А. Н. Андреева
А. И. Барабанов
И. Я. Чернявский

Саратовские математические олимпиады

1950/51—1994/95

А. Н. Андреева
А. И. Барабанов
И. Я. Чернявский

САРАТОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

1950/51–1994/95

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
А65

Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я.
Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95.
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2015
511 с.
ISBN 978-5-4439-2301-7

В книге собраны задачи, предлагавшиеся на математических олимпиадах в 1950/51–1994/95 учебных годах в г. Саратове и области. Ко всем задачам даются решения, что позволяет использовать книгу в работе математических кружков, факультативов, при подготовке к олимпиадам.

Книга предназначена для учащихся 7–11 классов средней школы и преподавателей математики.

Подготовлено на основе книги: *А. Н. Андреева, А. И. Барабанов, И. Я. Чернявский*. Саратовские математические олимпиады. 1950/51–1994/95. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2013.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2301-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

> Математика — наука молодых. Иначе и не может быть. Занятия математикой — это такая гимнастика ума, для которой нужна вся гибкость и вся выносливость молодости.
>
> *Н. Винер*

Исторические наброски

Университет в г. Саратове является одним из старейших высших учебных заведений России — он основан в 1909 году. В 1923 году был переименован из Императорского Николаевского университета в Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (СГУ).

Механико-математический факультет (до разделения в 1947 году — физико-математический факультет) СГУ всегда активно участвовал в развитии математического образования школьников Саратовской области. Началась эта работа еще в 30-е годы, продолжалась она и все те годы, задачи за которые приведены в этой книге.

Одним из направлений этой деятельности было проведение по воскресным дням городского кружка по математике для школьников при мехмате СГУ. С 1961 году на мехмате некоторое время проработала Юношеская математическая школа — первые регулярные курсы математического профиля, проводившиеся два раза в неделю для школьников г. Саратова.

Как известно, первая олимпиада школьников в СССР прошла по математике в 1934 году в Ленинграде, в 1935 году олимпиады были впервые проведены в Москве и Киеве. А уже в 1940 году в олимпиадное движение включился и Саратов — в городе была проведена первая математическая олимпиада для школьников. Начиная с 1950 года городские математические олимпиады проводятся в Саратове регулярно. С 1959 года механико-математический факультет СГУ совместно с областным отделом народного образования министерства просвещения ежегодно организует не только городские, но и областные математические олимпиады. Со временем районные, городские и областные олимпиады стали этапами Всесоюзной (ныне Всероссийской) математической олимпиады. Об этапах и вообще истории математических олимпиад школьников в СССР можно прочитать, например, в книге Н. Б. Васильева и А. А. Егорова «Задачи всесоюзных математических олимпиад» (М.: Наука, 1988).

Среди председателей оргкомитетов олимпиад в разные годы были профессора мехмата В. В. Вагнер (1908–1981), Н. П. Купцов (1925–1994), А. Е. Либер (1941–1989), Н. Г. Чудаков (1904–1986).

Всех энтузиастов саратовского кружковского и олимпиадного движений вспомнить уже невозможно, упомянем лишь некоторых: Д. Н. Ленской (1931–1970), Б. Н. Рахманов (1902–1977), Н. Ф. Ржехина (1917–1997), А. К. Павлючук (1908–1991). К ним относились и составители данного сборника.

В книге, которую вы держите в руках, собраны задачи, предлагавшиеся на районных, городских и областных олимпиадах Саратовской области начиная с первой регулярной олимпиады — 1950 года. Задачи расположены в хронологическом порядке, чтобы полнее представить развитие олимпиадного движения в г. Саратове и области. Областная олимпиада 1995 года была посвящена памяти Леонида Григорьевича Назарова (1946–1994) — активного организатора многих саратовских олимпиад, щедро отдававшего свой талант математически одаренной молодежи. В том же году в Саратове вышло первое издание данного сборника, этим годом и заканчивается подборка задач.

Работа над книгой началась в 1975 году при участии заведующего кафедрой математического анализа мехмата СГУ Алексея Ивановича Барабанова (1908–1984). С момента приезда в Саратов в 1935 году и до конца своей жизни Алексей Иванович играл большую роль в становлении механико-математического факультета СГУ, много сил отдавал он и работе со школьниками. А. И. Барабанов был одним из организаторов городских и областных математических олимпиад, много сделал для популяризации математических знаний среди школьников, был одним из создателей и лекторов Юношеской математической школы (совместно с В. В. Вагнером).

В то время книг с олимпиадными задачами было немного, не все они были доступны, а сейчас уже стали классическими: Р. Н. Бончковский, «Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов» (М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936); А. А. Леман, В. Г. Болтянский, «Сборник задач московских математических олимпиад» (М.: Просвещение, 1965); Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов, «Международные математические олимпиады» (М.: Просвещение, 1976); Й. Кюршак, «Венгерские математические олимпиады» (М.: Мир, 1976); Ежи Бровкин, С. Страшевич, «Польские математические олимпиады» (М.: Мир, 1978).

В 1975 году выходит в свет книга И. Л. Бабинской «Задачи математических олимпиад» (М.: Наука), где в основном приведены задачи смоленских, московских, а также саратовских олимпиад. Последние были предоставлены автору А. Н. Андреевой.

