

**Ю.В. Верюжский, А.Б. Гольшев, Вл.И. Колчунов,
Н.В. Клюева, Б.М. Лисицин, И.Л. Машков, И.А. Яковенко**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том II



**Издательство АСВ
Москва
2014**

**Ю.В. Верюжский, А.Б. Голышев, Вл.И. Колчунов,
Н.В. Ключева, Б.М. Лисицин, И.Л. Машков, И.А. Яковенко**

**СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ
МЕХАНИКЕ**

В ДВУХ ТОМАХ

Том II



Издательство АСВ
Москва
2014

УДК 69.05(042.4)
ББК Н 60 Я7
3 384

Рецензенты:

заслуженный деятель науки РФ, академик РААСН, д.т.н., профессор

Н.И. Карпенко

заслуженный деятель науки РФ, академик РААСН, д.т.н., проф профессор

В.И. Травуш

**Верюжский Ю.В., Гольшев А.Б., Колчунов Вл.И., Клюева Н.В.,
Лисицин Б.М., Машков И.Л., Яковенко И. А.**

Справочное пособие по строительной механике. В двух томах. Том II:
Учебное пособие. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 432 с.

ISBN 978-5-4323-0005-8 Том I

ISBN 978-5-4323-0007-2 Том II

Содержит основные методические и теоретические основы расчета стержневых систем на различные виды нагрузки, основы теории пространственных систем, пластин и оболочек.

Предназначено для студентов строительных специальностей ВУЗов, инженеров, аспирантов, научных работников.

ISBN 978-5-4323-0005-8 Том I

ISBN 978-5-4323-0007-2 Том II

© Издательский дом АСВ, 2014

© Колл. авторов, 2014

4. РАЗДЕЛ. ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Сложные инженерные сооружения состоят из множества разнородных элементов, различающихся материалом, формой, соотношением размеров, характером загрузки и т.п. Основным их особенностям, классификации, описанию применяемых физических и математических моделей посвящена настоящая глава.

Следует иметь в виду, что инженеру-проектировщику в любом случае придется иметь дело не с реальной конструкцией, а с ее моделью, в противном случае процесс проектирования сделался бы практически нереализуемым. В современной инженерной практике моделирование является многоэтапным процессом, который связан с решением многих физических и математических проблем, в том числе:

- моделирование материала и его свойств;
- моделирование связи между компонентами напряженно-деформированного состояния конструкции;
- моделирование формы конструкции;
- моделирование связей между отдельными, часто разнородными элементами конструкции;
- моделирование связей между конструкцией и основанием, обеспечивающих равновесие конструкции;
- моделирование внешних силовых воздействий на конструкцию.

В процессе создания науки о напряженно-деформированном состоянии материальных тел многократно делались попытки учесть их реальную структуру. Так, выдающиеся французские ученые О. Коши и Л. Навье, основоположники теории упругости, вначале пытались рассматривать твердое тело как совокупность материальных точек (молекул), удерживаемых на определенных расстояниях друг от друга силами взаимодействия, при этом предполагалось, что силы взаимодействия двух молекул направлены по прямой и линейно зависят от расстояния между ними. Однако на основе представления о молекулярной структуре вещества ввиду исключительно большого числа элементарных материальных частиц и ничтожно малых расстояний между ними (по сравнению с размерами тела), проследить за перемещениями каждой конкретной частицы оказалось невозможным; в качестве единственно приемлемой была принята гипотеза о распределении вещества тела непрерывно по всему его объему. Такая абстрактная модель, называемая статистической, позволила перекинуть мост между дискретной средой, каковой в реальности является твердое тело, и понятием непрерывного геометрического пространства, являвшегося в то время основой математического анализа. Именно такой подход позволил выразить перемещения точек твердого тела непрерывными функциями координат и ввести статистическое понятие напряжения как осредненной силы взаимодействия между частицами, расположенными по одну сторону от произвольной площадки, мысленно выделенной внутри тела, и частицами, расположенными по другую

ее сторону. В итоге Коши, Навье и Пуассон получили основные дифференциальные уравнения и соотношения теории упругости.

Кроме указанной гипотезы о непрерывной сплошной среде в теории упругости введены также гипотезы о линейной зависимости между напряжениями, деформациями, перемещениями и их производными, однородности (упругие свойства материала одинаковы во всех его точках) и изотропности (упругие свойства одинаковы во всех направлениях) твердого тела, что позволило теоретически сформулировать и практически использовать целый ряд важнейших физических и механических характеристик материала.

При проектировании инженерных сооружений, как правило, не удается ввести в расчет их реальную форму, а приходится довольствоваться ее упрощенным, идеализированным представлением, что позволяет применить имеющиеся в распоряжении проектировщика физические модели и математические методы. Моделирование формы и построение расчетной схемы сооружения – один из самых ответственных этапов процесса проектирования строительных объектов.

