

**Ю.В. Верюжский, А.Б. Голышев, Вл.И. Колчунов,
Н.В. Клюева, Б.М. Лисицин, И.Л. Машков, И.А. Яковенко**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том 1



Издательство АСВ

Москва

2014

**Ю.В. Верюжский, А.Б. Гольшев, Вл.И. Колчунов,
Н.В. Ключева, Б.М. Лисицин, И.Л. Машков, И.А. Яковенко**

**СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ
МЕХАНИКЕ**

В ДВУХ ТОМАХ

Том I



Издательство АСВ
Москва
2014

УДК 69.05(042.4)
ББК Н 60 Я7
3 384

Рецензенты:

заслуженный деятель науки РФ, академик РААСН, д.т.н., профессор

Н.И. Карпенко

заслуженный деятель науки РФ, академик РААСН, д.т.н., проф профессор

В.И. Травуш

**Верюжский Ю.В., Гольшев А.Б., Колчунов Вл.И., Клюева Н.В.,
Лисицин Б.М., Машков И.Л., Яковенко И. А.**

Справочное пособие по строительной механике. В двух томах. Том I:
Учебное пособие. – М.: Издательство АСВ, 2014. – 640 с.

ISBN 978-5-4323-0005-8

Содержит основные методические и теоретические основы расчета стержневых систем на различные виды нагрузки, основы теории пространственных систем, пластин и оболочек.

Предназначено для студентов строительных специальностей ВУЗов, инженеров, аспирантов, научных работников.

ISBN 978-5-4323-0005-8

© Издательский дом АСВ, 2014

© Колл. авторов, 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Строительная механика

*Среди наук блистательных,
весьма изобретательных,
Механика строительная, –
самая доверительная
самая обаятельная,
самая привлекательная,*

*В ней строгость математики,
и логики искусства,
Игры воображения
по заданной тематике,
Пространств и «прокрустовых» ложе,
и педантичность слов.*

*Для творчества возможности, –
совсем не ограничены,
Коктейли разноцветия, –
в ней, как цветов цветение,
Вы приготовить можете
Даже «восточный плов».*

*Здесь и мостов изящество,
и зданий форм тектоника,
Подсветки и прожекторы
рисуют архитекторы, –
Рассчитывать конструкторам
с «механикой строительной»:
Их, сверхоригинальные проекты
с неординарными тоннелями, –
Из колец огромные фрагменты,
Соединяющими даже континенты.*

*Компьютера присутствие,
здесь строго обязательно,
Конструктору-строителю,
стать программистом и
системщиком желательно, –
Одних размеров матрицы,
здесь хватит на троих.*

*Отнуть не собутыльников, –
а тех маститых ГИПов,
Чье творчество в профессии,
исключает пропитых и жалких типов,
Замораживая в лед,
и влечет, как сладкий мед.*

ВВЕДЕНИЕ

Утро

*В рассветной дреме мысль взорвалось,
как юная воображала,
узрев себя царицей бала!
Но, застеснявшись, замерцала
наивной красотой кристалла...
Веселый луч, как запевала,
повел мелодию начала!*

*Хоть в голове темным-темно,
задумка только зреет, но
все лишнее удалено,
в лесу отобрано бревно:
полдела уже сделано!*

Строительная механика – наука, изучающая принципы и методы расчета различных сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. В широкой трактовке строительная механика включает такие дисциплины, как сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, строительная механика пластин и оболочек, теория упругости, теория пластичности и теория ползучести.

Одним из наиболее важных этапов проектирования строительных объектов есть их расчет – обоснованное прогнозирование состояния конструкций в различных условиях изготовления, транспортирования, монтажа и эксплуатации сооружения. Решение задач строительной механики есть основа расчета наиболее сложных объектов. Последовательность решения условно можно разбить на несколько характерных этапов, первым из которых является определение исходных данных и формулирование цели расчета.

Процесс строительного конструирования обычно носит характер итерационного вариантного подбора рационального решения. Для этого сначала на основе опыта проектирования и интуиции инженера полностью задаются предусмотренные параметры конструкции, по нормам определяются соответствующие нагрузки и рассчитываются возможные напряженно-деформируемые состояния объекта. Во время оценки качества проекта, как правило, выясняется, что предложенный начальный вариант «не подходит» по каким-либо критериям прочности, технологичности, экономичности и т. д. В результате анализа полученных данных изменяются параметры конструкции, формируются соответствующие исходные условия задачи и выполняется расчет нового варианта. Такой процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока проект не станет близок к оптимальному по всем основным критериям его оценки.

Авторы поставили перед собой задачу осветить в пределах возможного некоторые современные достижения в области проектирования и расчета строительных конструкций зданий и сооружений. Вооруженный знанием законов и правил строительной механики проектировщик получает возможность создавать сооружения не только надежные и прочные в эксплуатации, но также и экономичные. Строительная механика – это наука прикладная, призванная обеспечивать строительство инженерных сооружений современными методами статического и динамического расчета. Поэтому разработка и доведение научных исследований до результатов, пригодных для непосредственного использования при практических расчетах, может обеспечить надежную связь науки с производством.

К особенностям курса «Строительная механика» следует отнести ее практическую направленность с подбором примеров по всем разделам, которые методически в значительной степени помогают усвоению теоретического материала.

Один из примеров, приведенных в кинематическом анализе, связан с проблемной задачей железобетона, – анализом сопротивления в зоне наклонных трещин. Таким образом, читатель курса последовательно подключается к актуальным проблемам сопротивления в области строительных конструкций. С этой же целью, впервые в курсе «Строительная механика», включены специальные разделы, ознакамливающие читателя с сопротивлением железобетонных конструкций в сложных инженерно-геологических условиях с учетом физической нелинейности их сопротивления и просадки грунтов.

Учитывая последствия аварий, произошедших с неординарными зданиями и сооружениями в последние десятилетия, – должное внимание уделено длительным процессам, происходящим в железобетоне, остающимся до настоящего времени основным строительным материалом.

Уделено внимание решению задачи устойчивости железобетонных стержней при учете не только физической нелинейности, но и длительных процессов, – таким образом, задача максимально приближена к действительным условиям их работы. При этом, безусловно важно, что обучаемый не просто решает тестовые примеры, а начинает задумываться о реальных причинах сопротивления строительных конструкций зданий и сооружений и их наиболее сложном расчете.

В курсе не оставлен без внимания и основной метод современности, – метод конечных элементов, а также рассмотрены сопутствующий ему вариационные и вариационно-разностные и проекционно-сеточные методы в их современном развитии, которые представляют гамму инструментария строительной механики во всей полноте.

