

Математика в примерах и задачах

2



Математика

в примерах и задачах

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для учащихся учреждений
образования, реализующих
образовательные программы
среднего специального образования*

В двух частях

Часть 2

Под общей редакцией Л.И. Майсени



Минск
«Вышэйшая школа»
2014

УДК 51(075.32)

ББК 74.3я723

М34

Авторы: Л.И. Майсеня, М.А. Калугина, М.В. Ламчановская,
И.Ю. Мацкевич, В.Э. Жавнерчик

Рецензенты: кафедра математических и естественнонаучных дисциплин УО «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (В.В. Тынкович); профессор кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета, доктор физико-математических наук А.В. Метельский

Выпуск издания осуществлен по заказу Республиканского института профессионального образования и при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства

Математика в примерах и задачах : учеб. пособие. В 2 ч.
М34 Ч. 2 / Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. —
Минск : Вышэйшая школа, 2014. — 430 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2500-7.

Содержатся теоретические сведения, решения типовых примеров и задания трех уровней сложности по интегрированному курсу элементарной, высшей и дискретной математики.

Для учащихся учреждений образования, реализующих образовательные программы среднего специального образования.

УДК 51(075.32)

ББК 74.3я723

ISBN 978-985-06-2500-7 (ч. 2)
ISBN 978-985-06-2501-4

© Оформление. УП «Издательство
«Вышэйшая школа»», 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть учебного пособия «Математика в примерах и задачах» является логическим продолжением первой части.

В начале каждого параграфа книги дается необходимый теоретический материал, затем – решение нескольких задач и набор заданий трех уровней сложности. Предлагаемая структура учебного пособия делает возможным самостоятельное изучение математики. Его использование позволяет реализовать дифференцированный подход в обучении – каждый учащийся может решать задания доступного ему уровня сложности. Кроме того, учебное пособие может быть использовано в обучении на различных специальностях системы среднего специального образования с различными по содержанию (и сложности планируемого материала) учебными программами дисциплины «Математика». При этом представлен учебный материал для обучения математике как на основе общего базового образования, так и на основе общего среднего образования.

Характерной особенностью предлагаемого методического подхода является построение интегрированного курса из тем элементарной, высшей и дискретной математики. Поскольку на практике широко реализуется непрерывное образование в системе учреждений среднего специального и высшего образования, это способствует качественной реализации непрерывного продолжения обучения в университете.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам книги – коллективу кафедры математических и естественнонаучных дисциплин Минского государственного высшего радиотехнического колледжа (особенно преподавателю высшей категории В.В. Тынкович) и профессору кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета доктору физико-математических наук А.В. Метельскому – за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Авторы надеются, что предлагаемое издание будет содействовать активизации мыслительной деятельности учащихся и повышению эффективности учебного процесса при обучении математике.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

13. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

13.1. Модуль и аргумент.

Тригонометрическая форма комплексного числа

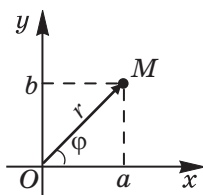


Рис. 13.1

Комплексное число $z = a + bi$ в прямоугольной декартовой системе координат Oxy изображается точкой $M(a, b)$ (рис. 13.1).

Длина радиуса-вектора точки M называется **модулем комплексного числа** z и обозначается $|z|$ или r :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r. \quad (13.1)$$

Угол φ , образованный вектором \overline{OM} с положительным направлением действительной оси Ox , называется **аргументом числа** z . Связь между аргументом φ комплексного числа и его действительной и мнимой частями выражается формулами:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad (13.2)$$

или

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \quad (13.3)$$

Аргумент комплексного числа определен неоднозначно: если φ – аргумент числа z , то $\varphi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, – также аргумент этого числа при любом целом n . Для однозначности определения аргумента его выбирают при условии $\varphi \in [0, 2\pi)$ или $\varphi \in (-\pi, \pi]$. Такое значение аргумента называют **главным** и обозначают $\operatorname{arg} z$. Всюду далее будем рассматривать главное значение аргумента: $\varphi = \operatorname{arg} z$.

На практике находить аргумент комплексного числа z имеет смысл согласно формуле (13.2) с учетом координатной четверти, в которой лежит это число (или с помощью формул (13.3)).

Запись комплексного числа в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (13.4)$$

называется **тригонометрической формой комплексного числа**.

