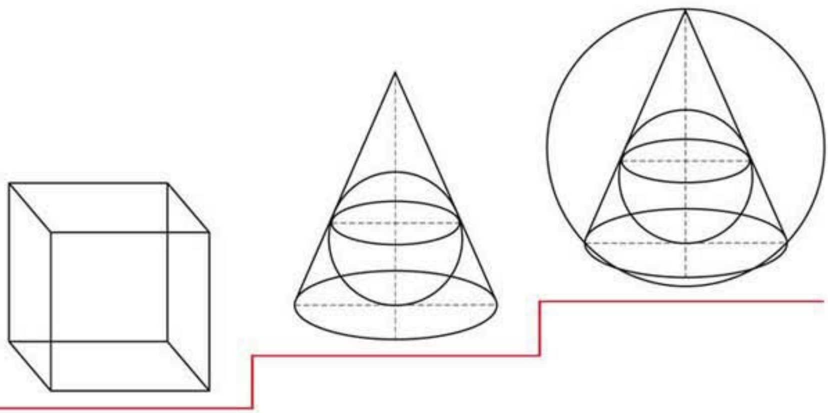
А. А. Черняк, Ж. А. Черняк

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ГЕОМЕТРИЯ

Практическая подготовка



- Три уровня сложности: необходимый, достаточный, повышенный
- Систематизированные методы решения однотипных задач
- Задачи с иллюстрированными решениями
- Методические советы, комментарии, ответы

bhv®

УДК 373:514
ББК 22.15я72
Ч-49

Черняк, А. А.

Ч-49 ЕГЭ по математике. Геометрия. Практическая подготовка / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. — СПб.: БХВ-Петербург, 2015. — 336 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3608-0

В книге систематизированы подходы и методы решения однотипных задач по геометрии, обилие и разнообразие которых при обучении обычно затрудняет подготовку к ЕГЭ. Материал разбит на три уровня сложности: необходимый (простейшие геометрические задачи ЕГЭ базового уровня), достаточный (позволяет решать большинство задач профильного уровня ЕГЭ), повышенный (рассчитан на получение высокого балла профильного ЕГЭ). В разделах необходимого уровня все задачи снабжены иллюстрированными решениями. В разделах достаточного и повышенного уровней задачи разбиты на однотипные группы, каждая из которых предваряется методическими советами и комментариями, общими алгоритмами и подходами, подсказывающими единые эффективные приемы решения. Во всех разделах даны задачи для самостоятельной проработки с ответами (более 600 задач).

Книга предназначена учащимся с любым начальным уровнем подготовки. Будет полезна учителям и репетиторам. Ее можно использовать: для самостоятельной подготовки к базовому и профильному уровням ЕГЭ, на уроках, факультативных занятиях, подготовительных курсах.

Для образовательных учреждений

УДК 373:514
ББК 22.15я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Марины Дамбиевой*

Подписано в печать 31.03.15.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3608-0

Оглавление

Предисловие **5**

Используемые обозначения **6**

ЧАСТЬ I. ПЛАНИМЕТРИЯ **7**

ГЛАВА 1. Необходимый уровень **7**

§ 1.1. Формулы, свойства, теоремы и задачи с подсказками 7
§ 1.2. Задачи для самостоятельного решения 74

ГЛАВА 2. Достаточный уровень **83**

§ 2.1. Методы, алгоритмы, приемы и демонстрационные задачи 83
§ 2.2. Задачи для самостоятельного решения 120

ГЛАВА 3. Повышенный уровень **141**

§ 3.1. Методы, алгоритмы, приемы и демонстрационные задачи 141
§ 3.2. Задачи для самостоятельного решения 175

ЧАСТЬ II. СТЕРЕОМЕТРИЯ **184**

ГЛАВА 4. Необходимый уровень **184**

§ 4.1. Формулы, свойства, теоремы и задачи с подсказками 184
§ 4.2. Задачи для самостоятельного решения 206

ГЛАВА 5. Достаточный уровень **214**

§ 5.1. Формулы, свойства, теоремы и задачи с подсказками 214
§ 5.2. Методы, алгоритмы, приемы, трюки
и демонстрационные задачи 236
§ 5.3. Задачи для самостоятельного решения 268