С целью лучшего запоминания и акцентирования основных зависимостей строительной механики, авторы сочли возможным изложить их основу в поэтической форме, отдавши должное в послесловии и основоположникам строительной механики и выдающимся ГИПам, и горе-профессорам, которых,

к сожалению, поражает настоящее время. Что в свою очередь заставляет еще и еще раз задуматься, и не только, и не столько студенческой молодежи.

В связи с появлением вычислительной техники строительная механика претерпела серьезные изменения. Вся историю развития строительной механики можно разделить на два периода: до появления вычислительной техники (классическая строительная механика) и после появления ЭВМ. В первой части настоящего курса рассматривается классическая строительная механика. Классические расчетные схемы (балки, рамы, фермы, арки, комбинированные системы) позволяют понять работу сооружений через сопротивление простейших расчетных схем. Это имеет большое значение для развития инженерной интуиции, без которой невозможно проектирование сооружений.

Появление вычислительной техники резко расширило рамки строительной механики. Стали развиваться эффективные методы расчета, позволяющие рассчитывать стержневые, плоские и пространственные системы с единых позиций. Поэтому во второй части курса представлены современные приближенные методы решения граничных задач: конечных разностей, коллокаций, вариационные, проекционные, потенциала, а также освещены их основные разрешающие соотношения. Отсюда предполагаемый круг читателей: студенты и аспиранты строительных вузов и факультетов, инженеры-проектировщики, а также специалисты других отраслей народного хозяйства, связанные по роду своей деятельности с прочностными расчетами различных конструкций в машино-, авиа- и судостроении.

Авторам хотелось без ущерба для содержания сделать учебник настолько краткий, насколько это возможно. Исходя из этого, редактированию подверглись не только некоторые параграфы, но и целые главы. Решалась своего рода задача оптимизации изложения, поскольку, наиболее трудно и важной частью является решение о том, что следует исключить.

В столь бурно развивающейся области, как проектирование и расчет строительных конструкций зданий и сооружений, очень трудно подготовить издание, которое одновременно обладало бы определенной завершенностью и было бы полностью свободно от недостатков. Поэтому авторы будут искренне признательны за критические замечания и пожелания по содержанию учебника.

*Читатель! Перед тобой тома
открытий новой эры:
«Толкай, коллега, сопромат –
и будешь инженером!»*

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{b \cdot I}$$

*В науку рвались предки.
Пришел черед ваш, детки!*

Раздел 1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

1.1. Основные этапы анализа стержневых систем

Уравнение изгиба балок

*Смеялся брус над «студиозом»:
«Ты не отесано, бревно!»
Но не страшны тому занозы:
он сделал сопромат давно!*

*Четырежды дифференцируй
функционал изгиба балки $\left(\frac{d^4 w}{dx^4}\right)$ -*

*и прозвучит, как плач эфира:
«О, мне достался жеребий жалкий!
Нагрузка – словно на троих (q),
а жесткость – только лишь EI ...»*

*Унылый скрип, смола – слеза ...
Тут стук:
«А ну-ка, вылезай!
Брусок, нетрусь!
Ты – хитрый гусь,
но намотай себе на ус,
что должен потрудиться брус:
M, Q и N познать на вкус!
Изволь-ка подчиниться силе (q),
чтоб гвоздь в тебя не вколотили!»*

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI}$$

1.1.1. Последовательность численного решения задач строительной механики

Для задач строительной механики типична такая постановка: известны все характеристики конструкции, необходимые для выполнения расчета; нужно определить прочность, жесткость, устойчивость и колебания схемы объекта. Требуемая точность результатов и глубина исследований определяется стадией проектирования и видом объекта.

Например, для проектирования подпорной стенки (рис. 1.1, *а*) исходные данные должны содержать весь объем необходимой информации о геометрических и физических параметрах конструкции: район строительства, гидрогеологические и сейсмические условия, интенсивность и распределение нагрузок, объемные массы, модули упругости, коэффициенты Пуассона, прочностные параметры, допустимые расчетные критерии и другие характеристики грунта и материала подпорной стенки. Для оценки прочности в опасных сечениях необходимо определить нормальные напряжения при сжатии с изгибом и касательные напряжения при сдвиге (рис. 1.1, *б*). Устойчивость подпорной стенки и земляного откоса оценивается с учетом возможного опрокидывания (рис. 1.1, *в, г*) и смещения (рис. 1.1, *е, ж*). Для определения жесткости конструкции необходимо найти величины абсолютных и относительных перемещений, поскольку развитие осадки может привести к недопустимому перекосу контура поверхности (рис. 1.1, *д*).

Реальные строительные объекты отличаются большой сложностью, и поэтому их расчет возможен только на основании введения упрощающих гипотез. С этой целью проектируемая конструкция заменяется *физической моделью* (ФМ), в которой идеализируются свойства материалов, работа элементов и характер внешних воздействий. В строительной механике ФМ сооружения, как правило, называется *расчетной схемой* (РС). Создавая РС, необходимо выделить наиболее существенные особенности объекта, которые определяют его напряженно-деформированное состояние при нагрузке. Разработка ФМ требует решения комплекса задач, из которых отметим следующие:

- замена несущих конструкций их РС – геометрическая идеализация основных элементов и отождествление их со сравнительно простыми телами, для которых известны методы исследования;
- выделение несущих конструкций – выявление частей и элементов, которые играют основную роль в работе сооружения;
- введение статически усредненных характеристик – физическое моделирование материала конструкций;
- объединение отдельных элементов ФМ в общую систему на основании упрощенного представления о работе соединительных узлов и опорных устройств;
- схематизация внешних нагрузок – выявление экстремальных ситуаций, описание которых регламентируется соответствующими нормами;

- общая оценка предполагаемого характера работы сооружения – возможность возникновения пространственной или двумерной деформации объекта, линейность или нелинейность задачи т.д.

При построении РС в зависимости от соотношения между основными размерами различают три типа элементов. Для *стержней* характерно преобладание длины над высотой и шириной поперечного сечения. В *тонкостенных элементах* толщина значительно меньше двух других размеров. Здесь выделяются *плиты (пластины)* – элементы со срединной плоскостью, *оболочки и складки* – элементы соответственно с криволинейной и ломаной срединной поверхностью. В *массивах* все три размера одного порядка.

