МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Экономический факультет

Л.С. Павлова

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

(отд. «Менеджмент»)

Москва
2015

УДК 512.64
ББК 22.151.54я73
П121

Павлова Л. С.

П121 **Методическое пособие по линейной алгебре:** Учебное пособие. – М.: Экономический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова, 2015. – 44 с.

ISBN 978-5-906783-12-7

Линейной алгебре посвящено очень большое количество учебников, учебных пособий. Особенность читаемого курса «Математика» состоит в том, что линейная алгебра является лишь его частью. Курс «Математика» читается в первом семестре первого года обучения на отделении «Менеджмент». Линейная алгебра – это лишь часть курса. Необходимость в сжатые сроки ознакомить слушателей с основными понятиями, лежащими в основе этой науки, вызвало необходимость написать пособие, которое следует рассматривать как упрощенное изложение базового материала, включенного в курс лекций.

УДК 512.64
ББК 22.151.54я73

ISBN 978-5-906783-12-7

9 785906 783127

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 1

Элементы матричной алгебры

Основные понятия и обозначения

Матрица – прямоугольная таблица, содержащая набор элементов, упорядоченных по строкам и столбцам. Обозначение:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Размерность матрицы (m, n), где m – количество строк матрицы, n – количество столбцов матрицы, a_{ij} – элемент матрицы, i – номер строки, j – номер столбца матрицы.

Если $m = n$, матрица называется квадратной.

Если квадратная матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – она называется верхней треугольной матрицей. Легко представить нижнюю треугольную матрицу.

Совокупность элементов a_{ii} называется главной диагональю квадратной матрицы.

Если квадратная матрица имеет вид: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – она называется диагональной. Если все элементы главной диагонали диагональной матрицы равны единице, то матрица называется единичной и обозначается E.

Свойства матриц и действия с матрицами

1. Две матрицы А и В считаются равными, если они имеют одинаковые размеры и равны их соответствующие элементы $(a_{ij} = b_{ij})$.

2. Сумма матриц.

Суммировать можно только матрицы одинаковой размерности. Суммой матриц А $\{a_{ij}\}$ и В $\{b_{ij}\}$ является матрица С, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц А и В, т.е. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Умножение матрицы на действительное число.

При умножении матрицы на действительное число, каждый ее элемент умножается на это число.

Пример 2:

Если: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, $\alpha \in R$, то $C = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha & -\alpha \\ 3\alpha & 4\alpha & 6\alpha \end{pmatrix}$.

4. Свойства сложения матриц и умножения матриц на число:

$$A + B = D + A$$
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$
$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$
$$(\alpha\beta)A = (\alpha A)\beta$$

5. Умножение матриц.

Произведением двух матриц: A – размерностью (m, n) и B – размерностью (n, p), является матрица C – размерностью (m, p). Элементы матрицы С вычисляются по формуле: $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, p$.

Пример 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1(-1) + 2\cdot 3 + (-1)3 & 1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)(-2) \\ 3(-1) + 4\cdot 3 + 6\cdot 3 & 3\cdot 1 + 4\cdot 0 + 6(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 27 & -9 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц A и B невозможно, если число столбцов матрицы A не равно числу строк матрицы B.

Если матрицы A и B квадратные, размерностью (n, n), то их произведением будет матрица размерностью (n, n). Однако, в общем случае, $AB \neq BA$.

Если матрицы A и B квадратные и их произведением является единичная матрица (E), то матрицы являются взаимно обратными.

Будем считать , что матрица B является обратной для матрицы A и введем для обратной матрицы обозначение A^{-1} . Тогда: $AA^{-1} = E$.

Отметим, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

(Вычисление обратной матрицы приведено в разделе «Определители» и в разделе «Системы линейных алгебраических уравнений»).

6. Свойства произведения матриц:

$$
\begin{aligned}
&(AB)C = A(BC) \\
&(A+B)C = AC + BC \\
&A(BC) = AB + AC \\
&\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B), \alpha \in \Re \\
&(AB)^T = B^T A^T \\
&(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}
\end{aligned}
$$

Ранг матрицы

Введем некоторые обозначения и понятия.

Обозначим строки матрицы $A_1; A_2; \cdots; A_n$.

Запишем линейную комбинацию строк матрицы и приравняем ее нулю:

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0$, где α_i – коэффициенты линейной комбинации.

Определение: Если линейная комбинация строк матрицы равна нулю только при нулевых значениях коэффициентов α_i , то строки матрицы называются линейно независимыми.

Определение: Максимальное число линейно независимых строк матрицы называется рангом матрицы. ($r(A)$).

Утверждения:

- Ранг матрицы по строкам равен рангу матрицы по столбцам.
- Линейные преобразования строк (столбцов) матрицы не меняют ее ранга.

Иначе говоря, если к одной из строк матрицы прибавить другую строку, умноженную на некоторое действительное число, то ранг полученной матрицы останется равным рангу исходной матрицы.