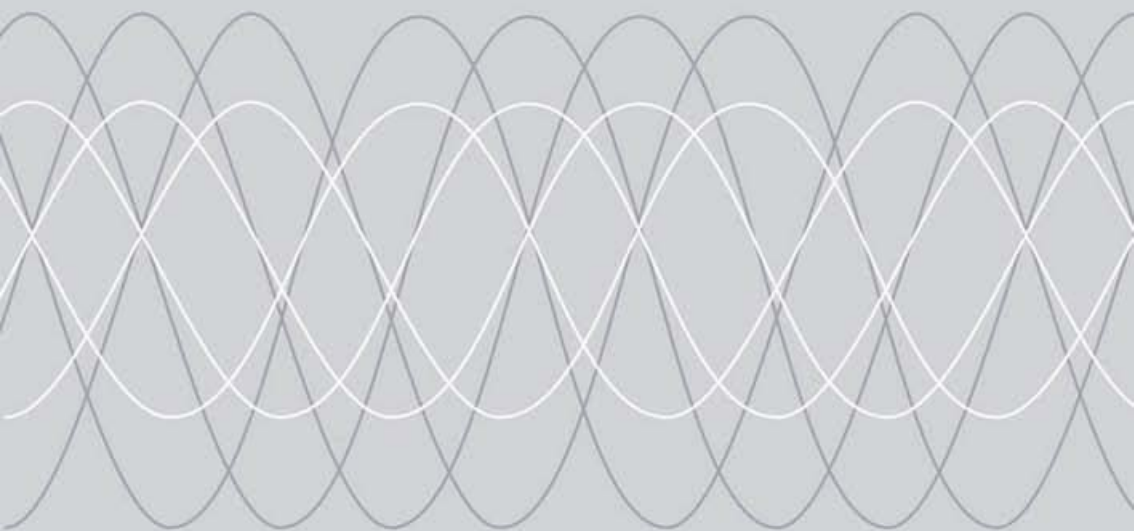


В. М. Бабич, А. П. Киселев

УПРУГИЕ ВОЛНЫ **ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ** **ТЕОРИЯ**



УДК 51+53
ББК 22
Б12

Бабич, В. М.

Б12 Упругие волны. Высокочастотная теория / В. М. Бабич, А. П. Киселев. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 320 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3305-8

Книга является подробным руководством по современной теории высокочастотных упругих волн, известной как лучевой метод или геометрическая акустика. Излагаются основы динамической теории упругости и теории плоских и сферических волн. Подробно изложен лучевой метод для объемных волн в изотропной и анизотропной средах и для волн Рэлея на поверхности неоднородного анизотропного упругого тела. Приведено выражение для фазы Берри. Рассмотрено много материала, не затрагивавшегося ранее в монографиях: теория волны S от центра расширения в неоднородной среде, лучевая теория волны S^* , аномальная поляризация, доказательство существования волны Рэлея в анизотропном полупространстве и др. Приведен учебный материал по вариационному исчислению, обобщенным функциям, тензорному анализу, необходимый для читателя, не имеющего достаточной физико-математической подготовки.

Для научных работников, аспирантов и студентов

УДК 51+53
ББК 22

*Издание подготовлено при финансовой поддержке
Санкт-Петербургского научного центра РАН*

Рецензент:

А. Б. Плаченов, канд. физ.-мат. наук, доцент Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики

Подписано в печать 15.12.14.
Формат 60×90¹/₁₆. Печать офсетная. Усл. печ. л. 20.
Тираж 700 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

Глава 1

Основные понятия линейной эластодинамики

Эта глава имеет вводный характер; в ней вводятся классические понятия теории упругости, которые будут постоянно встречаться в дальнейшем.

1.1. Смещения, деформации, напряжения

Смещение и напряжение — основные понятия теории упругости.

1.1.1. Вектор смещения и тензор деформации

Пусть \mathbf{x} — точка в *упругой среде* (или, что то же самое, в упругом теле), а x_1, x_2, x_3 — ее декартовы координаты, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Когда среда подвергается деформации, координаты материальной точки, находившейся в состоянии равновесия в \mathbf{x} , изменяются и становятся равными $\mathbf{x} + \mathbf{u} = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$. Вектор смещения \mathbf{u} зависит от \mathbf{x} и от времени t , $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Зависимость от t будет иногда опускаться.

Процесс деформирования характеризуется изменением расстояний между близко расположенными точками среды \mathbf{x} и $\mathbf{x} + d\mathbf{x} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$. При деформации они переходят соответственно в $\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{x} + d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x})$.

До деформации квадрат расстояния между \mathbf{x} и $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$ равнялся

$$d\sigma^2 = (d\mathbf{x})^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2,$$

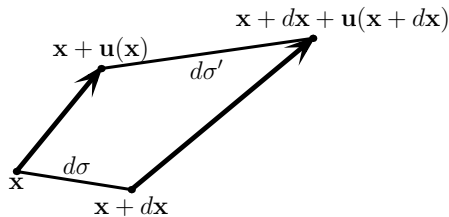


Рис. 1.1. Деформирование среды

а после стал

$$d\sigma'^2 = (d\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}))^2.$$

Изменение квадрата расстояния равно, в старшем порядке по dx_i ,

$$\begin{aligned} d\sigma'^2 - d\sigma^2 &= \sum_{i=1}^3 \left(dx_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \right)^2 - \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j. \end{aligned}$$

Считая, что все $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ малы, опустим (что соответствует гипотезе о *геометрической линейности* среды) члены высшего порядка $\sum_{l=1}^3 \frac{\partial u_l}{\partial x_j} \frac{\partial u_l}{\partial x_i}$, и получим

$$d\sigma'^2 - d\sigma^2 = 2\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) dx_i dx_j. \quad (1.1)$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся нижним латинским значкам подразумевается суммирование от 1 до 3, а

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Очевидно,

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \varepsilon_{ji}(\mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Симметричная матрица $\varepsilon = \|\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\|$, называется *тензором деформации* (*Koши*)¹. Тензоры деформаций и напряжений — одни из первых тензоров в истории науки.