ГЛАВА 6. Повышенный уровень 282

§ 6.1. Методы, алгоритмы, приемы, трюки
и демонстрационные задачи..282
§ 6.2. Задачи для самостоятельного решения..323

Ответы к задачам для самостоятельного решения 331

К § 1.2 331
К § 2.2 331
К § 3.2 333
К § 4.2 334
К § 5.3 334
К § 6.2 336

❋ Часть I. ПЛАНИМЕТРИЯ ❋

ГЛАВА 1. Необходимый уровень

§ 1.1. Формулы, свойства, теоремы и задачи с подсказками

Решите задачи **1–125**. По мере продвижения вперед, вам будут встречаться теоретические блоки. Прочитайте теоретический блок и заучите его наизусть, прежде чем перейти к решению следующих за ним задач.

Если решение какой-то задачи не найдено, посмотрите иллюстрированное решение-ответ на рисунке.

Два треугольника равны, если они имеют равные:

- соответствующие стороны (рис. 1.1, *а*);
- две стороны и угол между ними (рис. 1.1, *б*);
- сторону и два прилежащих к ней угла (рис. 1.1, *в*).

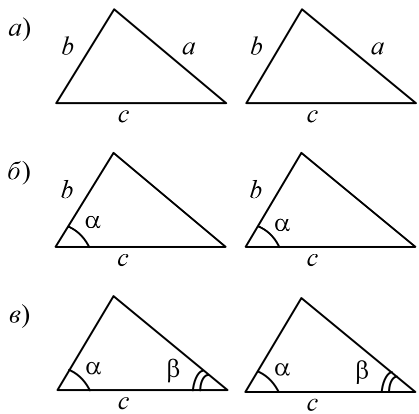


Рис. 1.1

1. В четырехугольнике $ABCD$ $AD = BC$, $\angle ADC = \angle BCD$. По какому признаку равны $\triangle DAC$ и $\triangle BCD$?

Ответ: рис. 1.2.

2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle CBD = \angle ADB$. По какому признаку равны $\triangle ADB$ и $\triangle BCD$?

Ответ: рис. 1.3.

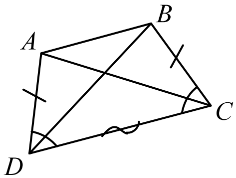


Рис. 1.2

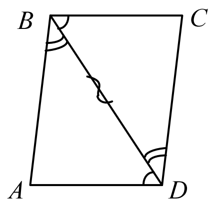


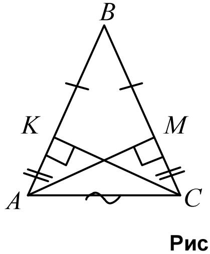
Рис. 1.3

Два прямоугольных треугольника равны, если:

- катеты одного равны соответственно катетам другого;
- гипотенуза и катет одного равны гипотенузе и катету другого;
- острый угол и гипотенуза одного равны острому углу и гипотенузе другого;
- острый угол и катет одного равны острому углу и катету другого.

3. В $\triangle ABC$ проведены высоты AM и CK, $AK = CM$. По какому признаку равны $\triangle ABM$ и $\triangle CBK$?

Ответ: рис. 1.4.



$\triangle AKC = \triangle CMA \Rightarrow$

$CK = AM$

Рис. 1.4

Отрезок короче любой ломанной, соединяющей его концы. В частности, в треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон.

4. В равнобедренном треугольнике длины двух сторон равны 25 и 55. Найти периметр этого треугольника.

Ответ: рис. 1.5 (отрезок короче любой ломанной, соединяющей его концы).

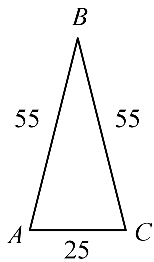


Рис. 1.5

Окружностью называется множество точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки этой плоскости, называемой центром окружности.

5. Две окружности радиусов 14 и 54 пересекаются в двух точках. Какому из чисел 56, 68, 74 может равняться расстояние между их центрами?

Ответ: рис. 1.6.