Если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — комплексные числа, заданные в тригонометрической форме, то:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \quad (13.5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0. \quad (13.6)$$

Для комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ справедлива формула Муавра

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13.7)$$

Пример 1. Представить в тригонометрической форме комплексное число:

$$1) z = -5i; \quad 2) z = 4 - 4\sqrt{3}i; \quad 3) z = 2 - \sqrt{5}.$$

Решение 1. В данном случае $r = \sqrt{0 + (-5)^2} = 5$. Точка, изображающая данное число, лежит на отрицательной части оси Oy (рис. 13.2), поэтому $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ (можно счи-

тать также, что $\varphi = \frac{3\pi}{2}$).

Записываем число в тригонометрической форме:

$$z = 5 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

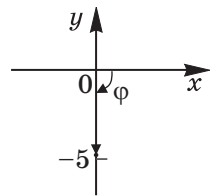


Рис. 13.2

2. Находим модуль заданного числа по формуле (13.1):

$$r = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8.$$

Для нахождения аргумента φ используем формулу (13.2):

$$\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{3}.$$

Учитываем то, что число z лежит в IV координатной четверти (рис. 13.3), по-

этому $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ (или $\varphi = \frac{5\pi}{3}$). Тогда, согласно

формуле (13.4), получаем:

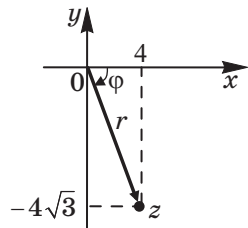
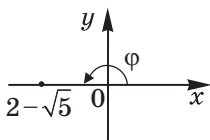


Рис. 13.3

$$z = 8 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

3. Находим модуль комплексного числа:

$$r = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2 + 0^2} = |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2.$$



Заданное число является отрицательным действительным числом (рис. 13.4), поэтому $\varphi = \pi$.

Запись заданного комплексного числа в тригонометрической форме имеет вид

Рис. 13.4

$$z = (\sqrt{5} - 2)(\cos \pi + i \sin \pi).$$

Пример 2. Выполнить в тригонометрической форме указанное действие над числами z_1, z_2 . Ответ записать в алгебраической форме:

1) $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 16 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$, $z_2 = \frac{1}{8} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$;

2) $z_1 \cdot z_2$, если $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$;

3) $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = \cos \frac{7\pi}{6} - i \sin \frac{7\pi}{6}$, $z_2 = \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right)$.

Решение. 1. Используя формулу (13.5), находим:

$$z_1 \cdot z_2 = 16 \cdot \frac{1}{8} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Учитывая, что $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ и $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, получаем: $z_1 \cdot z_2 = 2i$.

2. Сначала представим число z_1 в тригонометрической форме. Находим: $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Поскольку число z_1 лежит в IV координатной четверти и $\operatorname{tg} \varphi = -1$, то $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Следовательно,

$$z_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Теперь воспользуемся формулой (13.5):

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12}\right) \right) = \\ &= 12 \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6} \right) = 12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 6\sqrt{3} + 6i. \end{aligned}$$

3. Число z_1 не записано в тригонометрической форме. Запишем его в этой форме, используя четность функции косинус и нечетность функции синус. Получаем:

$$\cos\frac{7\pi}{6} - i \sin\frac{7\pi}{6} = \cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right).$$

По формуле (13.6) находим:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \left(1; \frac{1}{2}\right) \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{6}\right) \right) = \\ &= 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) = 1 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить z^9 , если $z = -1 - \sqrt{3}i$. Найти $\operatorname{Re} z^9$ и $\operatorname{Im} z^9$.

Решение. Представим заданное число в тригонометрической форме. Для него $r = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ и соответствующая точка лежит в III координатной четверти, т.е. $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Получаем:

$$z = 2 \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \right).$$

По формуле (13.7) находим:

$$\begin{aligned} z^9 &= 2^9 \left(\cos\left(9 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(9 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) \right) = 512(\cos 12\pi + i \sin 12\pi) = \\ &= 512(\cos 0 + i \sin 0) = 512. \end{aligned}$$

Поскольку $z^9 = 512 + 0i$, то $\operatorname{Re} z^9 = 512$, $\operatorname{Im} z^9 = 0$.

Пример 4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, для которых:

$$1) |z+1|=2; \quad 2) \frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{\pi}{3}; \quad 3) \begin{cases} |z| > 1, \\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение. 1. Пусть $z = x + yi$, тогда

$$z + 1 = x + yi + 1 = (x + 1) + yi.$$

Найдем модуль полученного комплексного числа:

$$|z + 1| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}.$$

Заданное равенство приобретает вид

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 2.$$

Возводим его в квадрат и приходим к уравнению окружности

$$(x + 1)^2 + y^2 = 2^2,$$

радиус которой равен 2, а центр находится в точке $C(-1, 0)$.