1.1.2. Тензор напряжений

Теперь введем напряжение, имеющее, в отличие от определяемых геометрически смещения и деформации, механическую природу. Рассмотрим ориентированный элемент поверхности $d\mathcal{S}$, т. е. будем считать заданным направление нормали \mathbf{n} к нему. Пусть $d\mathcal{S}$ лежит внутри или на границе упругого тела. По старинному обычаю, обозначим через $\mathbf{t}^n d\mathcal{S}$ силу, действующую на $d\mathcal{S}$ с той стороны, куда направлена \mathbf{n} , см. рис. 1.2, так что \mathbf{t}^n — поверхностная плотность этой силы. Отметим очевидную формулу

$$\mathbf{t}^{-n}(\mathbf{u}) = -\mathbf{t}^n(\mathbf{u}), \quad (1.4)$$

выражающую 3-й закон Ньютона.

¹Такая трактовка тензора возможна до тех пор, пока мы ограничиваемся рассмотрением декартовых систем координат. Теория тензоров, приспособленная к рассмотрению произвольных координат, намечена в приложении 8.4.

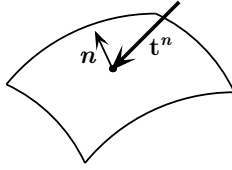


Рис. 1.2. Сила, действующая на элемент поверхности

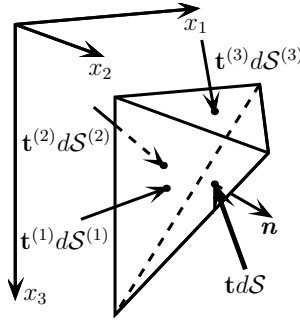


Рис. 1.3. Поверхностные силы, действующие на тетраэдр

На рис. 1.3 изображен бесконечно малый тетраэдр, выделенный нашим воображением внутри среды. Применим к нему 2-й закон Ньютона $m\mathbf{w} = \mathbf{\Phi}$, где m — его масса, \mathbf{w} — ускорение его центра тяжести, а $\mathbf{\Phi}$ — результирующая сила, действующая на него. Тетраэдр подвергается действию внешних по отношению к нему поверхностных сил со стороны остальной части среды, а также действию объемных сил (таких, например, как гравитация). Пусть длины ребер тетраэдра имеют порядок $O(h)$, тогда его объем порядка $O(h^3)$, а поверхность порядка $O(h^2)$. Таковы же порядки действующих на тетраэдр объемной и поверхностных сил. Пусть три стороны нашего тетраэдра параллельны координатным плоскостям, их площади пусть $dS^{(1)}, dS^{(2)}$ и $dS^{(3)}$, а внешние нормали к ним направлены навстречу осям координатных осей $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ и \mathbf{e}_3 . Площадь четвертой грани и внешнюю нормаль к ней обозначим через dS и $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, см. рис. 1.3. Будем считать вектор \mathbf{n} единичным,

$$|\mathbf{n}|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1.$$

Сравнение членов порядка $O(h^2)$ во втором законе Ньютона дает

$$-\mathbf{t}^{\mathbf{e}_1} dS^{(1)} - \mathbf{t}^{\mathbf{e}_2} dS^{(2)} - \mathbf{t}^{\mathbf{e}_3} dS^{(3)} + \mathbf{t}^{\mathbf{n}} dS = 0.$$

Замечая, что

$$d\mathcal{S}^{(j)} = n_j d\mathcal{S}, \quad (1.5)$$

мы имеем

$$\mathbf{t}^n = \mathbf{t}^{e_1} n_1 + \mathbf{t}^{e_2} n_2 + \mathbf{t}^{e_3} n_3 = \sum_{j=1}^3 n_j \mathbf{t}^{e_j}.$$

Величины $\mathbf{t}_k^{e_j}$ можно рассматривать как элементы матрицы $\boldsymbol{\sigma} = \|\sigma_{kj}\|$, которые мы обозначим через

$$\sigma_{kj} = \mathbf{t}_k^{e_j}. \quad (1.6)$$

Матрица $\boldsymbol{\sigma}$ называется *тензором напряжения*. Очевидно,

$$\mathbf{t}_k^n = \mathbf{t}_k^n(\mathbf{u}) = \sigma_{kj} n_j. \quad (1.7)$$

Теория упругости основана на предположении, что напряжение однозначно определяется деформацией. В линейной теории упругости, которую мы только и будем рассматривать, между ними предполагается линейная связь (ее обсуждение мы отложим до п. 1.3.2).

Сейчас же мы напомним основы лагранжева подхода, который используем дальше для вывода уравнений эластодинамики. Лагранжев подход заключается в том, что основные уравнения выводятся методами вариационного исчисления из принципа Гамильтона, т. е. условия стационарности функционала действия.

1.2. Лагранжев подход к механическим системам

Вывод уравнений движения мы будем основывать на предположении, что любой объем, выделенный в упругой среде, можно рассматривать как механическую систему, движение которой описывается исходя из принципа Гамильтона. Это предположение естественное и согласующееся с принятой в теоретической физике точкой зрения, что фундаментальные физические законы могут быть представлены в виде требования стационарности некоторого функционала (см., например, лекции Фейнмана [10]). Это очень сильное предположение, поскольку принцип Гамильтона приводит к уравнениям, имеющим уникальные свойства. С гамильтоновостью уравнений связаны их самосопряженность и энергетические соотношения, в частности, такое фундаментальное, как закон сохранения энергии, имеющий вид теоремы Умова — Пойнтинга.

Напомним сначала основные положения механики систем с конечным числом степеней свободы. Такую систему можно описывать в

терминах функции Лагранжа $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^2$. Во многих важных случаях L представляет собой разность кинетической $K(\dot{\mathbf{q}})$ и потенциальной $W(\mathbf{q})$ энергий. Здесь $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ — обобщенные координаты, $\dot{\mathbf{q}} := d\mathbf{q}/dt$, а m — число степеней свободы. В линейной теории предполагается, что K и W — квадратичные формы относительно $\dot{\mathbf{q}}$ и \mathbf{q} ,

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i,j=m} K_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j \quad \text{и} \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{i,j=m} W_{ij} q_i q_j,$$

причем матрицы $\|K_{ij}\|$ и $\|W_{ij}\|$ — положительно определенные.