С момента выхода в свет первого издания данной книги были изданы несколько сборников олимпиадных задач. Упомянем лишь некоторые: Д. В. Фомин, «Санкт-Петербургские математические олимпиады» (СПб.: Политехника, 1994); В. В. Прасолов и др., «Московские математические олимпиады. 1935–1957 г.» (М.: МЦНМО, 2013); Р. М. Фёдоров и др., «Московские математические олимпиады 1993–2005 г.» (М.: МЦНМО, 2008); Н. Х. Агаханов и др., «Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993–2009: заключительные этапы» (М.: МЦНМО, 2010). Однако и сейчас сборник задач саратовских олимпиад представляет большой интерес не только для Саратовской области. Начиная с некоторого времени (существенно позже, чем начинается эта книга) в регионы СССР рассылались рекомендуемые центральной методической комиссией варианты городских и областных олимпиад, однако в Саратове было принято придумывать и давать на олимпиадах часть своих задач. Условия задач приводятся в оригинальной формулировке. Трудно установить авторство собранных в книге задач, часть из них предложена саратовскими энтузиастами олимпиадного движения, бóльшая часть этих задач включалась в городской тур олимпиады.

Победители саратовских областных олимпиад не раз занимали призовые места на заключительных этапах олимпиадной «пирамиды» — Всероссийских и Всесоюзных олимпиадах. Среди саратовских школьников были участники и победители Международных математических олимпиад. Ученик школы № 42 Сергей Либер участвовал в VIII олимпиаде (1966 г., Болгария). Впоследствии он стал доцентом СГУ. Ученик школы № 19 Сергей Конягин завоевал золотые медали на XIV (1972 г., Польша) и XV (1973 г., СССР) олимпиадах. Он стал первым школьником, которому в СССР доверилили участие в международной олимпиаде еще в 9 классе, и, соответственно, он участвовал в международных олимпиадах дважды. В настоящее время Сергей Владимирович Конягин — член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова РАН, профессор МГУ. Ученица физико-технического лицея № 1 (ранее известная и в Москве физико-математическая школа № 13) Наталья Добринская получила серебряную медаль на XXXV олимпиаде (1994 г., Гонконг), впоследствии окончила мехмат МГУ. Отметим также учеников СУНЦ МГУ, пришедших туда из 13-й школы г. Саратова и участвовавших в Международных олимпиадах уже от колмогоровского интерната: Александр Семёнов — бронзовая медаль на XXIV олимпиаде (1983 г., Франция); Лев Иванов — бронзовая медаль на XXVI олимпиаде (1985 г., Финляндия); Аркадий Скопенков — серебряная медаль на XXX олимпиаде (1989 г., Германия).

В г. Саратове несколько раз проводился и заключительный этап олимпиады — Всесоюзная олимпиада школьников по математике: в 1975 году IX олимпиады, в 1980 году — XIV олимпиады, а в 1995 году — заключительный этап XXI, уже Всероссийской олимпиады.

Как пользоваться книгой

Нумерация задач сквозная по всей книге, за исключением приложения. Задачи разных лет сгруппированы по учебным годам, внутри них — по турам олимпиады и классам. Например, 199 (III.7, 8) обозначает 199-ю по порядку в этом сборнике задачу, предлагавшуюся в третьем туре ученикам 7 и 8 классов. Задачи, предлагавшиеся на нескольких олимпиадах, в книге приводятся только один раз, а в следующие годы, для полноты варианта олимпиады, указан только номер. В данной книге под I туром понимаются районные, под II — городские, под III — областные олимпиады. Старшим классом школы в 1961/62–1965/66 и в 1989/90–1994/95 учебных годах был 11-й, в остальные годы, охватываемые сборником, — 10-й. В некоторые годы решение задач на олимпиаде оценивалось в баллах, тогда они указаны после условия задач.

С 1986/87 учебного года областные олимпиады проводятся в два дня, каждый день — по четыре задачи. В 1986/87 и 1987/88 годы второй день областной олимпиады являлся «практическим» туром — давались задачи, которые решались с использованием микрокалькулятора. Эти задачи вынесены в отдельное приложение и даны лишь с ответами и краткими указаниями.

Для всех задач (за исключением задач практического тура) приведены решения составителей сборника, что позволяет рекомендовать книгу начинающим «олимпиадникам». По мнению составителей, наиболее целесообразен следующий порядок работы над книгой. Вначале следует попытаться решить задачу самому. Если задача сразу не получилась, ее можно отложить и перейти к другой, но потом надо обязательно вернуться к отложенной задаче. На олимпиаде время для решения задач ограничено, а при работе с книгой к каждой задаче нужно относиться как к небольшой проблеме, над которой можно размышлять не торопясь, обдумывая ее со всех сторон. Если вопрос геометрический и чертежа нет, то его обязательно надо сделать самому — это поможет решить задачу. Если все-таки самостоятельно решить задачу не удалось, то нужно разобрать ее решение по книге и найти причину своей неудачи. Но ни в коем случае не следует обращаться к решению, не подумав вначале самому. Если решить задачу удалось, все равно полезно посмотреть приведенное в книге решение, хотя может случиться, что ваше решение проще и интереснее. Не будем забывать, однако, что решающие были связаны школьными программами разных лет, значительно отличающимися от современных.

