Математика
в примерах и задачах

2

Математика
в примерах и задачах

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для учащихся учреждений
образования, реализующих
образовательные программы
среднего специального образования*

В двух частях

Часть 2

Под общей редакцией Л.И. Майсени

Минск
«Вышэйшая школа»
2014

УДК 51(075.32)
ББК 74.3я723
М34

Авторы: Л.И. Майсеня, М.А. Калугина, М.В. Ламчановская, И.Ю. Мацкевич, В.Э. Жавнерчик

Рецензенты: кафедра математических и естественнонаучных дисциплин УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (*В.В. Тынкович*); профессор кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета, доктор физико-математических наук *А.В. Метельский*

Выпуск издания осуществлен по заказу Республиканского института профессионального образования и при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Математика в примерах и задачах : учеб. пособие. В 2 ч.
М34 Ч. 2 / Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 430 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2500-7.

Содержатся теоретические сведения, решения типовых примеров и задания трех уровней сложности по интегрированному курсу элементарной, высшей и дискретной математики.

Для учащихся учреждений образования, реализующих образовательные программы среднего специального образования.

УДК 51(075.32)
ББК 74.3я723

ISBN 978-985-06-2500-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-06-2501-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть учебного пособия «Математика в примерах и задачах» является логическим продолжением первой части.

В начале каждого параграфа книги дается необходимый теоретический материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности. Предлагаемая структура учебного пособия делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности. Кроме того, учебное пособие может быть использовано в обучении на различных специальностях системы среднего специального образования с различными по содержанию (и сложности планируемого материала) учебными программами дисциплины «Математика». При этом представлен учебный материал для обучения математике как на основе общего базового образования, так и на основе общего среднего образования.

Характерной особенностью предлагаемого методического подхода является построение интегрированного курса из тем элементарной, высшей и дискретной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учреждений среднего специального и высшего образования, это способствует качественной реализации непрерывного продолжения обучения в университете.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам книги – коллективу кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Минского государственного высшего радиотехнического колледжа (особенно преподавателю высшей категории В.В. Тынкович) и профессору кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета доктору физико-математических наук А.В. Метельскому – за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Авторы надеются, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при обучении математике.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

13. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Модуль и аргумент. Тригонометрическая форма комплексного числа

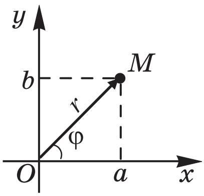

Рис. 13.1

Комплексное число $z = a + bi$ в прямоугольной декартовой системе координат Oxy изображается точкой $M(a, b)$ (рис. 13.1).

Длина радиуса-вектора точки M называется ***модулем комплексного числа*** z и обозначается $|z|$ или r:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r. \tag{13.1}$$

Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ с положительным направлением действительной оси Ox, называется ***аргументом числа*** z. Связь между аргументом φ комплексного числа и его действительной и мнимой частями выражается формулами:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \tag{13.2}$$

или

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \tag{13.3}$$

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно: если φ – аргумент числа z, то $\varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, – также аргумент этого числа при любом целом n. Для однозначности определения аргумента его выбирают при условии $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Такое значение аргумента называют *главным* и обозначают $\arg z$. Всюду далее будем рассматривать главное значение аргумента: $\varphi = \arg z$.

На практике находить аргумент комплексного числа z имеет смысл согласно формуле (13.2) с учетом координатной четверти, в которой лежит это число (или с помощью формул (13.3)).

Запись комплексного числа в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{13.4}$$

называется ***тригонометрической формой комплексного числа***.

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ – комплексные числа, заданные в тригонометрической форме, то:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \qquad (13.5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)),\ z_2 \neq 0. \qquad (13.6)$$

Для комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ справедлива *формула Муавра*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n \in \mathbf{N}. \qquad (13.7)$$

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексное число:

1) $z = -5i$; 2) $z = 4 - 4\sqrt{3}i$; 3) $z = 2 - \sqrt{5}$.

Р е ш е н и е. 1. В данном случае $r = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$. Точка, изображающая данное число, лежит на отрицательной части оси Oy (рис. 13.2), поэтому $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{можно считать также, что } \varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$.