Движением системы в отсутствие внешних сил управляет *принцип Гамильтона*. Он утверждает, что в течение произвольно выбранного отрезка времени $t_1 \leq t \leq t_2$ изолированная система ведет себя так, что *функционал*³ $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ стационарен, т. е. его вариация равна нулю,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (1.8)$$

Напомним на этом примере, что такое *вариация*. Дадим функциям q_l приращения δq_l , т. е. подставим в интеграл (1.8) вместо q_l суммы $q_l + \delta q_l$. Здесь вариации координат δq_l — произвольные гладкие функции, обращающиеся в нуль в моменты $t = t_1$ и $t = t_2$,

$$\delta q_l|_{t=t_1} = \delta q_l|_{t=t_2} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.9)$$

В других задачах могут быть и другие предположения относительно δq_l . По формуле Тейлора

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q} + \delta \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} + \delta \dot{\mathbf{q}}) dt &= \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt \\ &+ O \left(\int_{t_1}^{t_2} ((\delta \mathbf{q})^2 + (\delta \dot{\mathbf{q}})^2) dt, \right) \end{aligned}$$

$(\delta \mathbf{q})^2 + (\delta \dot{\mathbf{q}})^2 = \sum_{l=1}^{l=m} (\delta q_l)^2 + \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{d}{dt} \delta q_l \right)^2$. *Вариацией* функционала (1.8) называется выражение

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) dt := \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \delta \dot{q}_l \right) dt, \quad (1.10)$$

²В этой связи см., например, Ландау и Лифшиц [4]

³Функционал — это отображение некоторого множества функций в множество чисел. Сейчас мы задаем функцию q_i и получаем числа $\int_{t_1}^{t_2} L \left(q_1(t), \dots, q_m(t), \frac{dq_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dq_m(t)}{dt} \right) dt$.

где

$$\delta \dot{q}_l = \frac{d}{dt} \delta q_l.$$

Это — линейный функционал от δq_l . Потребуем, чтобы в процессе движения системы для произвольных δq_l , для которых выполнено (1.9), выражение (1.10) равнялось нулю. Интегрирование по частям дает

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l dt + \sum_{l=1}^{l=m} \frac{\partial L}{\partial q_l} \delta q_l \Big|_{t_1}^{t_2},$$

и из (1.8) и (1.9) следует

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \left(\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \right) \delta q_l dt = 0.$$

Вследствие произвольности δq_l , пользуясь *леммой Лагранжа*⁴, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.11)$$

В случае неизолированной системы, когда внешние воздействия описываются посредством обобщенных сил \mathcal{F}_j , уравнения движения принимают вид

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = -\mathcal{F}_l, \quad l = 1, 2, \dots, m. \quad (1.12)$$

Для включения внешних сил в вариационное уравнение мы заменим (1.8) на

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{l=1}^{l=m} \mathcal{F}_l \delta q_l dt = 0. \quad (1.13)$$

Вывод (1.12) из (1.13) совершенно аналогичен получению (1.11).

Выражение (1.13) можно было бы назвать основной аксиомой лагранжевой механики (для случая линейных систем с конечным числом степеней свободы).

1.3. Уравнения эластодинамики

Уравнения, описывающие динамику упругой среды, можно элементарным образом получить из рассмотрения второго закона Ньютона для

⁴Пусть $\psi(t)$ — фиксированная непрерывная при $t_1 \leq t \leq t_2$ функция, и для любой гладкой функции $\eta(t)$, такой что $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, интеграл $\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\eta(t) dt$ равен нулю. Тогда $\psi(t)$ равна нулю тождественно на $[t_1, t_2]$.

бесконечно малого объема (как это делается, например, в прекрасных классических учебниках Зоммерфельда [3], Лява [7] и др.). Мы сделаем это на основе лагранжева подхода, использование которого даст нам впоследствии значительные выгоды.

Будем рассматривать упругую среду как механическую систему, правда, уже с континуальным числом степеней свободы. В русской литературе для таких задач принят удачный термин “системы с распределенными параметрами”. Вектор смещения \mathbf{u} будет аналогом обобщенных координат; он “нумеруется”, вместо $l = 1, 2, \dots, m$ непрерывными переменными x_1, x_2 и x_3 . Поэтому суммирование по l придется заменить на интегрирование по объему, занимаемому средой.

1.3.1. Кинетическая и потенциальная энергии как квадратичные функционалы

Рассмотрим произвольно выбранный объем Ω внутри среды. Пусть на Ω действуют внешние силы, как поверхностные, так и объемные. Введем *плотность функции Лагранжа* как разность плотностей кинетической и потенциальной энергии среды

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{W}. \quad (1.14)$$

Плотность кинетической энергии равна

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2}\rho \dot{\mathbf{u}}^2, \quad (1.15)$$

где $\rho = \rho(\mathbf{x})$ обозначает *объемную плотность массы*, которая всегда будет предполагаться положительной. Мы делаем фундаментальное для *теории упругости* предположение: плотность потенциальной энергии определяется в каждой точке тензором деформации \mathcal{W} ,

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})). \quad (1.16)$$

Поскольку мы собираемся заниматься только линейной теорией упругости, у нас \mathcal{W} будет положительно определенной квадратичной формой относительно компонент тензора деформации ε_{ij} . Мы предположим, что плотность потенциальной энергии (1.16) является квадратичной формой от $\boldsymbol{\varepsilon}$ (т. е. выражением, однородным второго порядка относительно компонент $\boldsymbol{\varepsilon}$)

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} c_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijkl}(\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Из (1.17) легко следует, что c_{ijkl} — тензор четвертого порядка. Он называется *тензором упругих модулей*.

1.3.2. Свойства упругих модулей

В силу симметричности тензора деформаций без ограничения общности можно считать, что тензор c_{ijkl} обладает свойствами симметрии⁵

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \quad (1.18)$$

Тензор четвертого порядка, удовлетворяющий соотношениям симметрии (1.18), характеризуется, как нетрудно подсчитать, 21 параметром. Распространено описание упругих модулей с помощью симметричных матриц C_{pq} 6×6 , в котором принята следующая связь между парами ij и kl и числами p и q : $11 \leftrightarrow 1$, $22 \leftrightarrow 2$, $33 \leftrightarrow 3$, $23 = 32 \leftrightarrow 4$, $12 = 21 \leftrightarrow 5$, $13 = 31 \leftrightarrow 6$.