В книге используются стандартные, принятые в те годы в школьном курсе обозначения, которые приведены для полноты в приложении.

В конце сборника приведен тематический путеводитель по задачам.

Благодарности

Хочется выразить искреннюю признательность и благодарность всем, кто помогал в создании этой книги. В подготовке первого издания особую помощь оказали: Н. Н. Андреев, В. А. Белоусов (1947–1997), А. В. Владимирова, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Израйлевич (1936–2009), И. М. Ильковская, А. Ю. Калинин, Г. С. Кондратьева, М. Г. Кулакова, С. Н. Купцов, Е. Е. Лапшева, Е. К. Поросятников, Л. Н. Сыркина, Д. А. Терёшин; а также О. Горбунов, А. Красков, Р. Милючихин, М. Подсумков — в то время учащиеся физико-технического лицея № 1 г. Саратова. Выход второго издания стал возможен благодаря помощи Д. Мухина и А. Флёрова, а также самоотверженной работе коллектива издательства Московского центра непрерывного математического образования.

К первому изданию задачи подготовлены:

за 1950–1960 гг. — А. Н. Андреевой, А. И. Барабановым;

за 1961–1970 гг. — А. Н. Андреевой;

за 1971–1988 гг. — А. Н. Андреевой, И. Я. Чернявским;

за 1989–1995 гг. — А. Н. Андреевой.

Исправления и переработка, сделанные ко второму изданию, выполнены А. Н. Андреевой.

А. Н. Андреева
Москва, 2013 *г.*

ЗАДАЧИ

1950/51

1 (I.9). Найти действительные корни системы уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^5+y^5=211. \end{cases}$$

2 (I.9). В круге радиуса единица имеется n точек, причем $n>1$. Доказать, что в этот круг можно поместить кружок радиуса $\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{n}$ так, чтобы он не задел ни одной точки.

3 (I.9). Доказать, что если $x+y+z>1$, то $x^2+y^2+z^2>\frac{1}{3}$.

4 (I.9). Доказать, что не существует равностороннего треугольника, вершины которого лежали бы в точках пересечения линий клетчатой бумаги (клетки квадратные).

5 (I.10). Делится ли 600! на 7^{99}?

6 (I.10). Куб с ребром 1 и шар радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ имеют общий центр. Найти объем той части куба, которая лежит внутри шара.

7 (I.10). Доказать тождество $C_n^p+C_{n-1}^p+\ldots+C_{n+p-1}^p=C_{n+p}^{p+1}-C_n^{p+1}$, $p\geqslant 1$.

8 (I.10). Имеется 17 чугунных чушек весом в $5, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 23, 24, 27, 29, 30, 33, 35$ кг. Было увезено некоторое количество чушек, затем вторично было увезено еще несколько чушек, в общем весивших втрое больше, чем было вывезено в первый раз. В третий раз было вывезено в пять раз больше[1], чем в первый раз. После этого осталась одна чушка. Сколько она весит?

1952/53

9 (I.9). Решить уравнение $\log_2\left(64\cdot\left(2^{x^2-9x}\right)^{1/4}\right)=1$.

10 (I.9). Доказать, что если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то радиус вписанного круга равен $\frac{1}{3}$ одной из высот.

[1]По весу. — *Прим. составителей.*

11 (I.9). Дан квадрат $ABCD$ со стороной, равной единице. Найти длину бесконечной ломаной $AA_1A_2A_3\ldots$, первое звено которой AA_1 есть перпендикуляр, опущенный из A на диагональ BD квадрата, второе звено A_1A_2 ломаной есть перпендикуляр, опущенный из A_1 на сторону AD квадрата, третье звено A_2A_3 ломаной есть перпендикуляр, опущенный из A_2 на звено AA_1 ломаной, четвертое звено A_3A_4 ломаной есть перпендикуляр, опущенный из A_3 на звено A_1A_2 ломаной, пятое звено A_4A_5 ломаной есть перпендикуляр, опущенный из A_4 на звено A_2A_3 ломаной, и т. д.

12 (I.9). Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если его диагональ AC равна 10, отрезок MN, соединяющий середины сторон AD и BC, равен 8, а отрезок PQ, соединяющий середины сторон AB и DC, равен 6.

13 (I.9). Решить уравнение

$$\sin^2(n+1)\alpha = \sin^2 n\alpha + \sin^2(n-1)\alpha,$$

где n — неизвестное целое число, α — неизвестный угол, если известно, что $(n+1)\alpha$, $n\alpha$ и $(n-1)\alpha$ являются углами треугольника.

14 (I.10). Пирамида, все боковые ребра которой наклонены к основанию под углом α, имеет в основании равнобедренный треугольник с углом β между равными сторонами. Определить двугранный угол при ребре, соединяющем вершину пирамиды с вершиной угла β.

15 (I.10). Доказать, что если $\alpha + \beta = c$, где c — постоянный угол, $0 < c < 90°$, и α, β положительны, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ имеет минимум при $\alpha = \beta$.

16 (I.10). Доказать, что треугольник ABC будет тупоугольным, прямоугольным или остроугольным в зависимости от того, будет ли $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$ больше, равно или меньше 1.