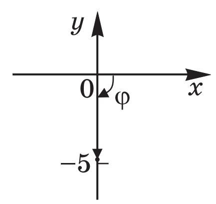

Рис. 13.2

Записываем число в тригонометрической форме:

$$z = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

2. Находим модуль заданного числа по формуле (13.1):

$$r = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8.$$

Для нахождения аргумента φ используем формулу (13.2):

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3}.$$

Учитываем то, что число z лежит в IV координатной четверти (рис. 13.3), поэтому $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ $\left(\text{или } \varphi = \frac{5\pi}{3}\right)$. Тогда, согласно формуле (13.4), получаем:

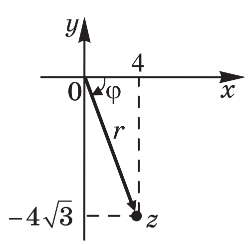

Рис. 13.3

$$z = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

3. Находим модуль комплексного числа:

$$r = \sqrt{(2-\sqrt{5})^2 + 0^2} = \left|2-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5} - 2.$$

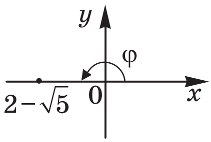

Рис. 13.4

Заданное число является отрицательным действительным числом (рис. 13.4), поэтому $\varphi = \pi$.

Запись заданного комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид

$$z = (\sqrt{5} - 2)(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Пример 2. Выполнить в тригонометрической форме указанное действие над числами z_1, z_2. Ответ записать в алгебраической форме:

1) $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 16\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z_2 = \frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

3) $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = \cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}$, $z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

Р е ш е н и е. 1. Используя формулу (13.5), находим:

$$z_1 \cdot z_2 = 16 \cdot \frac{1}{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Учитывая, что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ и $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, получаем: $z_1 \cdot z_2 = 2i$.

2. Сначала представим число z_1 в тригонометрической форме. Находим: $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Поскольку число z_1 лежит в IV координатной четверти и $\operatorname{tg}\varphi = -1$, то $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Теперь воспользуемся формулой (13.5):

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=12\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=6\sqrt{3}+6i.$$

3. Число z_1 не записано в тригонометрической форме. Запишем его в этой форме, используя четность функции косинус и нечетность функции синус. Получаем:

$$\cos\frac{7\pi}{6}-i\sin\frac{7\pi}{6}=\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right).$$

По формуле (13.6) находим:

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(1:\frac{1}{2}\right)\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)\right)=$$

$$=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)=1-\sqrt{3}i.$$

Пример 3. Вычислить z^9, если $z=-1-\sqrt{3}i$. Найти $\operatorname{Re} z^9$ и $\operatorname{Im} z^9$.

Решение. Представим заданное число в тригонометрической форме. Для него $r=2$, $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}$ и соответствующая точка лежит в III координатной четверти, т.е. $\varphi=\frac{4\pi}{3}$. Получаем:

$$z=2\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

По формуле (13.7) находим:

$$z^9=2^9\left(\cos\left(9\cdot\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(9\cdot\frac{4\pi}{3}\right)\right)=512(\cos 12\pi+i\sin 12\pi)=$$

$$=512(\cos 0+i\sin 0)=512.$$

Поскольку $z^9=512+0i$, то $\operatorname{Re} z^9=512$, $\operatorname{Im} z^9=0$.

Пример 4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых:

1) $|z+1|=2$; 2) $\frac{\pi}{6}<\arg z\leqslant\frac{\pi}{3}$; 3) $\begin{cases}|z|>1,\\ 0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{4}.\end{cases}$

Р е ш е н и е. 1. Пусть $z = x + yi$, тогда

$$z + 1 = x + yi + 1 = (x + 1) + yi.$$

Найдем модуль полученного комплексного числа:

$$|z + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}.$$

Заданное равенство приобретает вид

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 2.$$

Возводим его в квадрат и приходим к уравнению окружности

$$(x + 1)^2 + y^2 = 2^2,$$

радиус которой равен 2, а центр находится в точке $C(-1,\ 0)$.