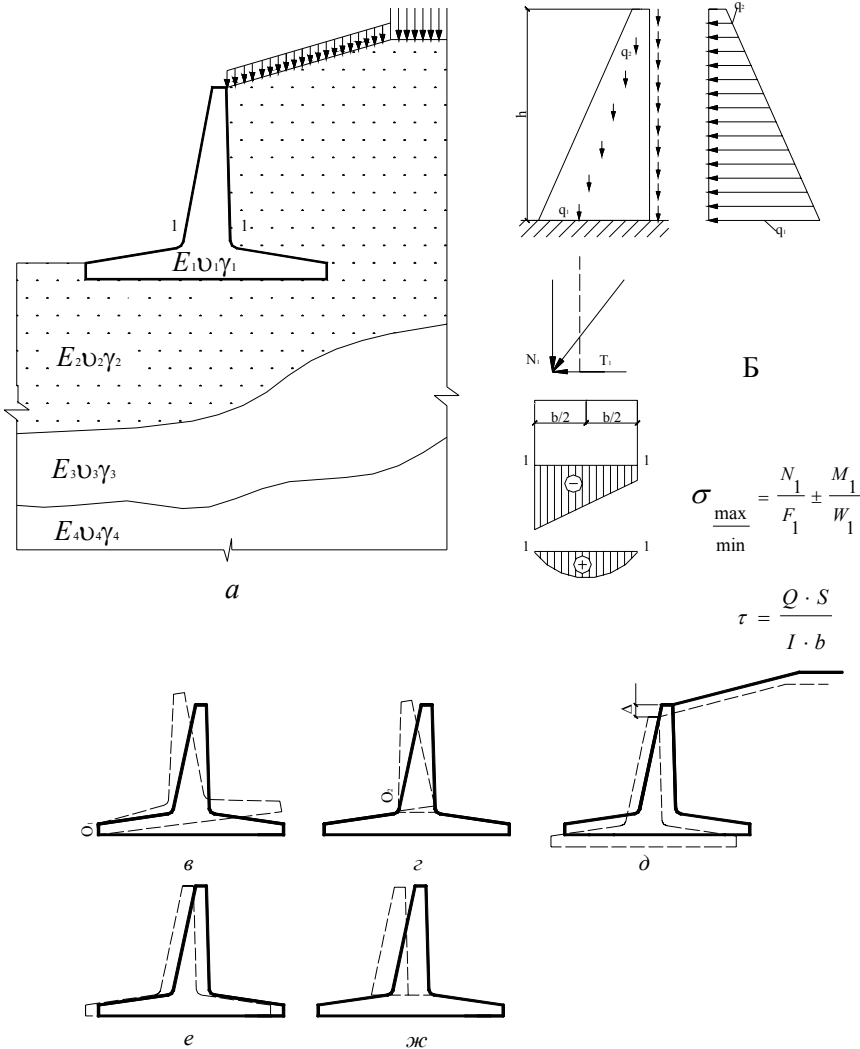


Рис. 1.1. Формирование исходных условий для проектирования

Как правило, объектом исследования в задачах строительной механики являются *системы*, которые в общем случае могут состоять из всех трех типов элементов РС. Наиболее простыми и часто используемыми являются *стержневые системы*, которые схематизируют каркасы строительных объектов.

Например, необходимо разработать расчетную схему одноэтажного однопролетного промышленного здания с крановым оборудованием (рис. 1.2)

Исходные данные: колонны и фундаменты – сборные железобетонные, покрытие – железобетонные ребристые плиты по металлическим сварным фермам.

Поперечник цеха промышленного здания можно проиллюстрировать расчетными схемами (рис. 1.3).

Наиболее простая расчетная схема представляет собой раму (рис. 1.3, а). Стойки рамы имеют ступенчатую жесткость, соответствующую жесткости колонн здания в надкрановой и подкрановых частях. Поэтому их можно рассматривать как стержни ступенчатой жесткости. Ригель моделируется стержнем постоянной жесткости, значение которой эквивалентно усредненной жесткости сварных ферм.

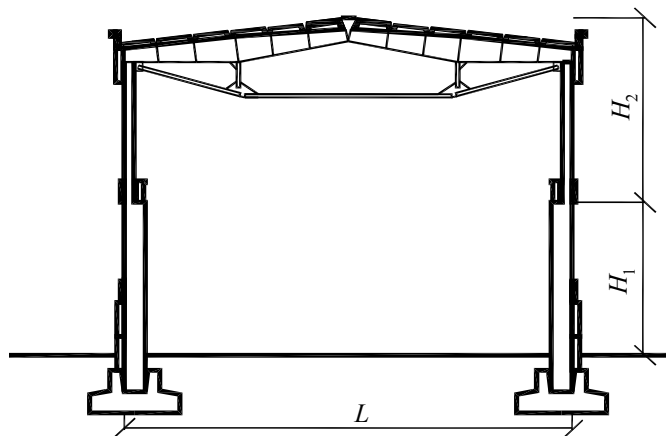


Рис. 1.2. Промышленное здание

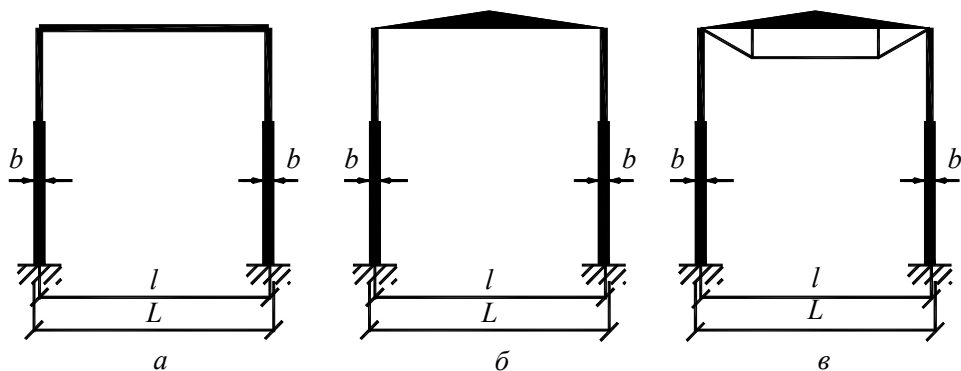


Рис. 1.3. Варианты расчетной схемы

При определении характера связей между стержнями рамы учитываются следующие соображения. Поскольку колонны замоноличены в стаканах фундаментов, опорные устройства можно рассматривать как жесткие защемления. Сварной узел между полуригелями, а также сварные узлы между полуригелями и стойками, можно трактовать как жесткие, поскольку сварка обеспечивает равенство углов поворота концов элементов, соприкасающихся с этими узлами.

Некоторое уточнение расчетной схемы может быть достигнуто путем учета переменности жесткости ригеля по длине пролета рамы (рис. 1.3, б), что более точно отображает ее реальную работу. При этом, величина жесткости в каждой точке по длине ригеля эквивалентна жесткости сварных ферм.

Дальнейшего уточнения расчетной схемы можно достичь, вводя в нее стержни нижнего пояса ферм и стоек (рис. 1.3, в). Сварные соединения этих стержней друг с другом, а также в узлах присоединения их к ригелю, приобретают вид цилиндрических шарниров. Это связано с тем, что жесткости на изгиб вводимых стержней невелики по сравнению с жесткостью на изгиб ригеля. Изгибающие моменты в этих стержнях будут незначительны. Следовательно, эти элементы могут трактоваться как стержни фермы, имеющие шарниры на обоих концах.