17 (I.10). Найти площадь трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если даны площади S_1 и S_2 треугольников AOD и BOC, где O — точка пересечения диагоналей трапеции.

18 (I.10). Найти трехзначное число, равное сумме факториалов своих цифр.

1953/54

19 (I.9). Доказать, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма в пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого равны разности соседних сторон параллелограмма.

20 (I.9). При перемножении двух чисел, из которых одно на 10 больше другого, ученик допустил ошибку, уменьшив цифру десятков в произведении на 4. При проверке ответа ученик разделил полученный им результат на меньший из сомножителей и получил в частном 39 и в остатке 22. Найти множители.

21 (I.9, 10). Доказать, что если в треугольнике две медианы перпендикулярны, то сумма квадратов двух его сторон в 5 раз больше квадрата третьей стороны.

22 (I.9). Доказать, что если a, b, c одновременно являются 5-м, 17-м, 37-м членами как арифметической, так и геометрической прогрессий, то $a^{b-c}\cdot b^{c-a}\cdot c^{a-b}=1$.

23 (I.9). Пусть A — некоторый произвольный угол, B и C — острые углы. Доказать, что всегда существует такой угол X, что

$$\sin X=\frac{\sin B\cdot\sin C}{1-\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C}.$$

24 (I.10). Дан правильный тетраэдр объема P. Одно из ребер плоскостью, перпендикулярной к нему, разделено на две части в отношении $1:4$. Вычислить объемы частей, на которые тетраэдр делится этой плоскостью.

25 (I.10). Доказать, что при любом x, при котором левая часть имеет смысл, справедливо неравенство

$$(1-\operatorname{tg}^2 x)(1-3\operatorname{tg}^2 x)(1+\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x)>0.$$

26 (I.10). Найти сумму всех несократимых дробей со знаменателем 5, заключенных между целыми числами a и b $(a<b)$.

27 (I.10). Доказать, что если $a+b+c=1$, то

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5.$$

28 (II.9). Найти $\operatorname{tg}x$, зная, что

$$a\sin x+b\cos x=(2a+b)\sin^2\frac{x}{2}+b\cos^2\frac{x}{2}.$$

29 (II.9). При каких значениях a оба корня квадратного уравнения $(1-a^2)x^2+2ax-1=0$ удовлетворяют неравенству $0<x<1$ $(a^2\neq 1)$?

30 (II.9). Каково должно быть расстояние между центрами двух окружностей радиусов r и R, для того чтобы внешняя касательная была вдвое больше внутренней?

31 (II.9). Длины последовательных сторон четырехугольника равны соответственно a, b, c, d. Доказать, что его площадь

$$S\leqslant\frac{1}{4}(a+c)(b+d).$$

32 (II.9, 10). Доказать, что $\log_n(n+1) < \log_{n-1} n$ при всех $n > 2$.

33 (II.10). Из точки к окружности проведены две касательные. Доказать, что отрезок, соединяющий середины проведенных касательных, не пересекает данной окружности.

34 (II.10). Решить уравнение $\sec x + \operatorname{cosec} x + \sec x \cdot \operatorname{cosec} x = a$.

35 (II.10). Куб пересекается плоскостью, проходящей через одну из его диагоналей. Как должна быть проведена эта плоскость, чтобы площадь сечения получилась наименьшей?

36 (II.10). Доказать тождество

$$1 - \frac{1}{2} \cdot C_n^1 + \frac{1}{3} \cdot C_n^2 - \frac{1}{4} \cdot C_n^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot C_n^n = \frac{1}{n+1}.$$

1954/55

37 (I.8). В параллелограмме проведены биссектрисы углов между диагоналями. Доказать, что точки пересечения биссектрис со сторонами параллелограмма являются вершинами ромба.

38 (I.8). Доказать, что если числа a, b, c таковы, что их сумма равна нулю, то сумма $ab + bc + ca$ будет числом отрицательным ($a \neq 0$).

39 (I.8, 9). Дана трапеция. Доказать, что отрезок, соединяющий середины ее диагоналей, равен полуразности оснований.

40 (I.8). Дано произвольное трехзначное число N, первая цифра которого больше последней. Доказать, что если цифры данного числа написать в обратном порядке и получившееся число N_1 вычесть из данного числа N, то, зная последнюю цифру разности $N - N_1$, можно найти саму разность.

41 (I.9). Найти сумму двузначных и трехзначных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

42 (I.9). Наклонная образует с плоскостью угол α. Через вершину этого угла в данной плоскости проведена вторая прямая под углом β к проекции наклонной на плоскость. Определить угол между этими прямыми.

43 (I.9). Доказать, что если $0 < a < b < c$, то для всех x, абсолютная величина которых не превышает a, справедливо неравенство

$$\sqrt{c-x} - \sqrt{c-a} \leqslant \sqrt{b-x} - \sqrt{b-a}.$$

44 (I.10). Дан треугольник ABC. Сторона AB продолжена до точки B_1, сторона BC продолжена до точки C_1, сторона CA продолжена до точки A_1 так, что

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{CA_1}{CA} = n.$$

При каком значении n площадь треугольника $A_1B_1C_1$ будет в 7 раз больше площади данного треугольника ABC?