Весьма существенно естественное с физической точки зрения предположение, что потенциальная энергия является положительно определенной квадратичной формой от тензора деформаций, т. е.

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq \text{const} \sum_{i,j=1}^{i,j=3} (\varepsilon_{ij})^2 \quad (1.19)$$

для любого симметрического вещественного ε_{ij} и некоторой $\text{const} > 0$, причем $W = 0$ только, если $\varepsilon_{ij} = 0$ для всех i и j . Отсюда следует и неравенство для комплексных симметричных ε_{ij} ,

$$c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}^* \geq \text{const} \sum_{i,j=1}^{i,j=3} |\varepsilon_{ij}|^2, \quad (1.20)$$

которое потребуется нам в дальнейшем.

1.3.3. Вывод уравнений эластодинамики

Функцию Лагранжа для объема Ω мы определяем по формуле

$$L = K - W = \int_{\Omega} \mathcal{K} d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathcal{W} d\mathbf{x}. \quad (1.21)$$

Здесь K — *кинетическая энергия* объема Ω , а W — его *потенциальная энергия*. Через $d\mathbf{x}$ мы обозначаем элемент трехмерного объема.

Рассмотрим динамику произвольного (не предполагаемого малым) объема Ω в течение интервала времени

$$t_1 \leq t \leq t_2.$$

⁵Если $c_{ijkl} \neq c_{jikl}$, то симметрии c_{ijkl} по первой паре индексов можно добиться, заменив c_{ijkl} и c_{jikl} на $\frac{1}{2}(c_{ijkl} + c_{jikl})$, что не изменит значения квадратичной формы (1.17). Аналогично можно добиться и симметрии по второй паре индексов. Если $c_{ijkl} \neq c_{klij}$, то c_{ijkl} и c_{klij} следует заменить на $\frac{1}{2}(c_{ijkl} + c_{klij})$.

По аналогии с (1.13) мы рассмотрим принцип Гамильтона в форме

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u}_i d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_i \delta \mathbf{u}_i dS = 0. \quad (1.22)$$

Здесь $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ — плотность объемных сил (т. е. сил, действующих внутри Ω), $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — плотность поверхностных сил, действующих извне на границу $\partial\Omega$ объема Ω , а dS — элемент площади его поверхности, т. е. $\mathbf{t}^n(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$. Внешние силы обоих типов рассматриваются как заданные. Внешние силы (особенно объемные) часто называются *источниками (колебаний)*. Напомним, см. (1.7), что

$$\sigma_{kj} n_j = \mathbf{f}_k. \quad (1.23)$$

В этом пункте мы подчиняем вариации аналогу условия (1.9)

$$\delta \mathbf{u}|_{t_1} = \delta \mathbf{u}|_{t_2} = 0. \quad (1.24)$$

Мы понимаем (1.22) следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left(\rho \dot{\mathbf{u}}_i \delta \dot{\mathbf{u}}_i - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \right) d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \mathbf{F}_i \delta \mathbf{u}_i d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_i \delta \mathbf{u}_i dS = 0,$$

где

$$\delta \dot{\mathbf{u}}_i := \frac{\partial}{\partial t} \delta \mathbf{u}_i,$$

и

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \delta \mathbf{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \delta \mathbf{u}_j \right).$$

Применим *теорему Остроградского — Гаусса*,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} A_j d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} dS(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} A_j \cos(\widehat{\mathbf{n}x_j}) dS, \quad (1.25)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x})$ — произвольный гладкий вектор, $\cos(\widehat{\mathbf{n}x_j})$ — направляющие косинусы внешней нормали \mathbf{n} к границе $\partial\Omega$, а dS — элемент ее площади. Интегрируя по частям и пользуясь симметрией тензора смещений ε_{ij} (1.3), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \rho \ddot{\mathbf{u}}_j + \mathbf{F}_j \right) \delta \mathbf{u}_i d\mathbf{x} + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{f}_i - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j \right) \delta \mathbf{u}_i dS = 0. \quad (1.26)$$

Независимость вариаций $\delta \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, дает

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \rho \ddot{\mathbf{u}}_j = -\mathbf{F}_j, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.27)$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} n_j = f_i, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.28)$$

Сравнивая (1.28) и (1.23), получаем

$$\left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) n_j = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Вследствие произвольности Ω , отсюда следует

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.29)$$

Из (1.29) и (1.17) следует, что

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (1.30)$$

Среда, для которой выполняется закон Гука (1.30), называется *физически линейной*. Из (1.18) и (1.30) следует симметрия $\boldsymbol{\sigma} = \|\sigma_{ij}\|$,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1.31)$$

Перепишем теперь (1.27), (1.29) и (1.23) в виде

$$\rho \ddot{u}_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.32)$$

и

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u})|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}, \quad (1.33)$$

что согласуется с определением поверхностных сил.

Уравнения (1.32) — это уравнения движения упругой среды. Они выражают второй закон Ньютона для произвольного объема среды. Для этой системы трех уравнений второго порядка существует удачный, хотя мало еще распространенный в русскоязычной литературе термин *уравнения эластодинамики*.

Краевые условия, являющиеся следствием вариационного принципа, в вариационном исчислении называют *естественными граничными условиями*. Таково условие (1.33).

1.3.4. Операторы Навье и Ламе

Уравнения эластодинамики (1.32) приобретают вид

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = -\mathbf{F}, \quad (1.34)$$

где матричный дифференциальный оператор Навье \mathbf{L} имеет компоненты

$$L_i(\mathbf{u}) \equiv (\mathbf{L}\mathbf{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \quad (1.35)$$

Запишем его также в виде

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\mathfrak{L}} - \rho \mathbf{I} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (1.36)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица 3×3 , а $\boldsymbol{\mathfrak{L}}$ — оператор Ламе,

$$\boldsymbol{\mathfrak{L}}_i(\mathbf{u}) \equiv (\boldsymbol{\mathfrak{L}}\mathbf{u})_i = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(c_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (1.37)$$

Выражение для плотности поверхностных сил (1.28) записывается в виде

$$t_i^n(\mathbf{u}) = c_{ijkl} n_j \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}) = c_{ijkl} n_j \frac{\partial u_k}{\partial x_l}. \quad (1.38)$$

1.4. Классические граничные условия

До сих пор мы оперировали с элементарным объемчиком внутри среды, окруженным произвольно выбранной воображаемой поверхностью, которая целиком лежала внутри среды с непрерывно меняющимися свойствами. Теперь перейдем к рассмотрению волновых процессов на границе упругой среды и на границе между двумя физически различными упругими средами. Сначала приведем несколько разумных граничных условий, а затем посмотрим на них с лагранжевой точки зрения.