Пролет сооружения во всех случаях определяется как расстояние между центрами опорных площадок несущей конструкции покрытия:

$$l = L - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) = L - b.$$

Выполняя статический расчет поперечника, необходимо учитывать следующие нагрузки (рис. 1.4):

- собственный вес покрытия, который представляет собой равномерно распределенную по длине ригеля нагрузку интенсивностью g ;
- снеговая нагрузка p , значение которой определяется районом строительства и геометрией поперечника здания;
- ветровая нагрузка q также определяется действующими нормами в зависимости от района строительства и от конфигурации здания;
- давление кранов P_1 и P_2 на подкрановые элементы, а также силы T_1 и T_2 , которые передаются на колонны вследствие торможения крановой тележки;

Итоговая расчетная схема не может трактоваться однозначно, поскольку здесь с целью упрощения расчета не рассмотрены некоторые второстепенные факторы – смещение опор рамы, появление изгибающих напряжений в стержнях ферменного типа, неоднородность материала стержней, концентрация напряжений в сварных соединениях и т.д.

В зависимости от количества и весомости учтенных реальных факторов удается удовлетворить два основные конкурирующие требования: простоту расчета и достоверность результатов. Процесс прохождения проекта конструкции от эскизных вариантов до рабочей документации сопровождается последовательным усложнением ФМ. Например, на начальном этапе расчета подпорной стенки она может быть представлена в виде консольной балки, давление

грунта на которую задается треугольной эпюрой согласно теории Кулона (рис. 1.1, а). На одном из следующих этапов стенка имеет РС в виде рамы, опирающейся на упругое винклеровское основание, с учетом трения сдвига между грунтом и стенкой (рис. 1.1, б). При дальнейшем уточнении ФМ рама подпорной стенки включается в плоское послойное упругое пространство (рис. 1.1, в). Следующая стадия исследований требует учета пространственной работы стенки, изображенной в виде жестко связанных тонкостенных элементов (рис. 1.1, г). Усложняя ФМ объекта, необходимо учитывать не только возможные изменения геометрической схемы, но и нелинейность свойств материалов при деформировании во времени (пластичность, ползучесть и т.д.).

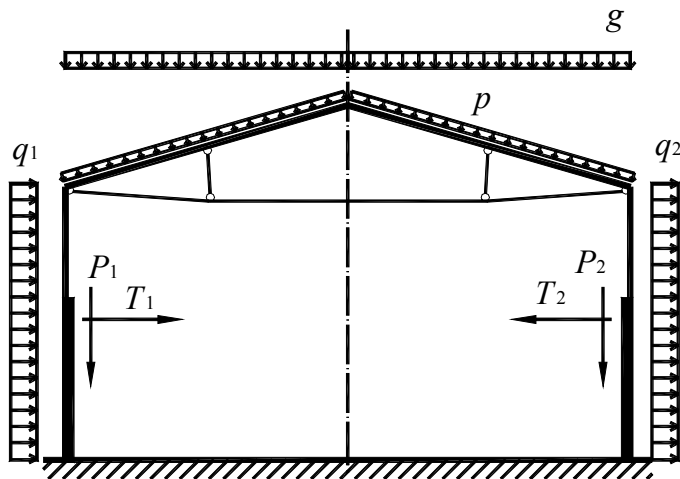


Рис. 1.4. Внешнее нагружение

Поведение ФМ описывается *математической моделью* (ММ) – совокупностью уравнений, чисел, символов, операторов и других математических соотношений, позволяющих превратить исходную информацию в результаты расчетов с целью отражения важных свойств изучаемого объекта.

Для формирования ММ задач строительной механики, как правило, вводится ряд понятий. Объект занимает *область* S , которая в зависимости от постановки задачи в общем случае может быть пространственной и определяется в системе координат x, y, z , а также двумерной – x, y или одномерной – x системой координат. Для описания одного объекта могут использоваться различные системы координат. Например, область S , которую занимает рама (рис. 1.5), может описываться в *глобальной* системе x, y , а какой-нибудь один ее стержень S_{ab} – *локальной системой* x_i, y_i

Области S могут быть ограниченными (например, подпорная стенка) или бесконечными (грунт, на который опирается подпорная стенка). Общая граница области S состоит из отдельных характерных участков $\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i$. Нагрузка

q , которая действует на объект S , принимается в общем смысле как совокупность всех рассматриваемых в задаче нагрузок (распределенных, сосредоточенных, моментных т.п.).

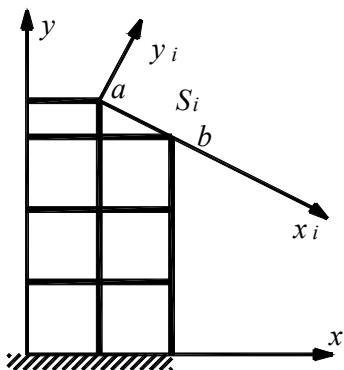


Рис. 1.5. Системы координат математической модели

Математическая формулировка задач строительной механики в общем случае очень сложна. Проследим на примере процесс необходимого последовательного уточнения ФМ.

В простейшем случае для расчета каркасов зданий и сооружений могут использоваться обычные дифференциальные уравнения, выведенные относительно неизвестной функции прогибов w в курсах строительной механики стержневых систем.

Необходимость решения двумерных задач для расчета тонкостенных элементов требует привлечения уравнений в частных производных, которые строятся в курсе теории упругости, строительной механики пластин и оболочек или при использовании еще более сложных теорий.

Дальнейшее уточнение ФМ, связанное с описанием объекта как массивного элемента, приводит к уравнениям пространственных задач теории упругости, содержащих неизвестные функции трех координат x, y, z , а при исследовании динамических процессов – еще и временную координату t .

В общем случае полная система уравнений статической пространственной задачи теории упругости включает пятнадцать уравнений в частных производных: три уравнения равновесия, шесть геометрических соотношений Коши или уравнений совместности деформаций и шесть соотношений Гука. Эта система является полной и строится относительно пятнадцати неизвестных: шесть напряжений, шесть относительных деформаций и три перемещения.

На следующих этапах исследования анализируют процессы нелинейного деформирования, что опирается на системы уравнений теории пластичности и ползучести (принципиальная сложность которых «на порядок» выше сложности соотношений линейно деформируемых сред).

В математическом моделировании строительной механики, как правило, вводится понятие *разрешающей функции* w , определение которой позволяет вычислить все характерные компоненты напряженно-деформированного состояния. Например, при известной функции прогибов w в плите (рис. 1.6) или в балке (рис. 1.7, а) углы поворотов, изгибающие моменты и перерезывающие силы вычисляются как производные от w .