45 (I.10). Дан правильный тетраэдр $SABC$. Через середины ребер AB и AC проведена плоскость параллельно ребру AS. Доказать, что часть построенной плоскости, заключенная внутри тетраэдра, есть квадрат.

46 (I.10). Доказать, что $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

47 (I.10). Доказать, что при любом целом n число $2^{3n}-7n-1$ делится на 49.

48 (I.10). Доказать, что при всех n и p справедливо неравенство $C_{n+p}^{p}\leqslant(p+1)^n$.

49 (II.8). Пароход идет от Горького[1] до Астрахани 5 суток, а от Астрахани до Горького 7 суток. Сколько суток проплывет плот от Горького до Астрахани?

50 (II.8, 9). В окружности проведена хорда AB. Доказать, что перпендикуляр, опущенный на хорду AB из произвольной точки M окружности, есть среднее пропорциональное между перпендикулярами, опущенными из концов хорды AB на касательную к окружности в точке M.

51 (II.8). Решить уравнение $9x^4+2+\sqrt{4-3x^2}=12x^2$.

52 (II.8). Разделить отрезок пополам с помощью одного угольника (рис. 1.1). Угольником можно восстанавливать перпендикуляры к прямой, опускать перпендикуляры нельзя.

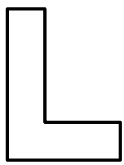

Рис. 1.1

53 (II.9). Пловец прыгает с плота и плывет против течения 10 минут, после чего он поворачивает и плывет по течению и настигает плот, когда тот проплыл 1 км. Определить скорость течения воды.

54 (II.9, 10). Доказать, что число $43^{43}-17^{17}$ делится на 10.

55 (II.9). Доказать, что если углы треугольника связаны соотношением

$$\sin\alpha=4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

то он равнобедренный.

56 (II.9). При каком значении a корни уравнения

$$x^4-(3a+2)x^2+a^2=0$$

образуют арифметическую прогрессию?

57 (II.10). Найти кратчайшее расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба. Длина ребра куба равна a.

[1]Нижний Новгород. — *Прим. составителей.*

58 (II.10). Дан острый угол α и два отрезка длины a и b. Построить два таких угла x и y, чтобы сумма их равнялась α и чтобы

$$a\cos x = b\sin y.$$

59 (II.10). Доказать, что функция $y=\cos 2x+3\sin x$ при изменении аргумента от 0 до 2π принимает все значения, заключенные между -4 и $\frac{17}{8}$.

60 (II.10). Доказать, что при всех n

$$C_n^1-\frac{1}{2}\cdot C_n^2+\frac{1}{3}\cdot C_n^3-\frac{1}{4}\cdot C_n^4+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot C_n^n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

1956/57

61 (I.8). Если диагонали четырехугольника пересекаются в центре вписанной окружности, то этот четырехугольник — ромб.

62 (I.8). В будущем году возраст школьника совпадет с суммой цифр его года рождения. Сколько лет школьнику теперь?

63 (I.8). Даны уравнения

$$\begin{cases} x^2-15x+2k=0,\\ x^2-2x+k=0.\end{cases}$$

Определить k так, чтобы один из корней второго уравнения был в два раза больше одного из корней первого уравнения.

64 (I.8, 9). Построить треугольник по основанию, сумме боковых сторон и углу при вершине.

65 (I.9). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y+z)(ax+y+z)=k^2,\\ (x+y+z)(x+ay+z)=l^2,\\ (x+y+z)(x+y+az)=m^2.\end{cases}$$

66 (I.9). Доказать, что при любом $n>4$ выражение n^2-3n не может быть точным квадратом.

67 (I.9, 10). Доказать, что при любых $a>0$, $b>0$ и $c>0$ имеет место неравенство

$$(a+b)^2\leqslant(1+c)a^2+\left(1+\frac{1}{c}\right)b^2.$$

68 (I.10). Тангенсы углов треугольника относятся как $1:2:3$. Найти отношения противолежащих сторон.

69 (I.10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481, \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$$

70 (I.10). В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно b и плоский угол при вершине равен α. Определить часть поверхности пирамиды, заключенную внутри шара, для которого высота пирамиды служит диаметром.

71 (I.10). Доказать, что в остроугольном треугольнике точка пересечения высот лежит ближе к наименьшей из сторон.

72 (I.10). Показать, что если a, b и c — рациональные числа и

$$a + b \cdot \sqrt[3]{2} + c \cdot \sqrt[3]{4} = 0,$$

то $a = b = c = 0$.

73 (II.8). Решить уравнение $(x^2 - 2x - 1)^2 + 3x^2 - 6x - 13 = 0$.

74 (II.8). Вокруг треугольника описана окружность. Доказать, что угол между высотой треугольника и его боковой стороной равен углу между радиусом, проведенным в ту же вершину, из которой опущена высота, и другой боковой стороной.

75 (II.8). Показать, что при любом нечетном n выражение $\dfrac{n^3 - n}{24}$ является целым числом.

76 (II.8). Вершины A, B, C треугольника ABC соединены с точками M, D, P, расположенными на противоположных сторонах треугольника. Доказать, что середины отрезков AM, BD и CP не лежат на одной прямой.

77 (II.9). Решить уравнение

$$\sqrt{x + 5 - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}} = 1.$$

78 (II.9). Доказать, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол на три равные части, то этот треугольник прямоугольный.