1.4.1. Список граничных условий

Физическую границу упругой среды будем обозначать через \mathcal{S} , см. рис. 1.4. Мы сформулируем сейчас два типа граничных условий на границе \mathcal{S} (предполагая ее достаточно гладкой).

Граница упругого тела

1. Контакт с абсолютно жестким телом вдоль \mathcal{S} описывается условием

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.39)$$

где $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ — заданный вектор, описывающий смещение поверхности под действием внешнего тела. Равенство (1.39) напоминает условие Дирихле в теории скалярных волн. Частным случаем (1.39) является

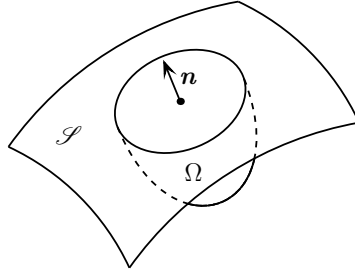


Рис. 1.4. Объем, прилегающий к границе тела

условие отсутствия смещений на границе,

$$\mathbf{u}|_{\mathcal{S}} = 0. \quad (1.40)$$

2. Контакт с абсолютно мягким телом описывается условием

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u})|_{\mathcal{S}} = \mathbf{f}, \quad (1.41)$$

где \mathbf{n} — единичная внешняя (по отношению к нашей среде) нормаль, а вектор $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, описывающий внешние поверхностные силы, считается заданным, см. (1.33).

Важен частный случай условия (1.41),

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u})|_{\mathcal{S}} = 0, \quad (1.42)$$

называемый случаем свободной от напряжений границы или просто случаем *свободной границы*. Это условие описывает контакт с вакуумом. Условия (1.41)–(1.42) похожи на условие Неймана.

Контакт двух упругих тел

Пусть \mathcal{B} — граница раздела двух различных упругих тел, см. рис. 1.5. Относящиеся к ним величины будем помечать значками I и II. Мы сформулируем два вида граничных условий на \mathcal{B} .

1. Условия жесткого контакта задаются в виде

$$\mathbf{u}_I|_{\mathcal{B}} = \mathbf{u}_{II}|_{\mathcal{B}}, \quad \mathbf{t}_I^n|_{\mathcal{B}} = \mathbf{t}_{II}^n|_{\mathcal{B}} \quad (1.43)$$

или, в эквивалентной форме,

$$[\mathbf{u}]|_{\mathcal{B}} = 0, \quad [\mathbf{t}^n]|_{\mathcal{B}} = 0. \quad (1.44)$$

Здесь $[\]|_{\mathcal{B}}$ обозначает скачок соответствующей величины на \mathcal{B} . Таким

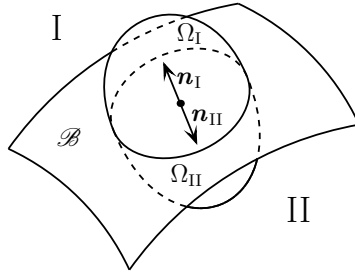


Рис. 1.5. Объем, разделенный поверхностью \mathcal{B}

образом, (1.43) и (1.44) — это условия на скачки смещений и их первых производных на \mathcal{B} .

Заметим, что, как следует из п. 1.3, эти условия автоматически выполняются на любых воображаемых поверхностях внутри упругого тела.

2. Чтобы описать *скользящий контакт* (контакт с проскальзыванием), разложим смещения и напряжения на границе на тангенциальные (T) и нормальные (N) к границе \mathcal{B} между I и II составляющие:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^T + \mathbf{u}^N, & \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{u}^N \times \mathbf{n} &= 0, \\ \mathbf{t}^n &= \mathbf{t}^{nT} + \mathbf{t}^{nN}, & \mathbf{t}^{nT} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{t}^{nN} \times \mathbf{n} &= 0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

где \mathbf{n} — как-либо выбранная единичная нормаль к \mathcal{B} . Условия *скользящего контакта* имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_I^N &= \mathbf{u}_{II}^N, & \mathbf{t}_I^{nN} &= \mathbf{t}_{II}^{nN}, \\ \mathbf{t}_I^{nT} &= \mathbf{t}_{II}^{nT} = 0, \end{aligned} \quad (1.46)$$

причем на скачок \mathbf{u}^T никаких условий не накладывается. Эти условия описывают контакт тел, проскальзывающих без трения вдоль бесконечно тонкого слоя невязкой жидкости.

Обсудим связь перечисленных выше условий с принципом Гамильтона.

1.4.2. Принцип Гамильтона и граничные условия

Граница упругого тела

Условие (1.41) (в частности, (1.42)) возникло при рассмотрении принципа Гамильтона, см. (1.23), и является естественным. Условие же (1.39)–(1.40) естественным не является.

Контакт двух упругих тел

Рассмотрим теперь случай границы раздела \mathcal{B} внутри упругого тела и применим принцип Гамильтона к области $\Omega = \text{I} + \text{II}$, см. рис. 1.5. Интегрируя по частям и используя граничные условия (1.28) на \mathcal{B} , мы преобразуем тождество (1.26) к виду

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^{\mathbf{n}_I}(\mathbf{u}_I) \cdot \delta \mathbf{u}_I + \mathbf{t}^{\mathbf{n}_{II}}(\mathbf{u}_{II}) \cdot \delta \mathbf{u}_{II}] dS = 0, \quad (1.47)$$

где \mathbf{n}_I — единичная нормаль к \mathcal{B} , внешняя для I, а \mathbf{n}_{II} — единичная нормаль к \mathcal{B} , внешняя для II, так что $\mathbf{n}_I = -\mathbf{n}_{II}$. Используя (1.4), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_I) \cdot \delta \mathbf{u}_I - \mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_{II}) \cdot \delta \mathbf{u}_{II}] dS = 0, \quad (1.48)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}_I$.