Таким образом, инженеру в любом случае следует быть готовым к тому, что результаты расчета сооружения, полученные с помощью самых современных математических методов и сверхмощных компьютеров, лишь приближенно выражают его действительное напряженно-деформированное состояние. Важно лишь, чтобы возникшие при этом погрешности не могли явиться одной из причин недопустимого отклонения основных характеристик готового сооружения от предъявляемых к нему эксплуатационных требований по прочности, деформативности, долговечности и пр.

Еще одной проблемой в современном проектировании инженерных сооружений является невозможность выполнения всего комплекса операций по их расчету и конструированию на одном количественном уровне допускаемых погрешностей. Так, например, перемещения и напряжения в сечениях идеализированной расчетной схемы металлического моста можно определить с любой наперед заданной точностью, в то же время погрешности моделирования узлов соединения элементов реальной конструкции или определения характеристик грунта в основании опор моста могут составить десятки процентов. Принятая в нормативных документах различных государств система коэффициентов запаса в определенной мере предохраняет проектировщика от неприятных неожиданностей; важное значение, особенно в неординарных ситуациях, приобретает тщательно продуманный эксперимент, а также интуиция и опыт специалиста, искусство эффективного анализа и синтеза достижений мировой строительной практики.

Идеализированными в большинстве случаев являются также расчетные схемы достаточно сложных конструкций опорных элементов и связей между отдельными частями сооружений. Наиболее широко применяются модели подвижного и неподвижного шарнирных соединений, а также жесткого защемления.

Безусловной абстракцией является также понятие «сосредоточенная сила», т.е. сила, действующая на участке поверхности тела нулевой площади или во внутренней области, объем которой равен нулю. В ряде задач такая абстракция

приводит к усложнению расчетной схемы, так как приходится принимать во внимание так называемые особенности напряженно-деформированного состояния тела, связанные с необходимостью учета бесконечно больших напряжений.

4.1. Массивные конструкции

Расчет массивных элементов сооружений при определенных условиях может быть с достаточной точностью выполнен в постановке трехмерной задачи теории упругости. Уравнения равновесия в декартовой системе координат (рис. 4.1, а) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В настоящее время в качестве основных неизвестных при решении данного класса задач чаще всего принимаются перемещения, в декартовой системе координат (рис. 4.1, а) уравнения равновесия в перемещениях записываются в виде:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + G \nabla^2 U + X &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + G \nabla^2 V + Y &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + G \nabla^2 W + Z &= 0; \end{aligned} \quad (4.2)$$

В уравнениях (4.1), (4.2):

U, V, W – перемещения соответственно в направлении координатных осей Ox, Oy, Oz ;

X, Y, Z – проекции вектора объемных сил на соответствующие оси;

Θ – объемное расширение, $\Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$;

∇^2 – оператор Лапласа, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$;

μ – коэффициент Пуассона;

$$\lambda, G - \text{упругие постоянные, } G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \lambda = \frac{\mu E}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)};$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, индекс в их обозначении обозначает ту ось, параллельно которой направлено соответствующее напряжение, одновременно этот индекс обозначает и нормаль к площадке, на которой это напряжение действует;

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ – касательные напряжения, первый индекс обозначает направление действия напряжения, второй – нормаль к площадке, на которой это напряжение действует.

В дальнейшем учитывается закон парности касательных напряжений

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz}.$$

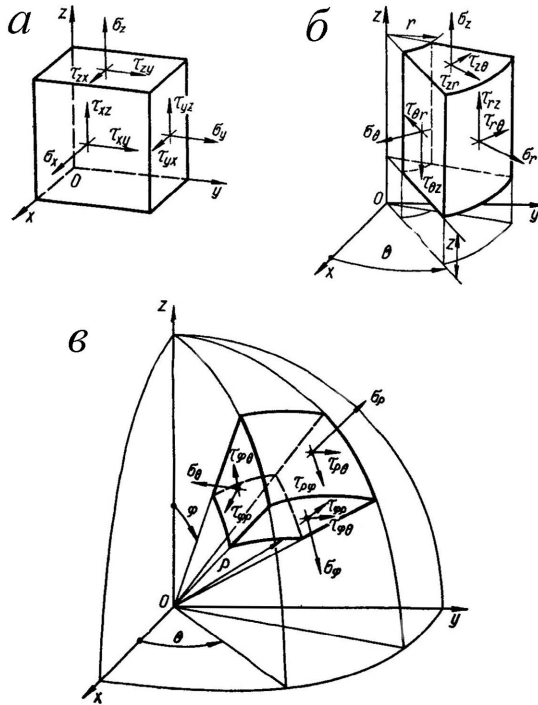


Рис. 4.1. Системы координат: а – декартова; б – цилиндрическая; в – сферическая

Деформации упругого тела могут быть выражены через его перемещения с помощью уравнений Коши, физический смысл деформаций следует из уравнений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial W}{\partial z}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4.3)$$

