N строго больше стоящей слева от неё цифры. Чему равна сумма цифр числа $9N$?

(*С. Волчёнков*)

9. (7—8) Докажите, что между натуральными числами n и $9n$ есть натуральное число, сумма цифр которого на 7 больше, чем у n. (*А. Шаповалов*)

10. (7—8) Верно ли, что любое натуральное число, делящееся на 9, отличается от некоторого натурального числа n на сумму цифр этого числа n? (*И. Акулич*)

11. (8—9) В одну строку без пробелов выписаны числа натурального ряда: 12345678910111213… Далее цифры полученной последовательности попеременно складывают на разные плечи качелей: цифру 1 — на левое плечо, цифру 2 — на правое, цифру 3 — на левое и т. д. Если на очередном шаге сумма цифр на каком-то плече окажется больше, то это плечо перевешивает. Докажите, что качели никогда не перестанут качаться. (*А. Жуков*)

Простая арифметика

См. также задачи 6А1—6А3, 6К2, 7Г1.

12. (6—7) В дремучем лесу вот уже более 1000 лет живёт Волшебная ёлка. Известно, что каждое утро на ней вырастают 100 иголок и каждая иголка живёт ровно 4 года, а затем отмирает. Сколько же сегодня иголок на Волшебной ёлке? (*Фольклор*)

13. (6—7) Старик Хоттабыч может совершить чудо, вырвав из своей волшебной бороды один волос (при этом на месте двух вырванных волос вырастает один новый). Сколько всего чудес может совершить старик Хоттабыч, если первоначально в его бороде 2012 волос? (*Фольклор*)

14. (6—7) Каждый мальчик съел по одной конфете, 5 котлет и 3 омлета, а каждая девочка — по 2 котлеты, 4 омлета и 6 конфет. Всего они съели 220 конфет и котлет вместе взятых. А сколько омлетов? (*По мотивам Харьковской областной олимпиады 1999/2000*)

Делимость и остатки

См. также задачи 47, 49, 50, 52, 55, 56, 59, 61, 62, 63, 113, 114, 122, 143, 155, 169, 174, 181, 189, 193, 194, 6Ц2, 6Ц3, 6Ч2, 6Ч3, 7А5, 7Т3, 7К1, 7К3, 8Ар1, 8Ар2, 8Ар4, 8К1, 8М1, 9П1, 9П2, 9П4, 9Т1.

15. (6—7) Саша живёт в своём доме, в котором окон на 2 больше, чем дверей. Все братья Саши — Петя, Коля и Лёня — тоже живут каждый в своём доме. В доме Коли окон на 5 больше, чем дверей, а в доме Пети окон на 4 больше, чем дверей. Может ли у всех братьев Лёни в домах в сумме окон быть в 4 раза больше, чем дверей? (*Фольклор*)

16. (6—7) Для проведения тренировочной командной олимпиады пригласили всех желающих школьников и заранее объявили, что в каждой команде — от 6 до 8 человек. Когда подсчитали количество пришедших, то выяснилось, что выполнить это условие невозможно, при этом на две команды школьников хватало. Сколько человек пришло на олимпиаду? (*А. Блинков*)

17. (6—7) У Мальвины были золотые колечки веса 1 г, 3 г, 4 г, 6 г, 8 г, 9 г, 11 г, 12 г и 16 г. Алиса и Базилио украли по 4 кольца. При этом Алисе досталось втрое больше золота, чем Базилио. Сколько весит оставшееся кольцо? (*Фольклор*)

18. (6—8) В Зазеркалье имеют хождение монеты достоинством 7, 13 и 25 гиней. Алиса заплатила за пирожок несколько монет и получила на сдачу на две монеты больше.

а) Могла ли покупка стоить 100 гиней?

б) Могла ли покупка стоить 60 гиней?

в) Какова минимально возможная стоимость покупки?