79 (II.9, 10). Найти число, зная, что его шестая степень записывается только с помощью цифр $0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9$.

80 (II.9). Доказать, что в остроугольном треугольнике с углами α, β и γ имеет место неравенство

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot (\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\beta \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\gamma) + \operatorname{tg}\gamma \cdot (\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) \geqslant 6.$$

81 (II.9). Построить четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

82 (II.10). Решить уравнение $(x + 4)(x + 5)(x + 7)(x + 8) = 4$.

83 (II.10). Доказать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

если n — целое число, большее 1.

84 (II.10). Доказать, что если сумма расстояний между серединами противоположных сторон четырехугольника равна его полупериметру, то четырехугольник — параллелограмм.

85 (II.10). Даны три точки A, B, C. Известны расстояния $AB = BC = a$ и $\angle ABC = \gamma$. Наблюдатель находится в точке D (D лежит в плоскости треугольника ABC) и видит сторону AB под углом α, а сторону BC под углом β. Определить углы BAD и BCD.

1957/58

86 (I.8). Определить отношение двух чисел, если отношение их среднего арифметического к их среднему геометрическому равно $\frac{13}{12}$.

87 (I.8). Доказать, что в треугольнике, у которого разность углов при основании равна 90°, биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине равны между собой.

88 (I.8). Пусть ABC — треугольник, O — центр вписанного в него круга. Доказать, что центр окружности, проходящей через точки A, O, C, лежит на биссектрисе угла B.

89 (I.8, 9). Дано уравнение

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0.$$

Доказать, что если a, b, c — вещественные числа, то корни этого уравнения вещественны.

90 (I.9). Найти два целых числа, произведение которых — трехзначное число — является кубом целого положительного числа, а частное — квадратом этого же числа.

91 (I.9). В прямоугольном треугольнике с углом 15° найти катеты, если гипотенуза равна a. (Катеты должны быть выражены только через a.)

92 (I.9). Построить треугольник по двум углам и расстояниям от произвольной точки плоскости до сторон треугольника.

93 (I.9). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}(x+y) = \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

94 (I.10). Известно, что четырехзначное число $\overline{aabb}$ является точным квадратом (a, b — цифры). Найти это число.

95 (I.10). Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна a, а плоские углы при вершине равны углам наклона боковых ребер к плоскости основания.

96 (I.10). Решить неравенство $\sqrt{x+2}+\sqrt{2x+3}<\sqrt{x+5}$.

97 (I.10). На плоскости проведено n прямых. Доказать, что куски, на которые разбивается плоскость, можно закрасить двумя красками так, что соседние (т. е. имеющие какую-нибудь часть прямой в качестве общей границы) будут разного цвета.

98 (I.10). Построить треугольник ABC, зная радиус описанного круга, биссектрису l угла A и разность углов при основании $\angle B - \angle C = \delta$.

99 (II.8). Сумма цифр трехзначного числа равна 11. Сумма квадратов цифр этого числа равна 45. Если из данного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится 198. Найти это число.

100 (II.8). Дано: $x+y+z=a$. Доказать, что

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{a}{3}.$$

101 (II.8). Равносторонний треугольник ABC вписан в круг. На той части дуги BC, которая не содержит точки A, взята произвольная точка M. Показать, что $AM = BM + CM$.

102 (II.8). Доказать, что прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основание трапеции пополам.

103 (II.9). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = a, \\ x + y = 2b. \end{cases}$$

104 (II.9). Найти x из уравнения

$$(2+\sqrt{3})^{x/2} + (2-\sqrt{3})^{x/2} = 4.$$

105 (II.9). В равнобедренном треугольнике ABC $AB = BC = b$, $AC = a$, $\angle ABC = 20^\circ$. Доказать, что $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

106 (II.9). Доказать, что если между цифрами числа 1331 вставить по равному количеству нулей, то получится точный куб.

107 (II.9, 10). Дан равносторонний треугольник. Из произвольной точки O, взятой внутри него, опущены перпендикуляры на стороны. Найти геометрическое место точек O, для которых из отрезков этих перпендикуляров можно построить треугольник.

108 (II.10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{a} = \dfrac{\operatorname{tg} y}{b} = \dfrac{\operatorname{tg} z}{c}, \\ x + y + z = \pi. \end{cases}$$

109 (II.10). Доказать, что из пяти последовательных целых положительных чисел всегда можно выбрать одно взаимно простое со всеми остальными.

110 (II.10). Разрезать куб на три равные пирамиды.

111 (II.10). Доказать, что если $\dfrac{m}{n} < 2^{1/3}$, то

$$\frac{m^2 + mn + 2n^2}{m^2 + mn + n^2} > 2^{1/3} \quad \text{и} \quad 2^{1/3} - \frac{m}{n} > \frac{m^2 + mn + 2n^2}{m^2 + mn + n^2} - 2^{1/3}.$$

1959/60

112 (I.9). Пусть α и β — корни квадратного уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Не решая уравнения, вычислить сумму $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$.

113 (I.9). Из круга радиуса R вырезать прямоугольник наибольшей возможной площади. Найти его стороны.

114 (I.9). Решить уравнение $2^{x+1} + 4^x = 80$.