Напряженное состояние трехмерного тела в декартовых координатах выражается нормальными – $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ и касательными – $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ (рис. 4.1, а) напряжениями (здесь учтена парность касательных напряжений). Напряжения выражаются через деформации следующим образом (обобщенный закон Гука):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_x; \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_y; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; \\ \sigma_z &= \lambda\Theta + 2G\varepsilon_z; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Выражения для напряжений через перемещения могут быть получены подстановкой (4.3) в (4.4):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\Theta + 2G\frac{\partial U}{\partial x}; \quad \tau_{xy} = G\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right); \\ \sigma_y &= \lambda\Theta + 2G\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right); \\ \sigma_z &= \lambda\Theta + 2G\frac{\partial W}{\partial z}; \quad \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}\right).\end{aligned}\quad (4.5)$$

Кроме рассмотренных выше гипотез при выводе уравнений равновесия (4.2) и выражений (4.3), (4.4) приняты следующие допущения:

- перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами;
- относительные удлинения и относительные сдвиги в упругом материале пренебрежимо малы по сравнению с единицей;
- углы поворота малы по сравнению с единицей, квадраты углов поворота пренебрежимо малы по сравнению с относительными удлинениями и сдвигами.

Без таких допущений математический аппарат «классической» теории упругости усложнился бы до такой степени, что решение прикладных задач оказалось бы практически неосуществимым. Например, выражения для компонентов ε_x и γ_{xy} вместо (4.3) приняли бы вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2\right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y}.\end{aligned}$$

Следует, однако, заметить, что за немногими исключениями (резина, некоторые пластмассы) применяющиеся в строительстве материалы сохраняют упругие свойства только при весьма малых удлинениях и сдвигах.

Решить трехмерную задачу теории упругости значит найти функции $U(x,y,z)$, $V(x,y,z)$, $W(x,y,z)$, удовлетворяющие всюду внутри заданной области Ω уравнениям (4.2) при заданных значениях λ , G и всюду на границе S области заданным граничным условиям. В связи с тем, что данная граничная задача описывается дифференциальными уравнениями (4.2) второго порядка, в каждой точке границы в качестве граничных условий должен быть задан один из компонентов каждой из трех пар энергетически соответствующих пар U, F_x ; V, F_y ; W, F_z . Если на границе задана проекция вектора внешних сил на одну из координатных осей (F_x, F_y, F_z), то в качестве граничного условия для искомого перемещения записывается соответствующее уравнение системы

$$\begin{aligned} \lambda \Theta l + G \left(\frac{\partial U}{\partial x} l + \frac{\partial U}{\partial y} m + \frac{\partial U}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial V}{\partial x} l + \frac{\partial V}{\partial y} m + \frac{\partial V}{\partial z} n \right) &= F_x; \\ \lambda \Theta m + G \left(\frac{\partial V}{\partial x} l + \frac{\partial V}{\partial y} m + \frac{\partial V}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial U}{\partial y} l + \frac{\partial U}{\partial y} m + \frac{\partial U}{\partial y} n \right) &= F_y; \\ \lambda \Theta n + G \left(\frac{\partial W}{\partial x} l + \frac{\partial W}{\partial y} m + \frac{\partial W}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial U}{\partial z} l + \frac{\partial V}{\partial z} m + \frac{\partial W}{\partial z} n \right) &= F_z; \end{aligned} \quad (4.6)$$

здесь l, m, n – направляющие косинусы вектора F внешних сил, приложенных в данной точке (ν – направление внешней нормали к границе тела в рассматриваемой точке): $l = \cos(x, \nu)$, $m = \cos(y, \nu)$, $n = \cos(z, \nu)$.

Если на границе заданы все три компонента U, V, W вектора перемещений, то имеем дело с первой граничной задачей, в случае задания всех проекций вектора внешних сил – со второй граничной задачей, в других случаях граничная задача называется смешанной.

Кроме декартовой в инженерной практике широко применяются цилиндрическая система координат (рис. 4.1, б) с шестью независимыми компонентами тензора напряжений – $\sigma_z, \sigma_\theta, \sigma_r, \tau_\theta, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ и сферическая (рис. 4.1, в) – с независимыми компонентами $\sigma_\theta, \sigma_\rho, \sigma_\phi, \tau_{\rho\theta}, \tau_{\theta\phi}, \tau_{\phi\rho}$ тензора напряжений. В последние десятилетия проектировщикам инженерных сооружений, оснащенным мощной вычислительной техникой и современным математическим обеспечением, удается реализовывать все более «фантастические» в отношении формы сооружений замыслы архитекторов, особенно в области тонкостенных конструкций; в связи с этим получают практическое применение и другие системы координат.