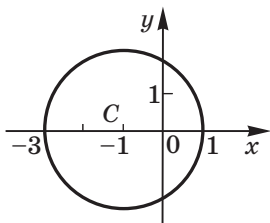


Рис. 13.5

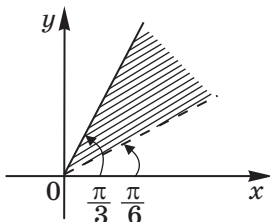


Рис. 13.6

Таким образом, множество точек, которые соответствуют заданному равенству $|z + 1| = 2$, лежат на данной окружности (рис. 13.5).

2. Пусть $\arg z = \varphi$. Из условия имеем $\frac{\pi}{6} < \varphi \leq \frac{\pi}{3}$. Геометрически это неравенство задает на плоскости множество точек, лежащих внутри угла с вершиной в точке $(0, 0)$, стороны которого составляют с положительным направлением оси Ox углы $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$, а также множество точек, лежащих на луче $\varphi = \frac{\pi}{3}$ (рис. 13.6).

3. Заданная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1, \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решением системы будет пересечение множества точек, лежащих вне окружности $x^2 + y^2 = 1$, и множества точек, лежащих внутри угла величиной $\frac{\pi}{4}$ и на его сторонах (рис. 13.7).

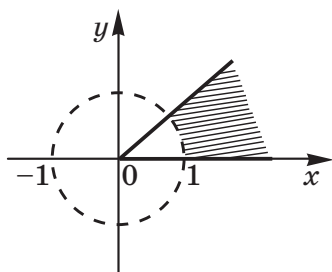


Рис. 13.7

Задания

I уровень

1.1. Покажите число на комплексной плоскости, представьте его в тригонометрической форме:

1) $z = -2 - 2i$; 2) $z = 8 - 8\sqrt{3}i$; 3) $z = (\sqrt{5} - 2)i$.

1.2. Покажите число на комплексной плоскости, представьте его в алгебраической форме, найдите $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$:

1) $z = 5\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$;

2) $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right)$.

1.3. Возведите в указанную степень число z , ответ запишите в алгебраической форме:

1) z^9 , если $z = \cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}$;

2) z^8 , если $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

1.4. Заданы числа $z_1 = -1 - i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $z_3 = 1 + \sqrt{3}i$, вычислите $\frac{4z_1 \cdot z_3}{\bar{z}_2}$ в тригонометрической форме.

II уровень

2.1. Представьте комплексное число в тригонометрической форме:

$$1) z = \frac{2+i}{1+3i}; \quad 2) z = (-0,5\sqrt{3} - 0,5i)^2.$$

2.2. Даны комплексные числа $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$ и $z_2 = 1 - i$. Представив их в тригонометрической форме, вычислите:

$$1) \overline{5z_1 \cdot z_2}; \quad 2) -\frac{z_1^3}{z_2}; \quad 3) \bar{z}_2^{20}.$$

2.3. Возведите в степень, результат запишите в алгебраической форме, найдите $\operatorname{Re} z$ и $\operatorname{Im} z$, если $z = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{36}$.

III уровень

3.1. Выполните действия и представьте ответ в алгебраической форме:

$$1) z = 2 \left(\frac{-\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}}{\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12}} \right); \quad 2) z = \frac{4 \left(\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) i}{(\sqrt{3} - i)(1 - i)^2}.$$

3.2. Пусть $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -4 + 3i$. Найдите действительные значения a и b , для которых $\frac{z_1}{z_2} = az_1 + bz_2$.

3.3. Изобразите множество точек комплексной плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют условию

$$x^2 + i - 2x + 2yi = y - 1 + \frac{4y^2 - 1}{2y - 1}i.$$

3.4. Найдите комплексное число z , удовлетворяющее уравнению

$$(i - z)(1 + 2i) + (1 - iz)(3 - 4i) = 1 + 7i.$$

3.5. Определите, при каких действительных значениях x и y комплексные числа $z_1 = 9y^2 - 4 - 10xi^5$ и $z_2 = 8y^2 + 20i^{11}$ являются сопряженными.