(*А. Шаповалов*)

19. (6—7) В теремке лежали 100 конфет. Пришла мышка и съела некоторое количество конфет. Но тут пришла лягушка, и мышка съела ещё одну конфету, чтобы количество оставшихся делилось поровну на двоих. Потом пришли по очереди зайчик, лисичка, волк и медведь, и каждый раз мышка съедала по одной конфете, чтобы то, что осталось, делилось поровну на всех собравшихся. Наконец пришёл слон. Какое наименьшее количество конфет придётся съесть мышке на этот раз, чтобы количество оставшихся делилось поровну на семерых? (*И. Раскина*)

20. (6—7) Сумма трёх натуральных чисел равна 520. На какое наибольшее число нулей может оканчиваться их произведение? (*Колумбия, 2004*)

21. (6—7) Докажите, что сумма всех семизначных палиндромов делится на 9. (*А. Шаповалов*)

22. (6—7) а) В стране имеют хождение банкноты в 60, 15, 12 и 10 динаров. Некто жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него была банкнота в 60 динаров. Могло ли оказаться, что гость прожил в гостинице 10 дней?

б) В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{6}$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Вначале у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице 10 дней?

в) В стране имеют хождение монеты в 1 динар, а также в $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{6}$ динара. Гость жил в гостинице и платил каждый день одну и ту же сумму, получая причитающуюся сдачу. Сначала у него был 1 динар. Мог ли гость прожить в гостинице 14 дней? (Ни на что другое гость денег не тратил.) (*А. Шаповалов*)

23. (7—8) Приехав от бабушки, марсианин Надгоб через несколько дней написал ей первое электронное письмо. Промежуток между первым и вторым письмом длился на день дольше, между вторым и третьим — ещё на день дольше и т. д. Спустя длительное время бабушка рассортировала письма по дням недели, и на каждый хоть одно письмо да пришлось. Докажите, что в марсианской неделе чётное число дней. (*И. Богданов*)

24. (7—8) Мама пекла блины, а четверо детей их ели, каждый со своей скоростью. Получив сначала по блину, дети начали есть одновременно. Как только ребёнок съедал блин, он получал ещё один. Каждый хоть раз получил добавку. Наконец мама объявила, что больше блинов не будет. Дети доели то, что у каждого оставалось, и закончили одновременно. Известно, что до этого не было моментов, когда бы заканчивали есть блин одновременно двое или больше детей. Какое наименьшее число блинов могла испечь мама? (*А. Шаповалов*)

25. (7—9) Докажите, что существует бесконечно много таких пар натуральных чисел (m, n), что m и n имеют одинаковые наборы простых делителей и $m-1$ и $n-1$ также имеют одинаковые наборы простых делителей. (*Фольклор*)

26. (7—8) Берутся всевозможные произведения наборов из 2011 чисел от 1 до 2010, необязательно различных, а далее находится их сумма. Найдите остаток от деления этой суммы на 2011. (Наборы $\{1, 2, 2, 1, 1, 1, \ldots\}$ и $\{2, 1, 1, 2, 1, 1, 1, \ldots\}$ считаются одинаковыми.) (*А. Юрков*)

27. Числа $1, 2, 3, \ldots, n$ записаны в строку в таком порядке, что из каждых трёх подряд записанных чисел одно равно сумме двух других. Может ли быть

а) (7) $n = 100$; б) (9) $n = 2007$? (*И. Акулич*)

28. (6—7) Можно ли расставить на окружности цифры $0, 1, 2, \ldots, 9$ так, чтобы сумма каждых трёх из них, идущих подряд, не превышала 13? (*Фольклор*)

29. (6—7) а) В треугольнике все углы измеряются целым числом градусов, причём все цифры в записи углов различны. Каков наибольший возможный НОД величин углов?

б) Сумма нескольких натуральных чисел равна 1000, все цифры в их записи различны. Какие значения может принимать наибольший общий делитель этих чисел? (*А. Шаповалов*)

30. (6—7) а) Найдите наибольшее простое число, которое нельзя представить как сумму двух составных.