Уравнения (4.2), (4.6) и соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния (4.3) – (4.5) представляют собой математическое описание физической модели упругого тела, основанной на рассмотренных выше гипотезах и допущениях, при этом данная модель является, по-видимому, простейшей из всех возможных для реального трехмерного тела с целым рядом свойств и особенностей, в данной модели не учитываемых. Ввод в рассмотрение любого из них приведет к усложнению задачи; разработка эффективных методов решения таких задач и в настоящее время остается весьма актуальной проблемой, постоянно привлекающей внимание специалистов.

Рассмотрим вкратце некоторые из практически важных классов задач механики твердого тела, возникших в связи с учетом специфических свойств различных видов строительных материалов и конструкций.

1. *Неоднородные конструкции, состоящие из материала с различными меняющимися в зависимости от координат упругими свойствами.* Неоднородность может быть непрерывной, когда упругие свойства тела от точки к точке меняются непрерывно, и дискретной, когда свойства изменяются скачкообразно в некоторых точках, на линиях или поверхностях. Так, например, непрерывно меняются свойства материала в конструкции, температура отдельных частей которой изменяется непрерывно, а упругие свойства материала зависят от температуры. Скачкообразно, от слоя к слою, свойства материала могут изменяться в слоистых конструкциях, в том числе в плитах, оболочках и ограждающих элементах зданий.

Специфической проблемой расчета многослойных конструкций является моделирование связи между соседними слоями и формулирование граничных условий. В случае непрерывной неоднородности упругие характеристики материала приходится вводить в основные соотношения и уравнения равновесия в виде непрерывных функций, что усложняет процесс решения задачи в целом.

2. *Анизотропные конструкции.* Материалы, упругие свойства которых во всех направлениях, проведенных через данную точку, различны, называются анизотропными. В зависимости от структуры тело может быть изотропным или анизотропным и одновременно однородным или неоднородным. В случае однородного упругого тела, обладающего анизотропией общего вида, зависимость между компонентом σ_x тензора напряжений и компонентами тензора деформаций в точке можно записать в виде:

$$\sigma_x = A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{14}\gamma_{xy} + A_{15}\gamma_{xz} + A_{16}\gamma_{yz}, \quad (4.7)$$

где коэффициенты A_{1j} , $j=1,2,\dots,6$, являются константами, независимыми упругими постоянными в случае однородного тела, и функциями координат – в случае тела неоднородного. Всего в выражения для шести компонентов тензора напряжений входит 36 коэффициентов A_{ij} , $i=1,2,\dots,6$; $j=1,2,\dots,6$; отсюда очевидны усложнения по сравнению с решением задачи теории упругости для изотропного тела (сравнить с выражениями (4.4), включающими две упругие константы).

Частным случаем анизотропии является ортотропия, когда различны те или иные характеристики материала в трех или двух взаимно перпендикулярных направлениях. Примером неоднородной ортотропной конструкции является опертая по контуру прямоугольная железобетонная плита с различным в направлениях, параллельных сторонам, армированием, а следовательно, и различными жесткостями при изгибе. Ортотропными являются также панели из фанеры, покрытия из гофрированного железа и т.п.

Расчет ортотропных плит часто удается свести к расчету изотропных конструкций подобного же типа с характеристиками, вычисленными на основе определенных принципов соответствия.

3. *Физически нелинейные задачи.* К физически нелинейным задачам в механике твердого тела относят задачи определения напряженно-деформированного состояния конструкций, в которых под действием заданной нагрузки проявляются пластические деформации. Под пластичностью в данном случае подразумевается свойство твердых тел необратимо изменять под действием механических нагрузок свои размеры и форму. В наиболее общем случае пластические свойства материала при загрузении конструкции проявляются в следующем:

- после того как напряжение в некоторой точке достигает величины, равной пределу упругости материала, линейная зависимость между деформациями и напряжениями нарушается, параметр, выражающий отношение напряжения к вызванной им деформации, превращается в функцию напряжения;

- при загрузении материала выше предела упругости возникают остаточные деформации, которые сохраняются после полной разгрузки конструкции;

- при повторном загрузении до появления пластических деформаций предел упругости (предел пропорциональности) увеличивается (так называемое упрочнение или наклеп); таким образом, одному и тому же напряженному состоянию могут соответствовать различные пластические деформации в зависимости от того, какой последовательностью напряженных состояний оно достигнуто (в зависимости от «истории загрузения»).