3.6. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, для которых:

$$1) \frac{\pi}{3} < \arg z \leq \frac{5\pi}{4}; \quad 2) 1 \leq |z + 1 - i| \leq 2;$$

$$3) \begin{cases} \arg z = \frac{\pi}{4}, \\ |z - 1 - i| = 2; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \operatorname{Re} z \geq 1, \\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

13.2. Показательная форма комплексного числа. Извлечение корней

Соотношение

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (13.8)$$

называется *формулой Эйлера*. Равенство (13.8) позволяет перейти от тригонометрической к показательной форме комплексного числа, и наоборот.

Запись комплексного числа в виде

$$z = re^{i\varphi}, \quad (13.9)$$

где r — модуль комплексного числа; φ — его аргумент, называется *показательной формой комплексного числа*.

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (13.10)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad z_2 \neq 0. \quad (13.11)$$

Если $z = re^{i\varphi}$, то верна формула Муавра в показательной форме:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (13.12)$$

Корнем n -й степени из комплексного числа z называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Корень n -й степени из комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ имеет n различных значений, которые в тригонометрической форме находят по формуле

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k \right) \right), \quad (13.13)$$

а в показательной — по формуле

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}, \quad (13.14)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$; $\sqrt[n]{r}$ – арифметическое значение корня.

Все значения корня $(\sqrt[n]{z})_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, расположены на окружности с центром в начале системы координат и радиусом $\sqrt[n]{r}$ в вершинах правильного вписанного в окружность n -угольника.

Пример 1. Заданы числа $z_1 = -2 + 2i$ и $z_2 = 8i$. Вычислить $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1^6}{z_2}$ в показательной форме. Ответы представить в алгебраической форме.

Решение. Запишем числа в показательной форме, используя формулу (13.9). Находим модуль и аргумент числа z_1 : $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = -1$ и число лежит во II координатной четверти, следовательно, $\varphi_1 = \frac{3\pi}{4}$. Получаем: $z_1 = 2\sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Для $z_2 = 8i$ имеем: $|z_2| = 8$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Тогда $z_2 = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Вычисляем произведение, используя формулу (13.10):

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \cdot 8e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = 16\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Для того чтобы записать полученный результат в алгебраической форме, представим его сначала в тригонометрической форме:

$$z_1 \cdot z_2 = 16\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right).$$

Используя значения тригонометрических функций, приходим к ответу:

$$z_1 \cdot z_2 = 16\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -16 - 16i.$$

По формулам (13.11) и (13.12) получаем:

$$\frac{z_1^6}{z_2} = \frac{(2\sqrt{2})^6}{8} e^{i\left(\frac{3\pi}{4} \cdot 6 - \frac{\pi}{2}\right)} = 64e^{i\frac{8\pi}{2}} = 64e^{i4\pi} = 64(\cos 4\pi + i \sin 4\pi).$$

Учитывая 2π -периодичность функций косинус и синус, получаем тригонометрическую форму записи результата, из которой следует алгебраическая форма:

$$\frac{z_1^6}{z_2} = 64(\cos 0 + i \sin 0) = 64(1 + i0) = 64.$$

Отметим, что период 2π «отбрасывается» и в показательной форме записи, т.е. в данном случае можно было вычислять без перехода к тригонометрической форме: $64e^{i4\pi} = 64e^{i0} = 64$.

Пример 2. Извлечь корень \sqrt{z} , если $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, используя тригонометрическую форму комплексного числа. Полученные значения корня записать в алгебраической форме и показать на комплексной плоскости.

Решение. Находим модуль и аргумент числа $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Получаем: $|z| = 1$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Приходим к записи заданного комплексного числа в тригонометрической форме:

$$z = 1 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Далее используем формулу (13.13), которая для данного случая имеет вид

$$w_k = (\sqrt{z})_k = \cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \pi k \right), k = 0, 1.$$

Из нее получаем: если $k = 0$, то

$$w_0 = (\sqrt{z})_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

если $k = 1$, то

$$w_1 = (\sqrt{z})_1 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

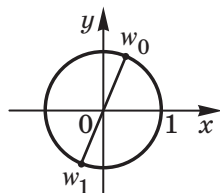


Рис. 13.8

(рис. 13.8).

Пример 3. Найти значения $\sqrt[3]{8i}$, используя показательную форму комплексного числа, и показать их на комплексной плоскости.