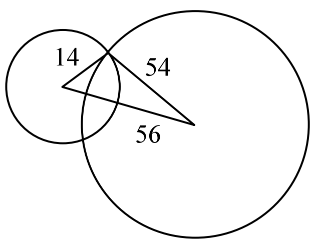


Рис. 1.6

Соотношения между углами и сторонами прямоугольного треугольника (рис. 1.7):

$$\sin\beta = \frac{b}{c},\ \ \cos\beta = \frac{a}{c},\ \ \mathrm{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \ \mathrm{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

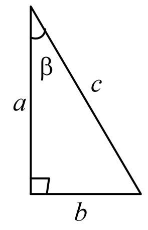


Рис. 1.7

6. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 5, один из катетов равен 4. Найти синус, косинус и тангенс угла, образованного этим катетом и гипотенузой.

Ответ: рис. 1.8 (соотношение между углами и сторонами в прямоугольном треугольнике).

7. В прямоугольном $\triangle ABC$ из вершины B прямого угла проведена высота BP, причем катет AB равен 5, угол A равен α. Найти PC.

Ответ: рис. 1.9 (соотношение между углами и сторонами в прямоугольном треугольнике).

$\sin\alpha = 0{,}6;$

$\cos\alpha = 0{,}8;$

$\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}75$

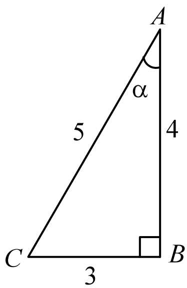


Рис. 1.8

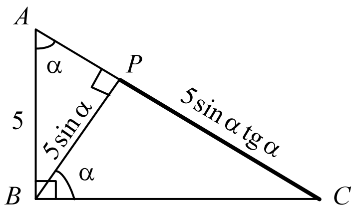


Рис. 1.9

В равнобедренном треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные к основанию, совпадают (рис. 1.10).

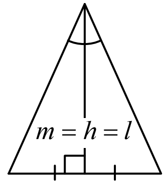


Рис. 1.10

8. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 2α, длина боковой стороны равна b. Найти высоту треугольника.

Ответ: рис. 1.11 (соотношение сторон и углов в прямоугольном треугольнике).

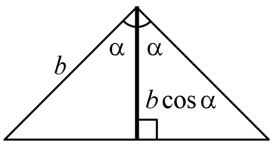


Рис. 1.11

Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной в этот треугольник окружности (рис. 1.12).

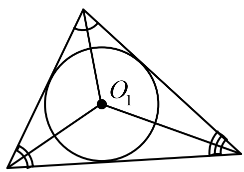


Рис. 1.12

9. Найти основание равнобедренного треугольника, у которого радиус вписанной окружности равен 2, а половина угла при основании равна α.

Ответ: рис. 1.13.

10. В $\triangle ABC$ вписана окружность радиуса 1, касающаяся AC в точке D, причем $AD = \sqrt{3}$. Найти угол A.

Ответ: рис. 1.14.

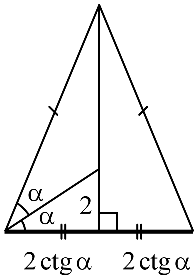


Рис. 1.13

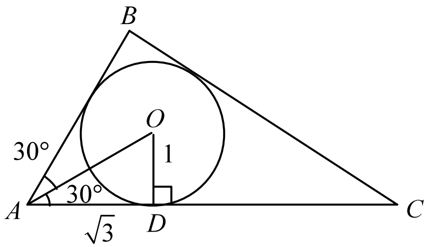


Рис. 1.14

Сумма внутренних углов треугольника равна $180°$.

11. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $25°$. Чему равен угол при вершине треугольника?

Ответ: рис. 1.15 (сумма углов в треугольнике).

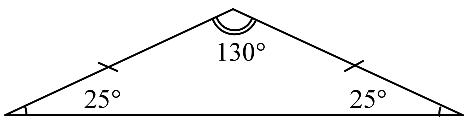


Рис. 1.15

Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$.

12. В прямоугольном $\triangle ABC$ из вершины B прямого угла проведена высота BP. Чему равен угол PBC, если угол A равен $13°$?

Ответ: рис. 1.16 (сумма острых углов в прямоугольном треугольнике).

В равнобедренном прямоугольном треугольнике острые углы равны $45°$.

13. В равнобедренном прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, равна $3\sqrt{2}$. Чему равны катеты?

Ответ: рис. 1.17 (соотношение между углами и сторонами прямоугольного треугольника).