Теория пластичности идеализирует поведение реальных материалов при пластическом деформировании на основе различных гипотез. Одной из наиболее распространенных приближенных теорий является теория малых упруго-пластических деформаций (деформационная теория), которая исследует соотношения между интенсивностью напряжений

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$

и интенсивностью деформаций в той же точке

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2)}.$$

Для случая, когда интенсивность деформаций в данной точке возрастает, принимается, что величины σ_i и ε_i связаны между собой независимо от вида напряженного состояния и для каждого материала величина σ_i выражается определенной функцией $\Phi(\varepsilon_i)$ (так называемый закон связи обобщенного напряжения с обобщенной деформацией при активном нагружении). Этот закон устанавливает единство природы деформации изотропного тела в сложных и простых случаях напряженных состояний в пределах и за пределами упругости; тем самым обосновывается возможность решения многих задач теории пластичности методами, разработанными для упругих тел.

Деформационная теория, строго говоря, применима лишь в случае простого загрузения, когда все компоненты напряженного состояния возрастают пропорционально одному параметру.

Более общей является теория течения, связывающая приращения деформаций и напряжений с компонентами тензора напряжений.

4. *Еще одной до настоящего времени актуальной областью исследований остаются законы, уравнения и, особенно, методы решения граничных задач теории ползучести.* Дело в том, что законы и уравнения теории пластичности позволяют описывать напряженно-деформированное состояние тела, нагруженного за пределами упругости, в предположении, что при заданных нагрузках и температуре состояние это с течением времени остается неизменным. В действительности же напряжения и деформации, возникающие в стационарно нагруженном теле, с течением времени изменяются. Свойство материала, проявляющееся в непрерывном росте деформации с течением времени при постоянных напряжениях, называется ползучестью.

Ползучесть свойственна многим материалам, но в строительстве особенно важно учитывать это свойство при расчете и конструировании сооружений с применением бетона и железобетона. Ползучесть бетона может вызвать не только увеличение деформаций в конструкции, но и перераспределение напряжений, а в ряде случаев даже изменение расчетной схемы.

Теория ползучести и методы решения граничных задач близко примыкают к теории пластичности, однако в связи с разнообразием механических свойств твердых тел единая теория ползучести до настоящего времени не разработана.

5. *Одним из направлений развития современной науки о прочности материалов и конструкций является теория хрупкого разрушения.* Под хрупкостью понимают свойство материала разрушаться при небольшой, преимущественно упругой, деформации под действием напряжений, средний уровень которых ниже предела текучести. Образование хрупкой трещины и развитие процесса хрупкого разрушения связано с образованием малых зон пластической деформации. Относительная доля упругой и пластической деформации при хрупком разрушении зависит от свойств материала, определяемых, в частности, технологией изготовления и условиями работы конструкции. Возникновение растягивающих напряжений по трем главным осям, концентрация напряжений в местах резкого изменения сечения элементов конструкции, понижение температуры и увеличение скорости нагружения, а также повышение запаса упругой энергии нагруженного объекта способствуют переходу материала в хрупкое состояние.

Интерес к теории хрупкого разрушения в строительстве объясняется, в частности, и тем, что большинство высокожаропрочных конструкционных материалов обладают значительной хрупкостью. Прочность элементов сооружений, изготовленных из таких материалов, существенно определяется их локальной прочностью в наиболее напряженных или наиболее дефектных зонах. Поскольку дефекты имеют случайный характер, то статистическая трактовка всего процесса анализа причин разрушения имеет важное значение и многие исследования данной проблемы развиваются именно в этом направлении.

В рассмотренных выше областях механики твердого тела применяются различные физические и математические модели, методы и допущения, однако

для их практической реализации применительно к трехмерному твердому телу необходимо в любом случае один раз или несколько (в ходе итерационного процесса) решить граничную задачу, выражаемую уравнениями (4.2), (4.6), а в необходимых случаях – их соответствующими обобщениями. При этом в качестве неизвестных необходимо определить (часто в весьма сложных областях) три функции трех независимых переменных, что связано с рядом проблем, не решенных в полной мере и до настоящего времени. Поэтому естественным является стремление специалистов сделать процесс решения менее трудоемким и повысить его устойчивость за счет уменьшения числа неизвестных и независимых переменных, используя реальные особенности рассматриваемой конструкции. В то же время в ряде случаев приходится усложнять вычислительные процедуры, отказываясь от тех или иных упрощающих гипотез «классической» теории упругости, как, например, при определении больших прогибов тонкой плиты.