б) Найдите наибольшее натуральное число, которое не представляется как сумма восемнадцати составных. (*А. Шаповалов*)

31. (6—7) Перемножили несколько натуральных чисел и получили 224, причём самое маленькое число было ровно вдвое меньше самого большого. Сколько чисел перемножили? (*А. Сгибнев*)

32. (7—8) У натурального числа есть десять различных простых делителей. Докажите, что найдётся несколько делителей этого числа, сумма которых делится на 1024. (*Д. Калинин*)

33. (7—8) Пусть n и m — натуральные числа, причём $n > m$. Докажите, что n представимо в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — делитель числа m, а другое взаимно просто с m. (*С. Конягин, А. Спивак*)

34. (9) Пусть p и q — произвольные целые числа. Последовательность чисел x_n определяется следующим образом:

$$x_0 = p, \quad x_n = (n+1)x_{n-1} + (-1)^n q \quad \text{для всех } n \geqslant 1.$$

Докажите, что x_n делится на n для всех натуральных n. (*И. Акулич*)

35. (9) Пусть p — нечётное простое число. Для всех k от 1 до $p-1$ нашли целую часть выражения $\frac{k^3}{p}$. Докажите, что сумма полученных чисел равна $\frac{(p^2-1)(p-2)}{4}$.

(*D. Doster, American Mathematical Monthly*)

36. (9) Существует ли нечётное число, сумма всех делителей которого (исключая само число) больше него? (*А. Марачёв*)

37. (9) Пусть P — произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q — наименьший точный квадрат, для которого $Q > P$. Докажите, что разность $Q - P$ является точным квадратом. (*С. Токарев*)

Дроби

См. также задачи 36, 182, 6А4, 7А3, 8Ал3, 8М1.

38. (6—7) Клетчатая таблица называется магическим квадратом, если все числа в ней различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы, см., например, рис. 1.

9	5	1
4	3	8
2	7	6

Рис. 1

Существует ли магический квадрат 3×3, заполненный числами, обратными натуральным?

(*А. Шаповалов*)

39. (6—8) За одно нажатие можно число на экране калькулятора увеличить на его дробную часть (например, из $\frac{3}{7}$ получить $\frac{6}{7}$, а из 3,8 получить $3{,}8 + 0{,}8 = 4{,}6$).

а) Начав с положительного числа, меньшего 1, за три нажатия получили число 3. С какого числа начали?

б) Начав с положительного числа, меньшего 1, за десять нажатий получили число 10. С какого числа начали? (*А. Шаповалов*)

40. (7) Григорий Вячеславович планировал, что стоимость проживания на базе составит A рублей с человека в день (A — целое трёхзначное число, большее ста). Узнав, что команд очень много, он снизил оплату на b процентов (b — целое число). Однако на одной базе все команды не поместились, пришлось срочно дооборудовать вторую базу, поэтому новая стоимость была увеличена также на b процентов. Могло ли оказаться так, что в итоге стоимость проживания на базе отличалась от первоначальной ровно на 1 рубль?

(*А. Блинков*)

41. (7—8) В одном стакане было 100 мл раствора кислоты, причём доля кислоты (по объёму) составляла 40 %, а в другом — 150 мл с долей кислоты 50 %. Ложку раствора из первого стакана перелили во второй, и после перемешивания такую же ложку перелили из второго в стакана в первый. В результате доля кислоты в каждом из стаканов по-прежнему выражалась целым числом процентов.

а) Найдите доли кислоты в стаканах после переливаний.

б) Найдите вместимость ложки (объём ложки меньше объёма стакана). (*С. Токарев*)

42. (8—9) Числа $a^2 - a$ и $a^4 - a$ целые. Докажите, что a — целое число. (*К. Кноп*)

Средние

См. также задачи 80, 82, 90, 7А2, 7А3, 7Т4, 8Ар1, 9П5.

43. (6—7) Профессор Мумбум-Плюмбум мечтает найти десять различных натуральных чисел, наибольший общий делитель которых совпадает с их средним арифметическим. Удастся ли ему это сделать? (*А. Жуков*)

44. (6—7) Среднее арифметическое всех Володиных оценок по геометрии за четверть — целое число. Если заменить все двойки тройками, тройки — четвёрками, а четвёрки — пятёрками, то среднее арифметическое оценок опять-таки будет целым. Что Володя получил в четверти, если известно, что не все его оценки одинаковые? (*В. Гуровиц*)

45. (7—8) Петя вычислил среднее арифметическое некоторого множества (т. е. неупорядоченного набора) различных степеней двойки. Лена вычислила среднее арифметическое некоторого другого множества различных степеней двойки. Может ли Петино число быть равно Лениному? (*О. Крижановский*)

46. (7—9) Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку (целое число от 0 до 10), худшая и лучшая оценки отбрасывались, и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы строго в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании? (*А. Блинков*)

Оглавление