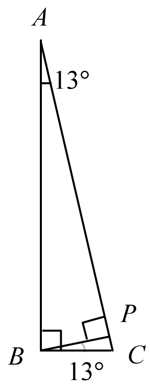


Рис. 1.16

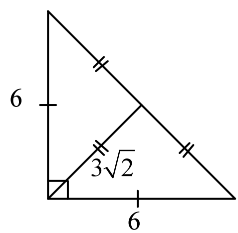


Рис. 1.17

Средняя линия треугольника — это отрезок, соединяющий середины боковых сторон (рис. 1.18). Средняя линия параллельна основанию и равна половине основания.

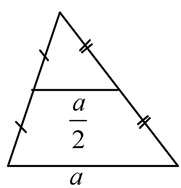


Рис. 1.18

14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$, не являющимся параллелограммом, $BC = AD = 4$. Середины M и N сторон AB и CD соединены с серединами P и Q диагоналей. Чему равны стороны четырехугольника $MPNQ$?

Ответ: рис. 1.19 (средняя линия).

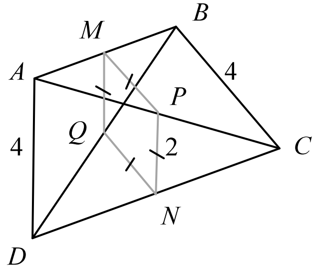


Рис. 1.19

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине его гипотенузы (рис. 1.20), при этом радиус описанной окружности R равен медиане m_c, проведенной к гипотенузе:

$$R = m_c = \frac{c}{2},$$

где c — гипотенуза.

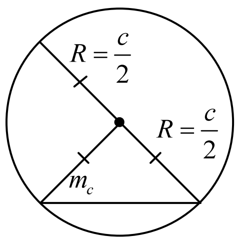


Рис. 1.20

15. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10. Чему равна медиана, проведенная к гипотенузе?

Ответ: рис. 1.21 (медиана прямоугольного треугольника).

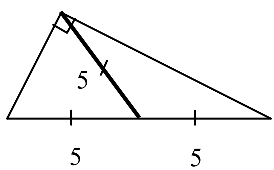


Рис. 1.21

16. В прямоугольном треугольнике острый угол равен 20°. Найти углы, которые образует с катетами медиана, проведенная из вершины прямого угла.

Ответ: рис. 1.22 (медиана прямоугольного треугольника).

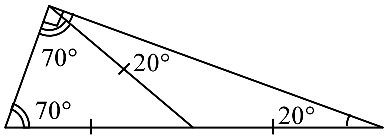


Рис. 1.22

Против большей (меньшей) стороны в треугольнике лежит больший (меньший) угол.

Теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов $c^2 = a^2 + b^2$. Верно и обратное: если в треугольнике квадрат одной из сторон c равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный с гипотенузой c.

17. Стороны треугольника равны 6, 8 и 10. Найти наибольший угол этого треугольника.

Ответ: рис. 1.23 (теорема Пифагора).

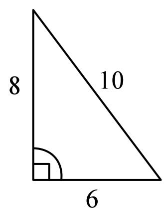


Рис. 1.23

В прямоугольном $\triangle ABC$ с прямым углом C высота

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{xy},$$

где c — гипотенуза, x, y — длины отрезков, на которые гипотенуза делится высотой, проведенной из вершины прямого угла.

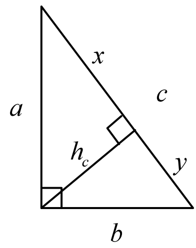


Рис. 1.24

18. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, равна 4. Она делит гипотенузу на отрезки, один из которых равен 2. Чему равен второй отрезок?

Ответ: рис. 1.25 (высота в прямоугольном треугольнике).

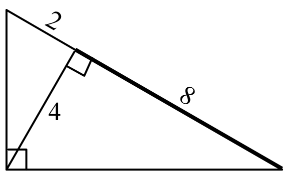


Рис. 1.25

В прямоугольном $\triangle ABC$ (рис. 1.26) с гипотенузой c и катетами a, b радиус r вписанной окружности равен

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

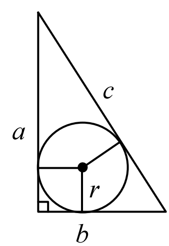


Рис. 1.26

19. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 4, а сумма катетов треугольника равна 30. Найти гипотенузу.