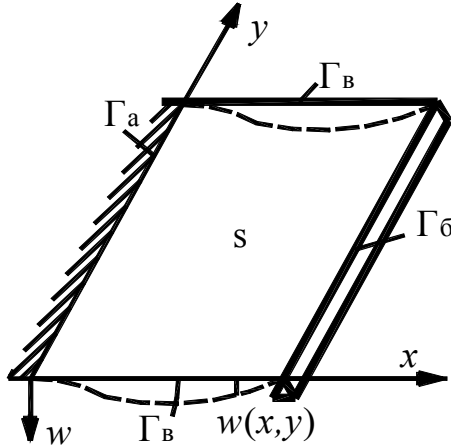


Рис. 1.6. Схема плиты

Термин «разрешающая функция w » будем использовать в общем понимании. Так, при решении пространственных задач теории упругости в перемещениях функцию w будем воспринимать как найденную совокупность функций всех трех характерных перемещений по координатам x, y, z . Если расчеты выполнялись в напряжениях, то функция w изображает систему из шести неизвестных напряжений. Соответственно при исследовании плоских задач функция w содержит данные о двух характерных перемещениях по осям x, y или является функцией Эри.

Оператор z обозначает математические операции, которые необходимо выполнить с функцией w , в результате чего образуется другая искомая функция v . В строительной механике операторы z , как правило, являются дифференциальными или интегральными. Так, ФМ стержня (рис. 1.7, а) описывается уравнением изгиба балки призматического сечения с жесткостью $EI(x)$:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI(x)}, \tag{1.1}$$

где

$$z = \frac{d^4}{dx^4}; \quad v = \frac{q(x)}{EI(x)}.$$

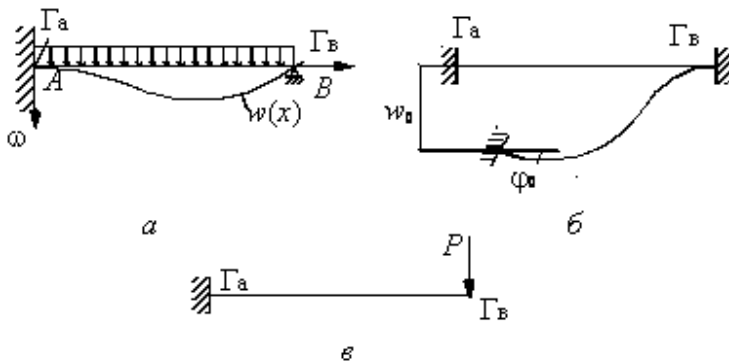


Рис. 1.7. Физические модели определения деформации балок

Аналогичная задача изгиба плиты (рис. 1.6) постоянной жесткости D под нагрузкой $q(x, y)$ описывается разрешающими бигармоническими уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (1.2)$$

где

$$z = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad v = \frac{q}{D}.$$

Поскольку характерные операторы в выражениях (1.1) и (1.2) квадратные, то для них часто используются обозначения в виде

$$z^{2m} = \frac{\partial^4}{\partial x^4}, \quad m = 2. \quad (1.3)$$

Для однозначности полной постановки задачи, кроме разрешающих уравнений вида (1.1) – (1.3), необходимо также задавать граничные условия. Так, изгиб балки (рис. 1.7, а) характеризуется на границе Γ_a при $x = 0$ отсутствием прогиба $w(0) = 0$ и углом поворота $\theta(0) = w'(0) = 0$, а на Γ_b при $x = l$ – отсутствием прогиба $w(l) = 0$ и изгибающим моментом $M(l) = EIw''(l) = 0$.

Аналогичная задача изгиба плиты (рис.1.6) характеризуется следующими граничными условиями:

в закреплении Γ_a

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (1.4)$$

на шарнирной опоре Γ_b

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad (1.5)$$

на свободном краю Γ_b

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0. \quad (1.6)$$

Для описания процесса математического моделирования в задачах строительной механики используются специальные термины для обозначения различных типов граничных условий. *Кинематическими* граничными условиями называют заданные функции перемещений на участках границы Γ (1.4) – (1.6), которые будем изображать в виде соотношения:

$$U(w) = v_0. \quad (1.7)$$

Например, при осадке защемленной опоры балки (рис. 1.7, б) граничные условия $U(\omega)$ на Γ_a будут изображаться прогибом $w = b_1$ и углом поворота $\theta = w' = b_2$.

При определении характера усилий (в частности изгибающих моментов $M = EI\omega''$ и перерезывающих сил $Q = EI\omega'''$) формируются *статические* граничные условия, которые обобщенно представлены в виде:

$$\Omega(w) = \rho_0. \quad (1.8)$$

Так, на границе Γ_b (рис. 1.7, в) условия $\Omega(w)$ будут включать значение момента $M = EIw'' = 0$ и перерезывающей силы $Q = EIw''' = P$.

При одновременном задании группы кинематических и статических функций (1.4) – (1.6) предоставляются *смешанные граничные условия*:

$$U\Omega(w) = v_0 \rho_0. \quad (1.9)$$

Так, на опоре Γ_b (рис. 1.7, а) задаются прогиб $w = 0$ и изгибающий момент $M = EIw'' = 0$.

Разрешающие уравнения вида (1.1), (1.2), определяемые по области S , с заданными граничными условиями (1.7) – (1.9) составляют математическую постановку *краевой задачи* строительной механики. Следует отметить, что для одной и той же ФМ могут использоваться различные ММ. Например, изгиб балки переменного сечения с жесткостью $EI(x)$, являющейся ФМ подпорной стенки (рис. 1.5, б), описывается уравнением $[EI(x) \omega'']'' = q$. При учете продольных сил N_1 , возникающих вследствие трения грунта под подпорной стенкой и массивности конструкции, разрешающие уравнения приобретают вид

$$[EI(x) \omega'']'' - N \omega'' = q. \quad (1.10)$$

Для горизонтального элемента рамы (рис. 1.5, в), опирающейся на упругое основание переменной жесткости $k(x)$, уравнение может быть еще больше осложнено по сравнению с выражением (1.10):

$$[EI \omega'']'' - N \omega'' + k\omega = q. \quad (1.11)$$

При этом совокупность граничных условий, которые приведены выше, должна быть дополнена условиями неразрывности деформации элементов рамы.

Как следствие из приведенных в этом разделе соотношений, различные типы задач строительной механики описываются ММ существенно различной сложности. Непосредственная реализация соотношений исследования напря-

женно–деформированного состояния тонкостенных и массивных тел с увеличением размерности задачи в таких случаях значительно возрастает. Однако все классы задач строительной механики имеют общую физическую природу и связаны между собой единством постановки, описанием и методикой решения. Изучение строительной механики стержневых систем отличается наибольшей простотой и наглядностью. Поэтому задачи этого класса часто используются для иллюстрирования реализации общей методики математического моделирования сложных объектов, которые исследуются в строительной механике. Поскольку оптимизация конструкции возможна только на основании детального и точного прогноза её поведения в различных условиях, первостепенное значение приобретают аналитические, численные и экспериментальные методы, с помощью которых можно исследовать проектируемый объект комплексно и достоверно с учетом разнообразных эксплуатационных режимов и многовариантного представления и комбинирования составляющих элементов.