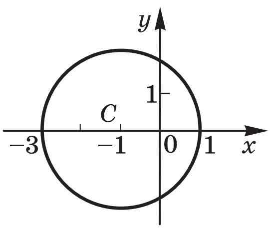

Рис. 13.5

Таким образом, множество точек, которые соответствуют заданному равенству $|z + 1| = 2$, лежат на данной окружности (рис. 13.5).

2. Пусть $\arg z = \varphi$. Из условия имеем $\frac{\pi}{6} < \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$. Геометрически это неравенство задает на плоскости множество точек, лежащих внутри угла с вершиной в точке (0, 0), стороны которого составляют с положительным направлением оси Ox углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$, а также множество точек, лежащих на луче $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (рис. 13.6).

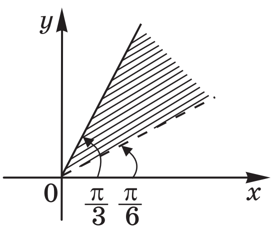

Рис. 13.6

3. Заданная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решением системы будет пересечение множества точек, лежащих вне окружности $x^2 + y^2 = 1$, и множества точек, лежащих внутри угла величиной $\frac{\pi}{4}$ и на его сторонах (рис. 13.7).

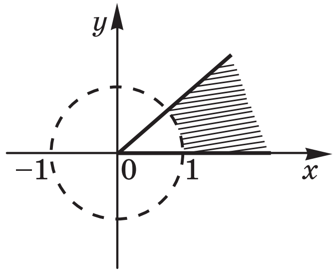

Рис. 13.7

Задания

I уровень

1.1. Покажите число на комплексной плоскости, представьте его в тригонометрической форме:

1) $z=-2-2i$; 2) $z=8-8\sqrt{3}i$; 3) $z=(\sqrt{5}-2)i$.

1.2. Покажите число на комплексной плоскости, представьте его в алгебраической форме, найдите $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$:

1) $z=5\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $z=2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

1.3. Возведите в указанную степень число z, ответ запишите в алгебраической форме:

1) z^9, если $z=\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}$;

2) z^8, если $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

1.4. Заданы числа $z_1=-1-i$, $z_2=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_3=1+\sqrt{3}i$, вычислите $\frac{4z_1\cdot z_3}{\overline{z}_2}$ в тригонометрической форме.

II уровень

2.1. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

1) $z=\dfrac{2+i}{1+3i}$; 2) $z=(-0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i)^2$.

2.2. Даны комплексные числа $z_1=-2+2\sqrt{3}i$ и $z_2=1-i$. Представив их в тригонометрической форме, вычислите:

1) $\overline{5z_1\cdot z_2}$; 2) $-\dfrac{z_1^3}{z_2^4}$; 3) $\overline{z}_2^{20}$.

2.3. Возведите в степень, результат запишите в алгебраической форме, найдите $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z=\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{36}$.

III уровень

3.1. Выполните действия и представьте ответ в алгебраической форме:

1) $z=2\left(\dfrac{-\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}}\right)$; 2) $z=\dfrac{4\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)i}{(\sqrt{3}-i)(1-i)^2}$.

3.2. Пусть $z_1=3+4i$, $z_2=-4+3i$. Найдите действительные значения a и b, для которых $\dfrac{z_1}{z_2}=az_1+bz_2$.

3.3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют условию

$$x^2+i-2x+2yi=y-1+\frac{4y^2-1}{2y-1}i.$$

3.4. Найдите комплексное число z, удовлетворяющее уравнению

$$(i-z)(1+2i)+(1-iz)(3-4i)=1+7i.$$

3.5. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1=9y^2-4-10xi^5$ и $z_2=8y^2+20i^{11}$ являются сопряженными.

3.6. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, для которых:

1) $\dfrac{\pi}{3}<\arg z\leqslant\dfrac{5\pi}{4}$; 2) $1\leqslant|z+1-i|\leqslant 2$;

3) $\begin{cases} \arg z = \dfrac{\pi}{4}, \\ |z-1-i| = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \operatorname{Re} z \geqslant 1, \\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

13.2. Показательная форма комплексного числа. Извлечение корней

Соотношение

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (13.8)$$

называется *формулой Эйлера*. Равенство (13.8) позволяет перейти от тригонометрической к показательной форме комплексного числа, и наоборот.