Решение. Находим модуль и аргумент числа $z = 8i$: $|z| = 8$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Получаем $z = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$. Тогда, используя формулу (13.14), имеем:

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
13. Комплексные числа	4
13.1. Модуль и аргумент. Тригонометрическая форма комплексного числа	4
13.2. Показательная форма комплексного числа. Извлечение корней	11
<i>Ответы</i>	16
14. Линейная алгебра	18
14.1. Матрицы и операции над ними.	18
14.2. Определители	28
14.3. Обратная матрица	34
14.4. Системы линейных алгебраических уравнений.	39
<i>Ответы</i>	47
15. Векторная алгебра	50
15.1. Векторы в пространстве. Линейные операции над векторами	50
15.2. Скалярное произведение векторов.	55
15.3. Векторное произведение	59
15.4. Смешанное произведение векторов	63
<i>Ответы</i>	67
16. Аналитическая геометрия	69
16.1. Прямая на плоскости	69
16.2. Кривые второго порядка	76
16.3. Плоскость в пространстве	89
16.4. Прямая в пространстве	93
16.5. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве	98
16.6. Поверхности второго порядка	103
<i>Ответы</i>	110
17. Предел функции и непрерывность	113
17.1. Предел функции в точке и на бесконечности.	113

17.2. Замечательные пределы	120
17.3. Эквивалентность бесконечно малых функций.	126
17.4. Односторонние пределы. Асимптоты графика функции . . .	130
17.5. Непрерывность функции. Классификация точек разрыва функции	137
<i>Ответы</i>	144
18. Дифференциальное исчисление.	146
18.1. Геометрический и физический смысл производной. Вычисление пределов с использованием производной	146
18.2. Логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно	153
18.3. Дифференциал функции	160
18.4. Производные и дифференциалы высших порядков	164
18.5. Формула Тейлора. Приближенные вычисления с использованием формулы Маклорена	170
18.6. Исследование функций	174
<i>Ответы</i>	191
19. Функции многих переменных	194
19.1. Основные понятия теории функций многих переменных . .	194
19.2. Частные производные и дифференциал первого порядка . .	200
19.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков	206
19.4. Касательная плоскость к поверхности. Экстремум функции двух переменных	211
19.5. Производная по направлению. Градиент.	214
<i>Ответы</i>	218
20. Неопределенный интеграл.	221
20.1. Понятие неопределенного интеграла и его свойства. Таблица интегралов	221
20.2. Методы замены переменной и поднесения под дифференциал.	227
20.3. Интегрирование некоторых выражений, содержащих квадратный трехчлен	232
20.4. Метод интегрирования по частям.	237
20.5. Рациональные функции. Интегрирование простейших дробей	241
20.6. Интегрирование тригонометрических функций	249
20.7. Интегрирование иррациональных функций.	257
<i>Ответы</i>	264

21. Определенный интеграл. Несобственные интегралы	269
21.1. Понятие определенного интеграла и его свойства.	269
21.2. Методы вычисления определенного интеграла	276
21.3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	282
21.4. Несобственные интегралы	294
<i>Ответы</i>	305
22. Дифференциальные уравнения	307
22.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	307
22.2. Однородные и линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.	313
22.3. Дифференциальные уравнения высших порядков	321
22.4. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	332
<i>Ответы</i>	336
23. Ряды	339
23.1. Числовые ряды. Знакоположительные ряды	339
23.2. Знакопеременные числовые ряды	349
23.3. Функциональные ряды	353
23.4. Степенные ряды.	358
23.5. Ряд Фурье	366
<i>Ответы</i>	376
24. Комбинаторика и теория графов	379
24.1. Задачи классической комбинаторики	379
24.2. Основные понятия теории графов	386
24.3. Графы и матрицы	396
<i>Ответы</i>	404
25. Теория вероятностей	406
25.1. Основные понятия теории вероятностей. Действия над событиями	406
25.2. Классическая и геометрическая вероятности и их свойства	410
25.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формулы Байеса	419
<i>Ответы</i>	427

Учебное издание

Майсеня Людмила Иосифовна
Калугина Марина Алексеевна
Ламчановская Марина Валерьевна и др.

**МАТЕМАТИКА
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ**

Учебное пособие

В двух частях

Часть 2

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректоры *О.В. Ракицкая, Т.К. Хваль*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой*

Подписано в печать 23.09.2014. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.

Гарнитура «NewtonС». Офсетная печать. Усл. печ. л. 22,68.

Уч.-изд. л. 19,1. Тираж 800 экз. Заказ 1540.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.

Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Открытое акционерное общество «Красная звезда».

Свидетельство о государственной регистрации издателя,
производителя и распространителя печатных изданий № 2/7 от 28.10.2013.

Юридический адрес: пер. 1-й Загородный, 3, 220073, Минск.

Почтовый адрес: ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.