Используемый расчетный аппарат должен быть настроен на изменения в широком диапазоне постановки задачи в зависимости от назначения объекта, его характеристик и стадии проектирования.

Арсенал средств решения различных проблем, возникающих при численном определении напряженно–деформированного состояния проектируемого объекта, достаточно развит. Его составляет ряд общих методов: вариационные, сеточные, вариационно–разностные, конечных элементов, распределения переменных, интегральных уравнений, функциональных преобразований и др. Многие из них теоретически не имеют принципиальных ограничений по применению и глубине исследований. Но каждый метод, который имеет существенные преимущества, не лишен недостатков. Нельзя назвать какой–то один аппарат расчета, имеющий большее преимущество по сравнению с другими для всех разновидностей граничных задач. Поэтому до недавнего времени выбор пути исследований определялся не только типами объектов и их нагрузками, но и существенно зависел от особенностей постановки конкретной задачи и наличия программного аппарата её решения.

С появлением и широким внедрением в инженерную практику программных комплексов резко изменилось представление о степени сложности задач строительной механики. Применение усовершенствованной вычислительной техники последних поколений позволяет использовать разрешающие дифференциальные и интегральные уравнения в наиболее общем виде, исключив многие из необходимых ранее упрощений, снижающих точность, универсальность и эффективность методов расчета. Появилась возможность рассматривать задачи в уточненных постановках и применять РС, с большей полнотой моделируя реальные условия существования объектов.

Особое значение в решении общих проблем строительства и в разработке методов строительной механики имеют математические методы получения оптимальных вариантов. Поиск наилучшего варианта является основой экономического планирования, управления, распределения ограниченных ресурсов, анализа производственных процессов, проектирования сложных объектов и реше-

ния других задач. Поэтому общие методы строительной механики, ориентированные на определение напряженно деформированного состояния исследуемой конструкции, дополняются математическим аппаратом оптимизации. Этот подход позволяет передать возможным вариантом суммарные количественные оценки качества. Один из наиболее эффективных средств решения задач оптимизации – аппарат линейного программирования.

Знакомство с различными методами численного решения граничных задач строительной механики показывает, что их не следует рассматривать как противоречивые. Умение пользоваться этими разнотипными средствами позволяет инженеру разносторонне и глубоко изучить возможные состояния проектируемой конструкции, выбрав наиболее эффективный вариант построения решения.

На точность итоговых результатов расчета влияет совокупность отдельных факторов. Инженеру необходимо оценить вес влияния каждого фактора, чтобы судить о достоверности численных исследований.

Наиболее существенное значение имеет *адекватность физической модели и объекта*. Поскольку реальные объекты отличаются большой сложностью, то для достижения требуемой точности результатов физическая модель должна достаточно полно отразить главные свойства объекта. Но если инженерная постановка задачи некорректна и адекватность между объектом и его моделью отсутствует, то никакие затраты на математически строгое решение не могут помочь получить достоверный результат.

На этом этапе необходимо аккуратно оценивать суммарную погрешность, возникающую вследствие введения различных упрощающих гипотез. Наиболее типичные гипотезы рекомендуются для применения после больших экспериментальных исследований. Поэтому накопленный опыт проектирования позволяет заблаговременно оценивать степень неточности того или иного упрощающего приема. Например, замена жестких узлов идеальными шарнирами и использование других известных упрощений при расчете ферм с центрированными в узлах стержнями не вносит в расчет погрешностей, превышающих 7% (рис.1.8). Весомость погрешностей такого типа может оцениваться на основании многочисленных экспериментов при составлении результатов, полученных при применении моделей, отличающихся различными степенями вводимых упрощений. Так, расчет ферм с жесткими рамными и идеальными шарнирными узлами может определить сравнительную погрешность этих вариантов моделирования.

Второй источник погрешностей возникает вследствие *перехода от непрерывного уровня ММ* (дифференциальных или интегральных разрешающих уравнений граничной задачи) *к дискретному уровню*, который позволяет получить численные результаты. Практически во всех методах решения функциональных уравнений они заменяются алгебраическими системами. Такая замена позволяет определить значения неизвестных величин, описанных непрерывными функциями, найденными аналитически по всей области объекта, в виде наборов отдельных функциональных компонентов или численных значений в дискретных узловых точках. Для гарантии получения достоверных результатов необходимо, чтобы при

СОДЕРЖАНИЕ

Том I

| | |
|--|------------|
| Предисловие | 3 |
| Введение..... | 4 |
| Раздел 1. Расчет статически определимых систем..... | 7 |
| 1.1. Основные этапы анализа стержневых систем..... | 7 |
| 1.1.1. Последовательность численного решения задач строительной механики | 8 |
| 1.1.2. Методика расчета статически определимых стержневых систем | 19 |
| 1.1.3. Кинематичный анализ сооружений..... | 25 |
| 1.1.4. Определение реакций в соединениях | 40 |
| 1.2. Расчет стержневых систем на неподвижную нагрузку | 48 |
| 1.2.1. Определение внутренних усилий и построение эпюр в рамах и балках | 49 |
| 1.2.2. Определение усилий в стержнях ферм..... | 73 |
| 1.2.3. Графическое определение усилий в фермах | 81 |
| 1.2.4. Расчет трехшарнирной арки | 87 |
| 1.2.5. Определение опасных сечений элемента конструкций и вычисление напряжений | 100 |
| 1.2.6. Определение перемещений в стержневых системах..... | 106 |
| 1.3. Расчет на подвижную нагрузку | 119 |
| 1.3.1. Подвижная нагрузка. Линии влияния..... | 119 |
| 1.3.2. Статический метод построения линии влияния в балках..... | 123 |
| 1.3.3. Статический метод построения линий влияния в рамах | 126 |
| 1.3.4. Построение линий влияния усилий в тришарнирной арке..... | 128 |
| 1.3.5. Статический метод построения линий влияния в фермах | 132 |
| 1.3.6. Статический метод построения линий влияния перемещений..... | 143 |
| 1.3.7. Кинематический метод построения линий влияния | 145 |
| Раздел 2. Расчет статически неопределимых систем..... | 157 |
| 2.1. Метод сил | 157 |
| 2.1.1. Понятие о статически неопределимой системе | 157 |
| 2.1.2. Составление системы канонических уравнений | 158 |