Запись комплексного числа в виде

$$z = re^{i\varphi}, \qquad (13.9)$$

где r – модуль комплексного числа; φ – его аргумент, называется ***показательной формой комплексного числа***.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \qquad (13.10)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \ z_2 \neq 0. \qquad (13.11)$$

Если $z = re^{i\varphi}$, то верна формула Муавра в показательной форме:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \ n \in \mathbf{N}. \qquad (13.12)$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Корень n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеет n различных значений, которые в тригонометрической форме находят по формуле

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)\right), \qquad (13.13)$$

а в показательной – по формуле

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi}{n}k\right)}, \qquad (13.14)$$

где $k = 0, 1, 2, ..., n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня.

Все значения корня $(\sqrt[n]{z})_k$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n-1$, расположены на окружности с центром в начале системы координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного вписанного в окружность n-угольника.

Пример 1. Заданы числа $z_1 = -2+2i$ и $z_2 = 8i$. Вычислить $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1^6}{z_2}$ в показательной форме. Ответы представить в алгебраической форме.

Решение. Запишем числа в показательной форме, используя формулу (13.9). Находим модуль и аргумент числа z_1: $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi_1 = -1$ и число лежит во II координатной четверти, следовательно, $\varphi_1 = \dfrac{3\pi}{4}$. Получаем: $z_1 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Для $z_2 = 8i$ имеем: $|z_2| = 8$, $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $z_2 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Вычисляем произведение, используя формулу (13.10):

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot 8e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 16\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Для того чтобы записать полученный результат в алгебраической форме, представим его сначала в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Используя значения тригонометрических функций, приходим к ответу:

$$z_1 \cdot z_2 = 16\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16-16i.$$

По формулам (13.11) и (13.12) получаем:

$$\frac{z_1^6}{z_2} = \frac{(2\sqrt{2})^6}{8}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\cdot 6-\frac{\pi}{2}\right)} = 64e^{i\frac{8\pi}{2}} = 64e^{i4\pi} = 64(\cos 4\pi + i\sin 4\pi).$$

Учитывая 2π-периодичность функций косинус и синус, получаем тригонометрическую форму записи результата, из которой следует алгебраическая форма:

$$\frac{z_1^6}{z_2}=64(\cos 0+i\sin 0)=64(1+i0)=64.$$

Отметим, что период 2π «отбрасывается» и в показательной форме записи, т.е. в данном случае можно было вычислять без перехода к тригонометрической форме: $64e^{i4\pi}=64e^{i0}=64.$

Пример 2. Извлечь корень $\sqrt{z}$, если $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, используя тригонометрическую форму комплексного числа. Полученные значения корня записать в алгебраической форме и показать на комплексной плоскости.

Решение. Находим модуль и аргумент числа $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Получаем: $|z|=1$, $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Приходим к записи заданного комплексного числа в тригонометрической форме:

$$z=1\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Далее используем формулу (13.13), которая для данного случая имеет вид

$$w_k=(\sqrt{z})_k=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi k\right), k=0,1.$$

Из нее получаем: если $k=0$, то

$$w_0=(\sqrt{z})_0=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

если $k=1$, то

$$w_1=(\sqrt{z})_1=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

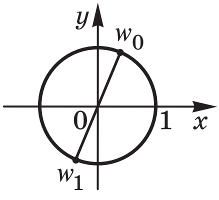

Рис. 13.8

(рис. 13.8).

Пример 3. Найти значения $\sqrt[3]{8i}$, используя показательную форму комплексного числа, и показать их на комплексной плоскости.

Решение. Находим модуль и аргумент числа $z=8i$: $|z|=8$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Получаем $z=8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Тогда, используя формулу (13.14), имеем:

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Майсеня Людмила Иосифовна
Калугина Марина Алексеевна
Ламчановская Марина Валерьевна и др.

**МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректоры *О.В. Ракицкая, Т.К. Хваль*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой*

Подписано в печать 23.09.2014. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «NewtonC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 22,68.
Уч.-изд. л. 19,1. Тираж 800 экз. Заказ 1540.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Красная звезда».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
производителя и распространителя печатных изданий № 2/7 от 28.10.2013.
Юридический адрес: пер.1-й Загородный, 3, 220073, Минск.
Почтовый адрес: ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.