115 (I.9). Определить a и b так, чтобы многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + ax + b$ был полным квадратом.

116 (I.9). Пусть точки O и O_1 — середины двух пересекающихся отрезков AB и A_1B_1. Доказать, что отрезок OO_1 меньше полусуммы отрезков AA_1 и BB_1, но больше их полуразности.

117 (I.10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 = ax + by, \\ y^3 = bx + ay. \end{cases}$$

118 (I.10). Найти p, зная, что p и $8p^2 + 1$ — простые числа.

119 (I.10). Даны прямой круговой конус и точка O. Найти геометрическое место вершин конусов, равных данному, с осями, параллельными оси данного конуса, и содержащих внутри данную точку O.

120 (I.10). Доказать, что из равенства

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma = 1$$

следует одно из четырех равенств $\alpha \pm \beta \pm \gamma = (2k+1)\pi$, где k — целое число.

81 (I.10). Задача приведена на с. 17.

121 (II.9). В прямоугольнике со сторонами a и b проведена диагональ, и в каждый из образовавшихся треугольников вписано по окружности. Найти расстояние между точками касания, лежащими на диагонали.

122 (II.9). Найти сумму $S = 3 + 33 + 333 + \ldots + \underbrace{33\ldots3}_{n \text{ раз}}$.

123 (II.9). Доказать, что положительный корень уравнения $x^5 + x = 10$ не может быть рациональным.

124 (II.9). Несколько натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию, начинающуюся с четного числа. Сумма нечетных чисел равна 33, а сумма четных чисел равна 44. Найти a_1, a_n, n.

125 (II.9). На плоскости даны три точки, расположенные произвольно. Указать круг наименьшего радиуса, вне которого нет ни одной из этих точек.

126 (II.10). Доказать, что если модуль комплексного числа $a + b\mathrm{i}$ $(a + b\mathrm{i} \neq 1)$ равен 1, то его можно представить в виде $\dfrac{c+\mathrm{i}}{c-\mathrm{i}}$, где c — вещественное число.

127 (II.10). Доказать, что центры четырех окружностей, каждая из которых касается трех сторон четырехугольника, лежат на одной окружности.

128 (II.10). Найти сумму $C_n^0 + aC_n^2 + a^2C_n^4 + a^3C_n^6 + \ldots$, где a — произвольное число.

129 (II.10). Можно ли ряд натуральных чисел разбить на две части так, чтобы ни одна из частей не содержала никакой бесконечной арифметической прогрессии?

130 (II.10). Можно ли доску размером 10×10 покрыть без наложения прямоугольниками 4×1?

1960/61

131 (II.7, 8). Колхоз снял сено с двух лугов; $48\frac{4}{7}$ % всего сена уложили на сеновал, а остальное сено было сложено в 3 стога, причем между стогами сено было распределено в отношении, обратно пропорциональном числам $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$. Сколько тонн сена было в каждом из стогов, если с первого луга сняли 49 т, что составляет $46\frac{2}{3}$ % всего сена? (Решить арифметически.)

132 (II.7, 8). Упростить выражение

$$\frac{2a^2(b+c)^{2n} - 1/2}{an^2 - a^3 - 2a^2 - a} : \frac{2a(b+c)^n - 1}{a^2c - a(nc - c)}.$$

133 (II.7, 8). Сколькими нулями оканчивается число, равное произведению $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 100$?

134 (II.7, 8, 9). Двое вышли одновременно из M и N навстречу друг другу. Они встретились в 50 м от N, а затем, дойдя до M и N, не останавливаясь, пошли обратно и вновь встретились в 25 м от M. Найти расстояние MN.

135 (II.8, 9). Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и медиане, проведенной к одному из катетов.

136 (II.9). Доказать, что $n^7 - n$ делится на 7 при любом натуральном n.

137 (II.9). Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

138 (II.9). Доказать тождество

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_2}+\frac{1}{a_na_1}= \\ =\frac{2}{a_1+a_n}\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}\right),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — члены арифметической прогрессии.

139 (II.10). Решить уравнение $(4+\sqrt{15})^{x/2}+(4-\sqrt{15})^{x/2}=8$.

140 (II.10). Через точку P пересечения двух окружностей проведены две прямые, пересекающие первую окружность в точках A и B, вторую в точках C и D. Через точки A, B, C и D проведены две прямые, пересекающиеся в точке M. Найти траекторию движения точки M при вращении одной из данных прямых вокруг точки P.

141 (II.10). В остроугольном треугольнике со сторонами a, b, c проведены высоты AD, BE и CH. Найти площадь треугольника DEH.

142 (III.7). Имеется лом стали двух сортов с содержанием никеля 5 % и 40 %. Сколько нужно взять каждого из этих сортов, чтобы получить 140 тонн стали с содержанием никеля 30 %?

143 (III.7). Доказать, что выражение $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 1$ есть сумма трех квадратов.

144 (III.7). Доказать, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, ее заключающих, и больше разности между этой полусуммой и половиной третьей стороны.

145 (III.7). В школе учится 1000 учеников. Доказать, что хотя бы у двух из них совпадают первая и последняя буквы фамилий.

146 (III.8). Разность двух чисел равна 48. Разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел равна 18. Найти эти числа.