Ответ: рис. 1.27 (радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник).

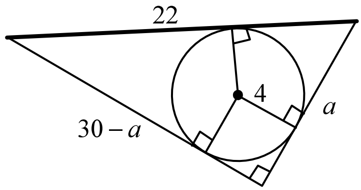


Рис. 1.27

Многоугольник называется *выпуклым*, если никакая его сторона, будучи неограниченно продолженной, не разрезает его на две части. Правильный треугольник называют *равносторонним треугольником*, а правильный четырехугольник — *квадратом*.

В равностороннем треугольнике (рис. 1.28) со стороной a высота h_a, медиана m_a и биссектриса l_a равны $h_a = m_a = l_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, радиус R описанной окружности равен $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, радиус r вписанной окружности равен $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, его площадь равна $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

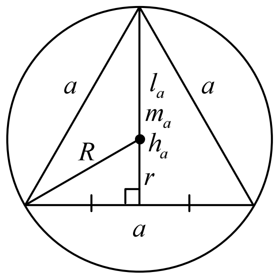
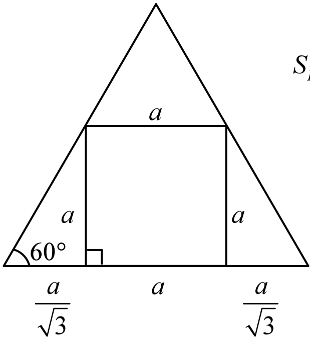


Рис. 1.28

20. В равносторонний треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон лежит на основании треугольника. Найти площадь треугольника, если сторона квадрата равна $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[4]{3}$.

Ответ: рис. 1.29.



$$S_D = \left(\frac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,25$$

Рис. 1.29

21. Из точки A окружности радиуса 8 проведены две равные хорды AB и AC, образующие угол $60°$. Найти расстояние от центра окружности до хорды BC.

Ответ: рис. 1.30.

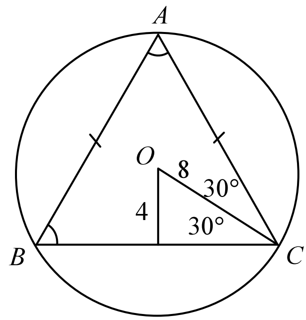


Рис. 1.30

Формулы вычисления биссектрис (рис. 1.31):

- $l_a = \dfrac{2bc \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2}}{b+c}$;
- если a_1, a_2 — длины отрезков, на которые биссектриса угла A делит BC, то $l_a = \sqrt{bc - a_1 a_2}$.

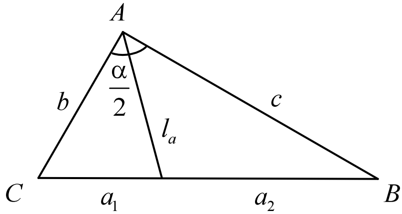


Рис. 1.31

22. Найти биссектрису прямоугольного треугольника с катетами 4 и 12, проведенную к гипотенузе.

Ответ: рис. 1.32.

23. Найти биссектрису прямоугольного треугольника с катетами 12 и 4, которая делит гипотенузу на отрезки длины $\sqrt{90}$ и $\sqrt{10}$.

Ответ: рис. 1.33.

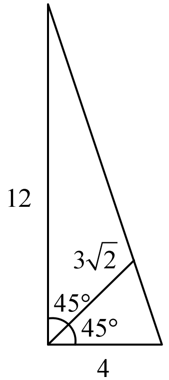


Рис. 1.32

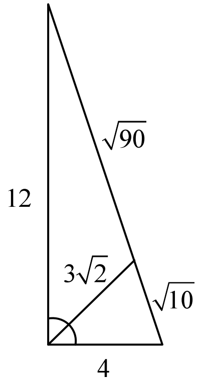


Рис. 1.33

Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности, a, b, c — его длины сторон, $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$ (рис. 1.34).

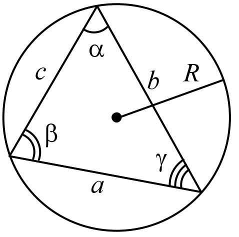


Рис. 1.34

24. Угол треугольника равен $120°$, а радиус описанной около него окружности $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Чему равна сторона этого треугольника, лежащая против угла в $120°$?