4.2. Плоская задача теории упругости

Если трехмерное тело находится в таких условиях, при которых перемещения или напряжения в направлении одной из трех координатных осей отсутствуют, то решение граничной задачи, основные ее уравнения и соотношения существенно упрощаются; в этом случае имеют дело с плоской задачей теории упругости.

4.2.1. Плоское напряженное состояние

Характерным примером плоского напряженного состояния является напряженно-деформированное состояние тонкой плиты, подверженной действию параллельных ее плоскости сил, приложенных к контуру и равномерно распределенных по ее толщине (рис. 4.2).

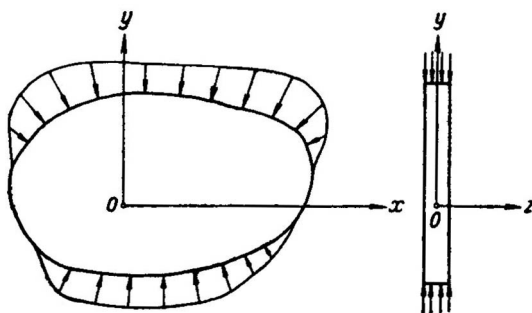


Рис. 4.2. К расчету тонкой плиты

В этом случае составляющие тензора напряжений σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} равны нулю на обеих поверхностях плиты, и можно полагать, что они отсутствуют и по

СОДЕРЖАНИЕ

Том I

Предисловие	3
Введение.....	4
Раздел 1. Расчет статически определимых систем.....	7
1.1. Основные этапы анализа стержневых систем.....	7
1.1.1. Последовательность численного решения задач строительной механики	8
1.1.2. Методика расчета статически определимых стержневых систем	19
1.1.3. Кинематичный анализ сооружений.....	25
1.1.4. Определение реакций в соединениях	40
1.2. Расчет стержневых систем на неподвижную нагрузку	48
1.2.1. Определение внутренних усилий и построение эпюр в рамах и балках	49
1.2.2. Определение усилий в стержнях ферм.....	73
1.2.3. Графическое определение усилий в фермах	81
1.2.4. Расчет трехшарнирной арки	87
1.2.5. Определение опасных сечений элемента конструкций и вычисление напряжений	100
1.2.6. Определение перемещений в стержневых системах.....	106
1.3. Расчет на подвижную нагрузку	119
1.3.1. Подвижная нагрузка. Линии влияния.....	119
1.3.2. Статический метод построения линии влияния в балках.....	123
1.3.3. Статический метод построения линий влияния в рамах	126
1.3.4. Построение линий влияния усилий в тришарнирной арке.....	128
1.3.5. Статический метод построения линий влияния в фермах	132
1.3.6. Статический метод построения линий влияния перемещений.....	143
1.3.7. Кинематический метод построения линий влияния	145
Раздел 2. Расчет статически неопределимых систем.....	157
2.1. Метод сил	157
2.1.1. Понятие о статически неопределимой системе	157
2.1.2. Составление системы канонических уравнений	158

2.1.3. Построение действительных эпюр внутренних усилий.....	160
2.1.4. Учет влияния температурных воздействий.....	162
2.1.5. Учет влияния смещения опор.....	163
2.1.6. Упрощение системы канонических уравнений при расчете симметрических конструкций	163
2.1.7. Примеры расчета статически неопределимых рам	164
2.1.8. Расчет неразрезных балок на неподвижную нагрузку..	194
2.1.9. Построение линий влияния усилий в неразрезной балке.....	204
2.1.10. Пример расчета неразрезной балки	205
2.1.11. Расчет балок на упругом основании	219
2.1.12. Расчет статически неопределимых ферм	240
2.1.13. Пример расчета статически неопределимой фермы ..	251
2.1.14. Расчет комбинированных систем.....	266
2.2. Метод перемещений.....	288
2.2.1. Основная система метода	291
2.2.2. Система уравнений метода перемещений.....	291
2.2.3. Построение действительных эпюр.....	299
2.2.4. Пример расчета несимметричной рамы в развернутой форме	300
2.2.5. Пример расчета несимметричной рамы в канонической форме	312
2.2.6. Особенности расчета симметричных рам	321
3. Раздел. Особые расчеты стержневых систем	248
3.1. Расчет стержневых систем на устойчивость.....	348
3.1.1. Основные понятия теории устойчивости	349
3.1.2. Расчет рам на устойчивость методом перемещений	352
3.1.3. Составление системы уравнений и уравнения устойчивости.....	361
3.1.4. Особенности расчета симметричных рам	363
3.1.5. Пример расчета рамы на устойчивость	364
3.2. Расчет стержневых систем на действие динамической нагрузки	380
3.2.1. Общие теоретические сведения	380
3.2.2. Понятие о силах инерции.....	383
3.2.3. Методы динамики сооружений. Степени свободы системы.....	384
3.2.4. Системы с одной степенью свободы	387
3.2.5. Свободные и вынужденные колебания системы.....	390
3.2.6. Динамический расчет плоской рамы	391
3.2.7. Пример динамического расчета системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления.....	399