1. Сначала предположим, что части I и II жестко склеены, т.е. смещения \mathbf{u}_I и \mathbf{u}_{II} на границе раздела \mathcal{B} равны, и соответственно $\delta \mathbf{u}_I = \delta \mathbf{u}_{II} := \delta \mathbf{u}$, где вектор $\delta \mathbf{u}$ произволен. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_I) - \mathbf{t}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}_{II})] \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0, \quad (1.49)$$

и мы приходим к условиям жесткого контакта (1.44).

2. Теперь допустим проскальзывание частей I и II вдоль \mathcal{B} без пересечения и без отрыва друг от друга. Это значит, что касательные смещения \mathbf{u}_I^T и \mathbf{u}_{II}^T и их вариации $\delta \mathbf{u}_I^T|_{\mathcal{B}}$ и $\delta \mathbf{u}_{II}^T|_{\mathcal{B}}$ по обе стороны границы независимы, тогда как нормальные смещения \mathbf{u}_I^N и \mathbf{u}_{II}^N , $\delta \mathbf{u}_I^N$ и $\delta \mathbf{u}_{II}^N$ совпадают.

Мы можем переписать (1.48) в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\int_{\mathcal{B}} [\mathbf{t}^{\mathbf{n}N}(\mathbf{u}_I) - \mathbf{t}^{\mathbf{n}N}(\mathbf{u}_{II})] \cdot \delta \mathbf{u}^N dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}T}(\mathbf{u}_I) \cdot \delta \mathbf{u}_I^T dS - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{t}^{\mathbf{n}T}(\mathbf{u}_{II}) \cdot \delta \mathbf{u}_{II}^T dS \right) = 0.$$

Из независимости вариаций $\delta \mathbf{u}^N$, $\delta \mathbf{u}_I^T$ и $\delta \mathbf{u}_{II}^T$ следует исчезновение всех трех интегралов по \mathcal{B} . Это влечет обращение в нуль множителей при вариациях, что и дает условия (1.46).

1.5. Изотропная среда

Рассмотрим очень специальный и, вместе с тем, очень важный класс упругих сред. Среда называется *изотропной* в точке \mathbf{x} , если ее упругие

свойства одинаковы по всем направлениям. Упругая среда изотропна, если она изотропна во всех своих точках. В противном случае она *анизотропна*.

Исходя из инвариантности плотности потенциальной энергии относительно поворотов координатных осей вокруг рассматриваемой точки \mathbf{x} , мы покажем сначала, что тензор упругих модулей изотропной среды характеризуется двумя скалярными величинами. Далее будут выведены содержащие эти величины неравенства, которые обеспечат положительную определенность потенциальной энергии.

1.5.1. Следствия инвариантности \mathcal{W} относительно вращений

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$ — многочлен $\det(\boldsymbol{\varepsilon} - \Lambda \mathbf{I})$ (\mathbf{I} — единичная матрица) относительно числового параметра Λ . Коэффициенты этого многочлена обладают замечательным свойством не меняться при вращении системы координат (см., например, Гельфанд [2]) и называются инвариантами матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Плотность потенциальной энергии должна зависеть в нашем случае только от инвариантов матрицы $\boldsymbol{\varepsilon}$. Для любой матрицы 3×3

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

инвариантами являются три величины: ее след

$$I_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad (1.50)$$

величина

$$I_2 = \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{array} \right| \quad (1.51)$$

и ее определитель $I_3 = \det(\boldsymbol{\varepsilon})$. Поскольку \mathcal{W} предполагается однородной функцией второго порядка относительно ε_{ij} , она должна быть линейной комбинацией I_1^2 и I_2 . Принято параметризовать \mathcal{W} следующим образом:

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} ((\lambda + 2\mu)I_1^2 - 4\mu I_2). \quad (1.52)$$

Величины $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$ и $\mu = \mu(\mathbf{x})$ называются (*упругими*) *параметрами Ламе*.

Из (1.29) и (1.52) вытекает представление тензора напряжений в виде

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(\mathbf{u}). \quad (1.53)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера,

$$\delta_{ij} = 1, \text{ если } i = j, \text{ и } \delta_{ij} = 0, \text{ если } i \neq j. \quad (1.54)$$

Формула (1.53) получается следующим образом. Рассмотрим сначала случай совпадающих индексов i и j , например, $i = j = 1$. Из (1.29), (1.50), (1.51) и (1.52) следует

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{11}} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - 2\mu(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \\ &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),\end{aligned}$$

что совпадает с (1.53) при $i = j = 1$. Рассмотрим теперь различные индексы. При $i = 1, j = 2$ имеем

$$\sigma_{12} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \varepsilon_{12}} = 2\mu\varepsilon_{21} = 2\mu\varepsilon_{12},$$

что снова согласуется с (1.53). Для других пар индексов вычисление аналогично.

Выражение (1.53) можно также записать в виде

$$\sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (1.55)$$

Из (1.18) и (1.53) можно получить следующее выражение для тензора упругих модулей изотропной среды:

$$c_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}. \quad (1.56)$$

Плотность поверхностной силы на границе, внешней нормалью к которой служит \mathbf{n} , принимает вид

$$\mathbf{t}_i^n(\mathbf{u}) = \mu n_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda n_i \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.57)$$

или

$$\mathbf{t}^n(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu [\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}] + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n}, \quad (1.58)$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внешней нормали.

Уравнения эластодинамики (1.34)–(1.35), с учетом (1.53), можно записать в виде

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{u} - \rho\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{F}, \quad (1.59)$$

где теперь

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{u} &:= (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \\ &\quad + [\operatorname{grad} \mu \times \operatorname{rot} \mathbf{u}] + 2(\operatorname{grad} \mu \cdot \operatorname{grad})\mathbf{u}.\end{aligned} \quad (1.60)$$

Здесь использованы обозначения

$$(\mathbf{p} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = p_j \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_j} \quad (1.61)$$