| | |
|---|------------|
| 2.1.3. Построение действительных эпюр внутренних усилий..... | 160 |
| 2.1.4. Учет влияния температурных воздействий..... | 162 |
| 2.1.5. Учет влияния смещения опор..... | 163 |
| 2.1.6. Упрощение системы канонических уравнений при расчете симметрических конструкций | 163 |
| 2.1.7. Примеры расчета статически неопределимых рам | 164 |
| 2.1.8. Расчет неразрезных балок на неподвижную нагрузку.. | 194 |
| 2.1.9. Построение линий влияния усилий в неразрезной балке..... | 204 |
| 2.1.10. Пример расчета неразрезной балки | 205 |
| 2.1.11. Расчет балок на упругом основании | 219 |
| 2.1.12. Расчет статически неопределимых ферм | 240 |
| 2.1.13. Пример расчета статически неопределимой фермы .. | 251 |
| 2.1.14. Расчет комбинированных систем..... | 266 |
| 2.2. Метод перемещений..... | 288 |
| 2.2.1. Основная система метода | 291 |
| 2.2.2. Система уравнений метода перемещений..... | 291 |
| 2.2.3. Построение действительных эпюр..... | 299 |
| 2.2.4. Пример расчета несимметричной рамы в развернутой форме | 300 |
| 2.2.5. Пример расчета несимметричной рамы в канонической форме | 312 |
| 2.2.6. Особенности расчета симметричных рам | 321 |
| 3. Раздел. Особые расчеты стержневых систем | 248 |
| 3.1. Расчет стержневых систем на устойчивость..... | 348 |
| 3.1.1. Основные понятия теории устойчивости | 349 |
| 3.1.2. Расчет рам на устойчивость методом перемещений | 352 |
| 3.1.3. Составление системы уравнений и уравнения устойчивости..... | 361 |
| 3.1.4. Особенности расчета симметричных рам | 363 |
| 3.1.5. Пример расчета рамы на устойчивость | 364 |
| 3.2. Расчет стержневых систем на действие динамической нагрузки | 380 |
| 3.2.1. Общие теоретические сведения | 380 |
| 3.2.2. Понятие о силах инерции..... | 383 |
| 3.2.3. Методы динамики сооружений. Степени свободы системы..... | 384 |
| 3.2.4. Системы с одной степенью свободы | 387 |
| 3.2.5. Свободные и вынужденные колебания системы..... | 390 |
| 3.2.6. Динамический расчет плоской рамы | 391 |
| 3.2.7. Пример динамического расчета системы с одной степенью свободы без учета сил сопротивления..... | 399 |

| | |
|--|------------|
| 3.2.8. Пример динамического расчета плоской рамы | 403 |
| 3.3. Неординарный вариант метода начальных параметров для оценки физически нелинейного сопротивления системы «железобетонная конструкция – деформированное основание» при силовых и деформационных воздействиях.... | 425 |
| 3.3.1. Общие положения расчета..... | 429 |
| 3.3.2. Напряженно – деформированное состояние и жесткость расчетного сечения..... | 432 |
| 3.3.3. Напряженно – деформированное состояние системы «железобетонная балка – деформируемое основание» при силовых и деформационных воздействиях | 436 |
| 3.3.4. Учет условий контакта при построении общего алгоритма расчета..... | 449 |
| 3.3.5. Расчетная модель сопротивления в зонах с наклонными трещинами (РМС2) | 452 |
| 3.3.6. Расчет систем стержневых железобетонных элементов с использованием расчетных моделей сопротивления..... | 475 |
| 3.4. Сопротивление железобетонных стержневых систем, вызванные длительным действием внешней нагрузки | 493 |
| 3.4.1. Природа длительных процессов, протекающих в бетоне и железобетоне | 494 |
| 3.4.2. Теории ползучести бетона | 506 |
| 3.4.3. Напряженное состояние железобетонных элементов... .. | 513 |
| 3.4.4. Деформации железобетонных конструкций | 534 |
| 3.4.5. Перераспределение усилий в статически неопределимых железобетонных конструкциях | 546 |
| 3.5. Нелинейная устойчивость железобетонных стержней при кратковременном и длительном нагружении | 610 |
| 3.5.1. Параметры напряженно-деформированного состояния сечения. Уравнение механического состояния бетона..... | 612 |
| 3.5.2. Аналитический аппарат для оценки напряженно-деформированного состояния сечения..... | 615 |
| 3.5.3. Уравнение состояния стержня | 623 |
| 3.5.4. Определение критических нагрузок | 629 |
| Список использованной литературы | 632 |

СОДЕРЖАНИЕ

Том II

| | |
|--|-----------|
| 4. Раздел. Физическое и математическое моделирование | 3 |
| 4.1. Массивные конструкции | 5 |
| 4.2. Плоская задача теории упругости | 12 |
| 4.2.1. Плоское напряженное состояние | 12 |
| 4.2.2. Плоская деформация | 14 |
| 4.3. Изгиб тонких плит | 15 |
| 4.3.1. Соотношения между компонентами напряженно-деформированного состояния и основное дифференциальное уравнение изгиба | 15 |
| 4.3.2. Граничные условия..... | 19 |
| 4.3.3. Плита переменной толщины | 21 |
| 4.3.4. Изгиб ортотропных плит | 22 |
| 4.4. Приближенные модели изгиба тонких плит и области их практической применимости..... | 23 |
| 4.4.1. О критериях оценки области применимости | 23 |
| 4.4.2. Толстые плиты | 26 |
| 4.5. Изгиб плиты при совместном действии по-перечной нагрузки и сил в ее срединной плоскости | 30 |
| 4.6. Большие прогибы плиты | 32 |
| 4.6.1. Гибкие плиты | 32 |
| 4.6.2. Мембраны. Система уравнений равновесия | 33 |
| 4.6.3. Граничные условия..... | 34 |
| 4.7. Оболочки..... | 35 |
| 4.7.1. К вопросу о классификации расчетных моделей оболочек | 35 |
| 4.7.2. Геометрия оболочки | 37 |
| 4.7.3. Деформация оболочки..... | 40 |
| 4.7.4. Уравнения равновесия. Компоненты напряженного состояния на границе | 44 |
| 4.7.5. Граничные условия..... | 48 |
| 4.7.6. Безмоментная теория тонких оболочек | 50 |
| 4.7.7. Пологие оболочки..... | 56 |
| 4.8. Нити конечной жесткости (уточненные модели) | 57 |
| 4.8.1. Вводные замечания и основные гипотезы | 57 |
| 4.8.2. Дифференциальные уравнения состояния нити конечной жесткости | 61 |
| 4.8.3. Влияние температурных воздействий на напряженно – деформированное состояние нити конечной жесткости | 62 |
| 4.9. Гибкие нити | 62 |