3.2.8. Пример динамического расчета плоской рамы	403
3.3. Неординарный вариант метода начальных параметров для оценки физически нелинейного сопротивления системы «железобетонная конструкция – деформированное основание» при силовых и деформационных воздействиях....	425
3.3.1. Общие положения расчета.....	429
3.3.2. Напряженно – деформированное состояние и жесткость расчетного сечения.....	432
3.3.3. Напряженно – деформированное состояние системы «железобетонная балка – деформируемое основание» при силовых и деформационных воздействиях	436
3.3.4. Учет условий контакта при построении общего алгоритма расчета.....	449
3.3.5. Расчетная модель сопротивления в зонах с наклонными трещинами (РМС2)	452
3.3.6. Расчет систем стержневых железобетонных элементов с использованием расчетных моделей сопротивления.....	475
3.4. Сопротивление железобетонных стержневых систем, вызванные длительным действием внешней нагрузки	493
3.4.1. Природа длительных процессов, протекающих в бетоне и железобетоне	494
3.4.2. Теории ползучести бетона	506
3.4.3. Напряженное состояние железобетонных элементов... ..	513
3.4.4. Деформации железобетонных конструкций	534
3.4.5. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях	546
3.5. Нелинейная устойчивость железобетонных стержней при кратковременном и длительном нагружении	610
3.5.1. Параметры напряженно-деформированного состояния сечения. Уравнение механического состояния бетона.....	612
3.5.2. Аналитический аппарат для оценки напряженно-деформированного состояния сечения.....	615
3.5.3. Уравнение состояния стержня	623
3.5.4. Определение критических нагрузок	629
Список использованной литературы	632

СОДЕРЖАНИЕ

Том II

4. Раздел. Физическое и математическое моделирование	3
4.1. Массивные конструкции	5
4.2. Плоская задача теории упругости	12
4.2.1. Плоское напряженное состояние	12
4.2.2. Плоская деформация	14
4.3. Изгиб тонких плит	15
4.3.1. Соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния и основное дифференциальное уравнение изгиба	15
4.3.2. Граничные условия.....	19
4.3.3. Плита переменной толщины	21
4.3.4. Изгиб ортотропных плит	22
4.4. Приближенные модели изгиба тонких плит и области их практической применимости	23
4.4.1. О критериях оценки области применимости	23
4.4.2. Толстые плиты	26
4.5. Изгиб плиты при совместном действии по-перечной нагрузки и сил в ее срединной плоскости	30
4.6. Большие прогибы плиты	32
4.6.1. Гибкие плиты	32
4.6.2. Мембраны. Система уравнений равновесия	33
4.6.3. Граничные условия.....	34
4.7. Оболочки	35
4.7.1. К вопросу о классификации расчетных моделей оболочек	35
4.7.2. Геометрия оболочки	37
4.7.3. Деформация оболочки.....	40
4.7.4. Уравнения равновесия. Компоненты напряженного состояния на границе	44
4.7.5. Граничные условия.....	48
4.7.6. Безмоментная теория тонких оболочек	50
4.7.7. Пологие оболочки.....	56
4.8. Нити конечной жесткости (уточненные модели)	57
4.8.1. Вводные замечания и основные гипотезы	57
4.8.2. Дифференциальные уравнения состояния нити конечной жесткости	61
4.8.3. Влияние температурных воздействий на напряженно – деформированное состояние нити конечной жесткости	62
4.9. Гибкие нити	62

4.9.1. Основное уравнение прогиба нити	62
4.9.2. Расчет гибких нитей без учета упругости нити и собственного веса	64
4.9.3. Расчет гибких нитей с учетом упругости материала .	66
4.9.4. Расчет нитей с учетом упругости материала и температурных деформаций.....	67
Заключение.....	68
5. Раздел. Методы расчета строительных конструкций и сооружений.....	70
5.1. Метод конечных разностей.....	70
5.1.1. Выражения для производных в конечных разностях	70
5.1.2. Метод конечных разностей	76
5.1.3. Расчет балок при переменной жесткости основания методом конечных разностей.....	81
5.1.4. Метод конечных разностей для двумерных областей.....	84
5.1.5. Выражения для операторов в косоугольных сетках ...	
5.1.6. Дифференциальные операторы в прямоугольной пространственной системе координат.....	91
5.2. Метод коллокаций и его модификации.....	97
5.2.1. Метод коллокаций	99
5.2.2. О применении смешанных методов.....	99
5.2.3. Некоторые специальные формы метода коллокаций	108
5.2.4. Метод коллокаций с подобластями	109
5.3. Вариационные и вариационно-разностные методы	113
5.3.1. Вариационные принципы	116
5.3.2. Энергетическое пространство	117
5.3.3. Метод Ритца	127
5.3.4. Главные и естественные граничные условия.....	129
5.3.5. О применении метода Ритца к расчету строительных конструкций	133
5.3.6. Метод конечных элементов	134
5.3.7. Пример расчета неразрезной балки методом конечных элементов.....	140
5.3.8. Расчет балок на упругом основании методом конечных элементов.....	151
5.3.9. Пространственный конечный элемент для стержней....	153
5.3.10. Метод конечных элементов в задачах теории упругости.....	155
5.3.11. Треугольный конечный элемент в задаче о плоском напряженном состоянии	168