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
Часто встречающиеся обозначения	9
Глава 1. Основные понятия линейной эластодинамики	10
1.1. Смещения, деформации, напряжения	10
1.1.1. Вектор смещения и тензор деформации	10
1.1.2. Тензор напряжений	11
1.2. Лагранжев подход к механическим системам	13
1.3. Уравнения эластодинамики	15
1.3.1. Кинетическая и потенциальная энергии как квадратичные функционалы	16
1.3.2. Свойства упругих модулей	17
1.3.3. Вывод уравнений эластодинамики	17
1.3.4. Операторы Навье и Ламе	19
1.4. Классические граничные условия	20
1.4.1. Список граничных условий	20
1.4.2. Принцип Гамильтона и граничные условия	22
1.5. Изотропная среда	23
1.5.1. Следствия инвариантности \mathcal{W} относительно вращений	24
1.5.2. Следствия положительной определенности \mathcal{W}	26
1.6. Баланс энергии	27
1.7. Гармонические по времени решения	28
1.7.1. Основные определения	28
1.7.2. Усреднение по времени	30
1.8. Принцип взаимности	31
1.8.1. Гармонический случай	31
1.8.2. Негармонический случай	32
1.9. ★ Примечания	33
Глава 2. Плоские волны	35
2.1. Плосковолновой анзац	35
2.2. Фазовая скорость	37
2.2.1. Нормальная скорость движущейся поверхности	37

2.2.2.	Фазовая скорость и медленность	38
2.3.	Плоские волны в изотропной среде	40
2.3.1.	Задача на собственные значения	40
2.3.2.	Волна P	40
2.3.3.	Волна S	41
2.3.4.	Гармонические волны P и S	42
2.3.5.	Поляризация гармонических волн P и S	43
2.3.6.	Групповая скорость	45
2.3.7.	Энергетические соотношения для гармонических по времени волн	46
2.3.8.	★ Потенциалы	48
2.4.	Плоские волны в анизотропной среде	50
2.4.1.	Задача на собственные значения	50
2.4.2.	Фазовая скорость	51
2.4.3.	Групповая скорость	51
2.4.4.	Медленность, поверхность медленностей, поверхность скоростей	53
2.4.5.	★ Принцип Рэлея	54
2.5.	★ Локальные скорости и область влияния	55
2.5.1.	Постановка задачи	55
2.5.2.	Энергетическая лемма	57
2.5.3.	Теорема единственности	61
2.6.	Отражение плоских волн от свободной границы изотропного полупространства	61
2.6.1.	Восходящие и нисходящие волны	62
2.6.2.	Волны поляризаций SH и $P - SV$	63
2.6.3.	Случай поляризации SH	63
2.6.4.	Случай поляризации $P - SV$	66
2.6.5.	Закон Снеллиуса	69
2.6.6.	Полное внутреннее отражение	69
2.6.7.	Поток энергии неоднородной волны	70
2.6.8.	★ Поток энергии при отражении от границы и унитарность матрицы отражения	71
2.6.9.	Отражение негармонических волн	74
2.7.	Классические плоские поверхностные волны в изотропной среде	76
2.7.1.	Классическая волна Рэлея	77
2.7.2.	Классическая волна Лява	80
2.7.3.	★ Полное внутреннее отражение и конструктивная интерференция	83

2.8.	Плоские поверхностные волны в изотропной слоистой среде	86
2.8.1.	Волны $P - SV$	87
2.8.2.	Волны SH	87
2.9.	Плоские волны в произвольной слоистой среде	88
2.9.1.	Задача на собственные значения	88
2.9.2.	Виреальная теорема	90
2.9.3.	Теорема о групповой скорости	92
2.10.	★ Существование волны Рэля в однородном анизотропном полупространстве	93
2.10.1.	Одномерная задача и соответствующая энергетическая квадратичная форма	94
2.10.2.	Однородные плоские волны и непрерывный спектр оператора $\hat{\gamma}$	96
2.10.3.	Вариационный принцип	97
2.10.4.	Дискретный спектр оператора $\hat{\gamma}$	98
2.11.	★ Примечания	100
ГЛАВА 3. ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ		107
3.1.	Дельта-функция	107
3.2.	Скалярная задача о точечном источнике колебаний	111
3.2.1.	Гармоническая зависимость от времени	112
3.2.2.	Выделение единственного решения. Понятие о принципе предельного поглощения	114
3.2.3.	Негармоническая зависимость от времени	115
3.3.	Точечные источники в однородной изотропной упругой среде. Гармонический случай	116
3.3.1.	★ Центр расширения и центр вращения как предельные задачи о сферических излучателях	118
3.3.2.	Сосредоточенная сила	121
3.4.	Нестационарный случай	124
3.5.	Условия на бесконечности и единственность	128
3.5.1.	Принцип предельного поглощения	129
3.5.2.	★ Условия излучения	130
3.5.3.	Теорема единственности в нестационарном случае	135
3.6.	★ Примечания	136
ГЛАВА 4. ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ДЛЯ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ		140
4.1.	Лучевой анзац и уравнения переноса	140
4.1.1.	Лучевой анзац и локальная плоская волна	140

4.1.2.	Рекуррентная система	143
4.1.3.	Волны P и S	144
4.2.	Уравнение эйконала и лучи	145
4.2.1.	Функционал Ферма и лучи	146
4.2.2.	Решение уравнения эйконала с помощью лучей	147
4.2.3.	Центральное поле лучей	147
4.2.4.	Задача Коши для уравнения эйконала	148
4.2.5.	★ Комплексный эйконал	151
4.2.6.	Лучевые координаты	153
4.3.	Решение уравнений переноса. Волна P	154
4.3.1.	Нулевое приближение. Условие разрешимости и уравнение Умова	154
4.3.2.	Нулевое приближение. Формулы для $\tilde{\mathcal{E}}$ и \mathbf{u}^{P0}	157
4.3.3.	Лучевые координаты и геометрическое расхождение	161
4.3.4.	Аномальная поляризация	164
4.3.5.	★ Первая продольно поляризованная поправка	164
4.3.6.	★ Высшие приближения	165
4.4.	Решение уравнений переноса. Волна S	166
4.4.1.	Нулевое приближение. Первоначальные рассмотрения. Закон Рытова	166
4.4.2.	Закон Рытова. Случай комплексного \mathbf{u}^{S0}	169
4.4.3.	Аномальная поляризация	171
4.4.4.	★ Первая поперечно поляризованная поправка	171
4.4.5.	★ Высшие приближения	172
4.5.	Отражение волны, заданной лучевым разложением	173
4.5.1.	Анзац и задача определения отраженных и обменных волн	173
4.5.2.	Построение поля в старшем порядке	175
4.6.	★ Риманова геометрия в лучевой теории	178
4.6.1.	Риманова геометрия и принцип Ферма	178
4.6.2.	Параллельный перенос в римановой метрике и закон Рытова	181
4.7.	Геометрическое расхождение в однородной среде	184
4.7.1.	О линиях кривизны	184
4.7.2.	Вывод формулы для J	186
4.7.3.	Об обращении геометрического расхождения в нуль и каустиках	187
4.8.	Геометрическое расхождение при отражении, преломлении и конверсии в плоском случае	187
4.8.1.	Вычисление начальных данных для уравнения Якоби в случае монотипного отражения	189