Ответ: рис. 1.35.

25. В $\triangle ABC$ $AB = 12$, $BC = 4$, синус угла, лежащего против стороны AB, равен 0,9. Найти синус угла, лежащего против стороны BC.

Ответ: рис. 1.36 (теорема синусов).

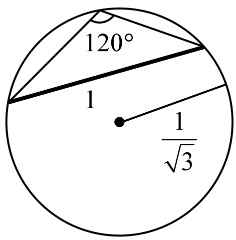


Рис. 1.35

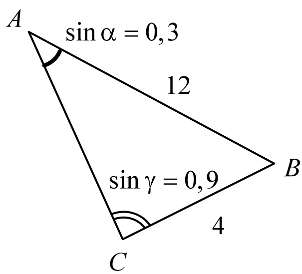
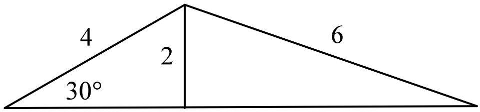


Рис. 1.36

26. В треугольнике две стороны равны соответственно 4 и 6, а высота, опущенная на третью сторону, равна 2. Найти радиус описанной около треугольника окружности.

Ответ: рис. 1.37.



$$R = \frac{6}{2\sin 30°} = 6$$

Рис. 1.37

Теорема косинусов (рис. 1.38):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma.$$

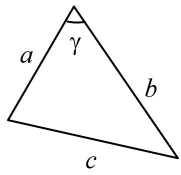


Рис. 1.38

27. В $\triangle ABC$ угол B равен $120°$, $AB = 1$, $BC = 2$. Найти AC^2.
Ответ: рис. 1.39 (теорема косинусов).

Трапеция — это четырехугольник, две противоположные стороны (основания) которого параллельны, а две другие (боковые стороны) непараллельны.

28. В прямоугольной трапеции основания равны 4 и 9, а меньшая из боковых сторон равна 12. Найти вторую боковую сторону.

Ответ: рис. 1.40 (теорема Пифагора).

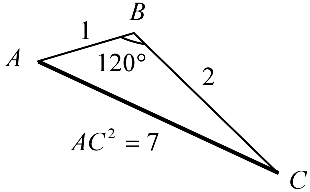


Рис. 1.39

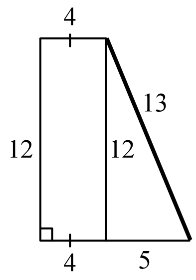


Рис. 1.40

В равнобедренной трапеции высота, проведенная из вершины острого угла, делит большее основание на отрезки, один из которых равен полусумме оснований, а другой — полуразности.

29. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 6$, $AD = 8$ и высотой BK. Найти AK и KD.

Ответ: рис. 1.41.

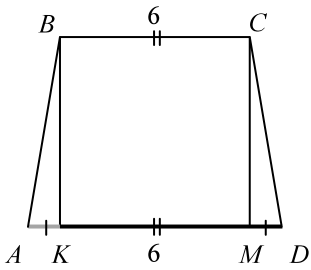


Рис. 1.41

В равнобедренной трапеции углы, образованные диагоналями трапеции с ее основаниями, равны между собой.

30. В равнобедренной трапеции угол между диагоналями, лежащими против боковой стороны, равен $50°$. Найти угол, который образует диагональ с основанием трапеции.

Ответ: рис. 1.42 (углы в равнобедренной трапеции).

31. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $AC = 5$, угол ADB равен $30°$. Чему равны BD и угол BCA?

Ответ: рис. 1.43 (свойства диагоналей и углов в равнобедренной трапеции).

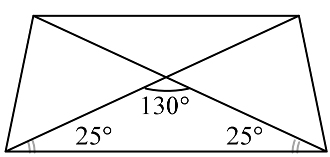


Рис. 1.42

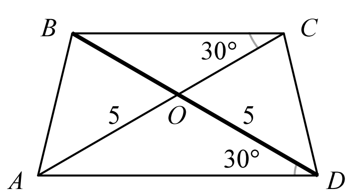


Рис. 1.43