5.3.12. Пример решения задачи о плоском напряженном состоянии методом конечных элементов.....	171
5.3.13. Расчет тонких плит методом конечных элементов ..	173
5.3.14. Треугольные конечные элементы для тонкой изгибаемой плиты. К проблеме совместности конечных элементов и сходимости приближенного решения.....	176
5.3.15. Метод конечных элементов при расчете массивов ..	179
5.3.16. Метод Трэфтца.....	185
5.4. Проекционные и проекционно-разностные методы.....	186
5.4.1. Понятие о проекционном методе.....	186
5.4.2. Соотношения взаимности.....	189
5.4.3. Метод определяющих состояний.....	192
5.4.4. Гильбертово пространство возможных состояний.....	196
5.4.5. Некоторые основные понятия пространства H	204
5.4.6. Примеры применения метода определяющих состояний.....	206
5.4.7. Общая характеристика метода определяющих состояний.....	214
5.4.8. Понятие о регионально-проекционном методе.....	216
5.4.9. Пример применения регионально-проекционного метода.....	221
5.4.10. Ортогональные функции. Ряды Фурье.....	224
5.4.11. О классификации проекционных методов.....	240
5.4.12. Обобщенный проекционно-сеточный метод.....	242
5.4.13. Выражение компонентов искомого состояния в обобщенном проекционно-сеточном методе.....	244
5.4.14. Определяющие состояния.....	255
5.4.15. Формулы приближенного интегрирования.....	256
5.4.16. Пример применения обобщенного проекционно-сеточного метода.....	260
5.4.17. Приложение обобщенного проекционно-сеточного метода к решению задачи теории упругости о плоском напряженном состоянии.....	266
5.4.18. Реализация обобщенного проекционно-сеточного метода при расчете тел вращения сложной формы.....	269
5.4.19. Об одной методике оценки эффективности обобщенного проекционно-сеточного метода.....	27
5.5. Методы потенциала.....	278
5.5.1. Основные интегральные соотношения.....	280
5.5.2. Упругие потенциалы при различных аппроксимациях плотностей.....	289
5.5.3. Интегральные и функциональные разрешающие уравнения.....	306

5.5.4. Прямые и итерационные алгоритмы	312
5.5.5. Примеры расчета	319
5.5.6. Понятие о методе граничных элементов.....	329
5.5.7. Некоторые простые формы метода граничных элементов.....	334
5.5.8. Прямой метод граничных интегралов	350
5.6. О некоторых классах специальных функций, применяемых для решения задач механики твдого тела .	366
5.6.1. Гармонические функции	366
5.6.2. Бигармонические функции	370
5.6.3. Приведение уравнений теории упругости к бигармоническим уравнениям	373
5.6.4. Приложение гармонических функций к решению уравнений теории упругости	374
5.6.5. Полиномиальные решения уравнений теории упругости.....	379
5.6.6. О применении R функций при решении задач механики твердого тела для областей сложной формы.....	384
5.7. Методы предельного равновесия и линейного программирования	390
5.7.1. Методы предельного равновесия	390
5.7.2. Применение линейного программирования к задаче определения несущей способности.....	405
Заключение	408
Послесловие	409
Список использованной литературы.....	419

Учебное пособие

Юрий Васильевич **Верюжский**
Александр Борисович **Гольшев**
Владимир Иванович **Колчунов**
Наталья Витальевна **Клюева**
Борис Михайлович **Лисицин**
Игорь Леонидович **Машков**
Игорь Анатольевич **Яковенко**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том II

Компьютерная верстка: *Д.А. Матвеев*
Дизайн обложки: *Т.А. Негрозова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 01.04.14.
Формат 70x100/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. 27 п.л. Заказ №

ООО «Издательство АСВ», 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26,
отдел реализации к. 511, тел., факс: (499)183-56-83;
e-mail: iasv@iasv.ru, <http://www.iasv.ru/>