4.8.2.	Вычисление начальных данных для уравнения Якоби для случая отражения с конверсией	193
4.8.3.	Вычисление начальных данных для случая преломления	194
4.8.4.	Случай постоянных скоростей	195
4.8.5.	Фокусировка при отражении	196
4.9.	★ Нестационарные версии лучевого метода	196
4.9.1.	Высокочастотная асимптотика и асимптотика по гладкости	196
4.9.2.	Другие нестационарные версии	198
4.10.	★ Примечания	199
ГЛАВА 5. ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ДЛЯ ОБЪЕМНЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ		208
5.1.	Рекуррентная система и уравнение эйконала	208
5.1.1.	Рекуррентная система	208
5.1.2.	Уравнение эйконала	209
5.2.	Лучи и волновые фронты	210
5.2.1.	Задача Коши для нелинейного уравнения	210
5.2.2.	Каноническая система	211
5.2.3.	Специальный случай — уравнение эйконала	212
5.3.	★ Принцип Ферма и финслерова геометрия	213
5.3.1.	Лучи как экстремали некоторого функционала вариационного исчисления	213
5.3.2.	Финслерова метрика	215
5.3.3.	Принцип Ферма	216
5.3.4.	Заключительные замечания	217
5.4.	Решение уравнения переноса для \mathbf{u}^0	217
5.4.1.	Условие разрешимости и уравнение Умова	217
5.5.	Высшие приближения	218
5.6.	★ Примечания	220
ГЛАВА 6. ТОЧЕЧНЫЕ ИСТОЧНИКИ В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ. ВОЛНА S ОТ ЦЕНТРА РАСШИРЕНИЯ. ВОЛНА P ОТ ЦЕНТРА ВРАЩЕНИЯ		224
6.1.	Постановка задачи и простейшие соображения	225
6.1.1.	Постановка задачи	225
6.1.2.	Непригодность лучевых формул вблизи точки источника	226
6.1.3.	Элементарные соображения локальности	226
6.2.	Поле вблизи точки источника	228
6.2.1.	Рекуррентная система	228

6.2.2.	★ О решении уравнений (6.25)–(6.27)	230
6.2.3.	Промежуточная область	231
6.2.4.	О вычислении дифракционного коэффициента χ^1 для центра расширения и ψ^1 — для центра вращения	232
6.2.5.	Поле в приближении однородной среды	232
6.2.6.	Как найти χ^1 , или соображения о сшивании	233
6.2.7.	★ Операторная основа построения решений уравне- ний (6.25), (6.26),	234
6.3.	Вспомогательные формулы	235
6.3.1.	Решение уравнений с операторами Гельмгольца	236
6.3.2.	Решение уравнений (6.50) и (6.51)	237
6.3.3.	Еще два тождества	237
6.4.	Старший ненулевой дифракционный коэффициент волны S от центра расширения	238
6.4.1.	Тождественное преобразование выражения $\mathbf{L}^1\mathbf{V}^0$	238
6.4.2.	Выделение в $\mathbf{L}^1\mathbf{V}^0$ членов, существенных для вы- числения χ^1	239
6.4.3.	Окончательный результат	240
6.5.	Старший ненулевой дифракционный коэффициент волны P от центра вращения	241
6.5.1.	Тождественное преобразование выражения $\mathbf{L}^1\mathbf{V}^0$	241
6.5.2.	Выделение в $\mathbf{L}^1\mathbf{V}^0$ членов, существенных для вы- числения ψ^1	242
6.5.3.	Окончательный результат	244
6.6.	★ Примечания	244
ГЛАВА 7.	“Нелучевая” волна S^*	248
7.1.	Постановка вопроса и качественное обсуждение	248
7.1.1.	Краевая задача	248
7.1.2.	Качественное обсуждение возникающих волн	249
7.2.	Вывод формул	252
7.2.1.	Вспомогательная задача и принцип взаимности	252
7.2.2.	Что потребуется для вычисления волны S^*	253
7.2.3.	Решение вспомогательной задачи для \mathbf{w}	254
7.2.4.	Старший член асимптотики волны S^*	256
7.2.5.	★ Высшие приближения и другие уточнения	257
7.3.	★ Примечания	258
ГЛАВА 8.	ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ДЛЯ ВОЛН РЭЛЕЯ	263
8.1.	Уравнения, граничные условия и рекуррентная система	264
8.2.	Краевая задача для U^O	267
8.2.1.	Явный вид уравнения и граничных условий для U^O	267

8.2.2.	Уравнение эйконала	268
8.2.3.	Принцип Ферма, лучи, теорема о групповой скорости	269
8.2.4.	Условие разрешимости краевой задачи для U^I	270
8.2.5.	Рассмотрение уравнения переноса	273
8.2.6.	Уравнение Умова и формула для $ \phi $	273
8.2.7.	Фаза Берри	276
8.2.8.	О построении высших приближений	278
8.3.	Случай изотропного тела	279
8.3.1.	Специфика изотропного случая	279
8.3.2.	Явные формулы для старшего члена	281
8.3.3.	Окончательная формула для старшего члена	283
8.4.	★ Примечания	283
Приложение. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ		290
П.1.	Определение тензора	290
П.2.	Простейшие действия с тензорами	291
П.3.	Метрический тензор. Поднятие и опускание индексов	291
П.4.	Координаты (q^1, q^2, n) , связанные с поверхностью в \mathbb{R}^3 . Первая и вторая квадратичные формы Гаусса	293
П.4.1.	Координаты (q^1, q^2, n)	293
П.4.2.	Первая квадратичная форма Гаусса	294
П.4.3.	Вторая квадратичная форма Гаусса	294
П.5.	Ковариантное дифференцирование. Дивергенция	295
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ		298