147 (III.8). От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, весящих m и n килограммов, отрезано по куску равного веса. Каждый из отрезанных кусков был сплавлен с остатком другого, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

148 (III.8). По трем медианам m_a, m_b, m_c треугольника ABC вычислить его стороны a, b, c.

149 (III.8). Решить в целых числах уравнение $\frac{7}{x} + \frac{15}{y} = 5$.

150 (III.8). Дана окружность и вне ее точка O. Через точку O провести секущую так, чтобы она окружностью делилась пополам.

151 (III.9). Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых составляют арифметическую прогрессию.

152 (III.9). Доказать, что если корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ вещественные, то корни уравнения $x^2 + px + q + (x + a)(2x + p) = 0$ также вещественные при любом вещественном a.

153 (III.9). На какое целое число надо умножить 999, чтобы получилось число, состоящее из одних единиц?

154 (III.9). Доказать, что если площади двух прямоугольных треугольников относятся как квадраты гипотенуз, то треугольники подобны.

155 (III.9). Решить в целых положительных числах уравнение

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{x} = 1.$$

156 (III.10). Вычислить без таблиц

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ.$$

157 (III.10). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2y + x)(4y^2 - x^2) = 75, \\ (2y - x)(4y^2 + x^2) = 51. \end{cases}$$

158 (III.10). Сколькими способами можно раскрасить грани куба в 6 различных цветов? (Различными окрасками считаются такие окраски, которые не совмещаются при движении.)

159 (III.10). Найти сумму всех цифр, участвующих в записи чисел от 1 до 10 000.

160 (III.10). По окружности радиуса $2R$ катится внутри окружность радиуса R. Какое геометрическое место описывает точка M, лежащая на малой окружности, если качение происходит без скольжения?

1961/62

161 (III.8). Между станцией и поселком 4 км. Мальчик и автомобиль одновременно отправились со станции в поселок. Через 10 мин мальчик встретил автомобиль возвращающимся из поселка, а еще через $\frac{1}{14}$ км от места встречи автомобиль, который доехал до станции и опять направился в поселок, догнал мальчика. Найти скорости мальчика и автомобиля, если известно, что они двигались равномерно и без задержек.

162 (III.8). Каждая из трех вершин треугольника соединена прямыми с n точками, расположенными на противоположной стороне треугольника. На сколько частей делят эти прямые треугольник, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

163 (III.8). Доказать, что $p^q + q^p$ делится на $p+q$, если p и q — простые числа и $q-p=2$.

164 (III.8). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3, \\ x^3y+xy^3=-10. \end{cases}$$

165 (III.8, 9). Дана окружность и на ней три точки, в которых пересекаются с окружностью (при продолжении) соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из одной вершины вписанного треугольника. Построить этот треугольник.

166 (III.9). На плоскости даны точки A, B, C, D, из которых никакие три не лежат на одной прямой, причем $AB=CD$ и $AC=BD$. Доказать, что если отрезки AC и BD пересекаются, то отрезки AD и BC параллельны.

167 (III.9). Найти все целые положительные решения уравнения

$$(n+2)!-(n+1)!-n!=n^2+n^4.$$

168 (III.9). Доказать, что во всякой арифметической прогрессии, разность которой отлична от нуля, произведение двух членов, равноотстоящих от крайних членов, возрастает по мере удаления от концов к середине.

169 (III.9). Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=8, \\ x^2+y^2+z^2=22, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{z}{xy}. \end{cases}$$

170 (III.10). Доказать неравенство $n\sin\alpha > \sin(n\alpha)$, если $0 < n\alpha < \frac{\pi}{2}$, n — целое число, $n > 1$.

171 (III.10). Какой из всех равновеликих треугольников с данным основанием имеет наименьшую величину произведения боковых сторон?

172 (III.10). Найти все целые решения уравнения

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n! = k^2.$$

173 (III.10). Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - 7x + 1 = 0$. Доказать, что при любом натуральном n число $x_1^n + x_2^n$ четное, если n делится на 3, и нечетное, если n не делится на 3.

174 (III.10). На шахматной доске 8×8 расставлено наибольшее возможное число слонов так, что никакие два слона не угрожают друг другу. Доказать, что число всех таких расстановок есть точный квадрат.

175 (III.11). Доказать, что при любом натуральном n сумма n-х степеней корней квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, где p, q — целые числа, есть целое число.

176 (III.11). Доказать, что если функция $\cos x + \cos ax$ периодическая, то a — рациональное число.

177 (III.11). Доказать, что любой выпуклый четырехгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

178 (III.11). Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа. Доказать, что можно выбрать из них одно или несколько чисел так, чтобы их сумма делилась на n.

125 (III.11). Задача приведена на с. 21.

1962/63

179 (II.8). Доказать, что если $(a + b + c)c < 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет вещественные корни.

180 (II.8). Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

181 (II.8). Доказать, что среди n точек ($n > 6$), лежащих на окружности, имеется такая пара точек, расстояние между которыми меньше радиуса.

182 (II.8). В параллелограмме $ABCD$ на середине стороны AD взята точка M. Обозначим через P точку пересечения отрезка BM с диагональю AC. Во сколько раз площадь треугольника APM меньше площади параллелограмма?