| | |
|--|------------|
| 4.9.1. Основное уравнение прогиба нити | 62 |
| 4.9.2. Расчет гибких нитей без учета упругости нити и собственного веса | 64 |
| 4.9.3. Расчет гибких нитей с учетом упругости материала . | 66 |
| 4.9.4. Расчет нитей с учетом упругости материала и температурных деформаций..... | 67 |
| Заключение..... | 68 |
| 5. Раздел. Методы расчета строительных конструкций и сооружений..... | 70 |
| 5.1. Метод конечных разностей..... | 70 |
| 5.1.1. Выражения для производных в конечных разностях | 70 |
| 5.1.2. Метод конечных разностей | 76 |
| 5.1.3. Расчет балок при переменной жесткости основания методом конечных разностей..... | 81 |
| 5.1.4. Метод конечных разностей для двумерных областей..... | 84 |
| 5.1.5. Выражения для операторов в косоугольных сетках ... | |
| 5.1.6. Дифференциальные операторы в прямоугольной пространственной системе координат..... | 91 |
| 5.2. Метод коллокаций и его модификации..... | 97 |
| 5.2.1. Метод коллокаций | 99 |
| 5.2.2. О применении смешанных методов..... | 99 |
| 5.2.3. Некоторые специальные формы метода коллокаций | 108 |
| 5.2.4. Метод коллокаций с подобластями | 109 |
| 5.3. Вариационные и вариационно-разностные методы | 113 |
| 5.3.1. Вариационные принципы | 116 |
| 5.3.2. Энергетическое пространство | 117 |
| 5.3.3. Метод Ритца | 127 |
| 5.3.4. Главные и естественные граничные условия..... | 129 |
| 5.3.5. О применении метода Ритца к расчету строительных конструкций | 133 |
| 5.3.6. Метод конечных элементов | 134 |
| 5.3.7. Пример расчета неразрезной балки методом конечных элементов..... | 140 |
| 5.3.8. Расчет балок на упругом основании методом конечных элементов..... | 151 |
| 5.3.9. Пространственный конечный элемент для стержней.... | 153 |
| 5.3.10. Метод конечных элементов в задачах теории упругости..... | 155 |
| 5.3.11. Треугольный конечный элемент в задаче о плоском напряженном состоянии | 168 |

| | |
|---|------------|
| 5.3.12. Пример решения задачи о плоском напряженном состоянии методом конечных элементов..... | 171 |
| 5.3.13. Расчет тонких плит методом конечных элементов .. | 173 |
| 5.3.14. Треугольные конечные элементы для тонкой изгибаемой плиты. К проблеме совместности конечных элементов и сходимости приближенного решения..... | 176 |
| 5.3.15. Метод конечных элементов при расчете массивов .. | 179 |
| 5.3.16. Метод Трэфтца..... | 185 |
| 5.4. Проекционные и проекционно-разностные методы..... | 186 |
| 5.4.1. Понятие о проекционном методе..... | 186 |
| 5.4.2. Соотношения взаимности..... | 189 |
| 5.4.3. Метод определяющих состояний..... | 192 |
| 5.4.4. Гильбертово пространство возможных состояний..... | 196 |
| 5.4.5. Некоторые основные понятия пространства H | 204 |
| 5.4.6. Примеры применения метода определяющих состояний..... | 206 |
| 5.4.7. Общая характеристика метода определяющих состояний..... | 214 |
| 5.4.8. Понятие о регионально-проекционном методе..... | 216 |
| 5.4.9. Пример применения регионально-проекционного метода..... | 221 |
| 5.4.10. Ортогональные функции. Ряды Фурье..... | 224 |
| 5.4.11. О классификации проекционных методов..... | 240 |
| 5.4.12. Обобщенный проекционно-сеточный метод..... | 242 |
| 5.4.13. Выражение компонентов искомого состояния в обобщенном проекционно-сеточном методе..... | 244 |
| 5.4.14. Определяющие состояния..... | 255 |
| 5.4.15. Формулы приближенного интегрирования..... | 256 |
| 5.4.16. Пример применения обобщенного проекционно-сеточного метода..... | 260 |
| 5.4.17. Приложение обобщенного проекционно-сеточного метода к решению задачи теории упругости о плоском напряженном состоянии..... | 266 |
| 5.4.18. Реализация обобщенного проекционно-сеточного метода при расчете тел вращения сложной формы..... | 269 |
| 5.4.19. Об одной методике оценки эффективности обобщенного проекционно-сеточного метода..... | 27 |
| 5.5. Методы потенциала..... | 278 |
| 5.5.1. Основные интегральные соотношения..... | 280 |
| 5.5.2. Упругие потенциалы при различных аппроксимациях плотностей..... | 289 |
| 5.5.3. Интегральные и функциональные разрешающие уравнения..... | 306 |

| | |
|---|------------|
| 5.5.4. Прямые и итерационные алгоритмы | 312 |
| 5.5.5. Примеры расчета | 319 |
| 5.5.6. Понятие о методе граничных элементов..... | 329 |
| 5.5.7. Некоторые простые формы метода граничных элементов..... | 334 |
| 5.5.8. Прямой метод граничных интегралов | 350 |
| 5.6. О некоторых классах специальных функций, применяемых для решения задач механики твдого тела . | 366 |
| 5.6.1. Гармонические функции | 366 |
| 5.6.2. Бигармонические функции | 370 |
| 5.6.3. Приведение уравнений теории упругости к бигармоническим уравнениям | 373 |
| 5.6.4. Приложение гармонических функций к решению уравнений теории упругости | 374 |
| 5.6.5. Полиномиальные решения уравнений теории упругости..... | 379 |
| 5.6.6. О применении R функций при решении задач механики твердого тела для областей сложной формы..... | 384 |
| 5.7. Методы предельного равновесия и линейного программирования | 390 |
| 5.7.1. Методы предельного равновесия | 390 |
| 5.7.2. Применение линейного программирования к задаче определения несущей способности..... | 405 |
| Заключение | 408 |
| Послесловие | 409 |
| Список использованной литературы..... | 419 |

Учебное пособие

Юрий Васильевич **Верюжский**
Александр Борисович **Гольшев**
Владимир Иванович **Колчунов**
Наталья Витальевна **Клюева**
Борис Михайлович **Лисицин**
Игорь Леонидович **Машков**
Игорь Анатольевич **Яковенко**

СПРАВОЧНОЕ ПОСОБИЕ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ

В ДВУХ ТОМАХ

Том I

Компьютерная верстка: *Д.А. Матвеев*
Дизайн обложки: *Т.А. Негрозова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 01.04.14.
Формат 70x100/16. Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. 40 п.л. Заказ №

ООО «Издательство АСВ», 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26,
отдел реализации к. 511, тел., факс: (499)183-56-83;
e-mail: iasv@iasv.ru, <http://www.iasv.ru/>