ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

$$\iint_D f(x,y)\,dS$$

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
технических специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования

В четырех частях
Часть 3

Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А.П. Рябушко*

6-е издание

Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 51(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73
И60

Авторы: *А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть*

Рецензенты: кафедра высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета; заведующий отделом теории чисел Института математики Национальной академии наук Беларуси доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Берник*

Индивидуальные задания по высшей математике :
И60 учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – Минск : Выш. шк., 2013. – 367 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2222-8.

Это третья книга комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов технических вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий.

Предыдущее издание вышло в 2009 г.

Для студентов инженерно-технических специальностей вузов. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям вузов, колледжей и техникумов.

УДК 51(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2222-8 (ч. 3)
ISBN 978-985-06-2000-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга продолжает комплекс учебных пособий под общим названием «Индивидуальные задания по высшей математике». Он написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380–450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс может быть использован также в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (В последнем случае из предлагаемого материала рекомендуется сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Данный комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических аудиторных занятий, самостоятельных (миниконтрольных) работ и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

В третьей книге комплекса «Индивидуальные задания по высшей математике» содержится материал по рядам, кратным и криволинейным интегралам и элементам теории поля. Ее структура аналогична структуре первых двух книг, а нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию. В Приложениях приведены двухчасовые контрольные работы для блочных экзаменов.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета, возглавляемому доктором технических наук, профессором Н.А. Микуликом, и заведующему отделом теории чисел Института математики Национальной академии наук Беларуси доктору физико-математических наук, профессору В.И. Featured Featured Бернику – за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ▶, а конец – ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (миниконтрольных) работ на 10–15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы предлагаются дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены двухчасовые контрольные работы (каждая – по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе – на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-12.1 означает, что АЗ относится к двенадцатой главе и является первым по счету. В третьей части пособия содержится 21 АЗ и 10 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-12.2 означает, что ИДЗ относится к двенадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе – номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-12.2 : 16 означает, что студент должен выполнять 16-й вариант из ИДЗ-12.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16 и т.д.

При выдаче ИДЗ студентам номера́ выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-12.2 : 1.2; 2.4; 3.6; 4.1; 5.15 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-12.2 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4, третью – из варианта 6, четвертую – из варианта 1 и пятую – из варианта 15. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Это позволяет проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. В вузе студенческие группы по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индиви-

дуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемую рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разбивается на блоки (модули), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла – двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Положение о РБМС см. в ч. 1 данного комплекса учебных пособий (прил. 5).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала гарантирует хорошие знания студента по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов можно разработать специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия, а также дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

12. РЯДЫ

12.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (12.1)$$

где $u_n \in \mathbf{R}$, называется *числовым рядом*. Числа $u_1, u_2, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*, число u_n — *общим членом ряда*.

Суммы

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ \ldots,\ S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

называются *частичными суммами*, а S_n — n-й *частичной суммой ряда (12.1)*. Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ существует и равен числу S, т.е. $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$, то ряд (12.1) называется *сходящимся*, а S – его *суммой*. Если $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ не существует (в частности, бесконечен), то ряд (12.1) называется *расходящимся*. Ряд

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

называется n-м *остатком ряда (12.1)*.

Если ряд (12.1) сходится, то

$$\lim_{n \to \infty} r_n = \lim_{n \to \infty} (S - S_n) = 0.$$

Пример 1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Установить сходимость этого ряда и найти его сумму.

▶ Запишем n-ю частичную сумму данного ряда и преобразуем ее:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Поскольку

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

то данный ряд сходится и его сумма $S = 1$. ◀

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \tag{12.2}$$

представляет собой сумму членов геометрической прогрессии со знаменателем q. Известно, что при $|q| < 1$ ряд (12.2) сходится и его сумма $S = a/(1-q)$. Если $|q| \geq 1$, то ряд (12.2) расходится.

Теорема 1 (необходимый признак сходимости ряда). *Если числовой ряд (12.1) сходится, то* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

Обратное утверждение неверно. Например, в *гармоническом ряде*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

общий член стремится к нулю, однако ряд расходится.

Теорема 2 (достаточный признак расходимости ряда). *Если* $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = a \neq 0$, *то ряд (12.1) расходится.*

Сходимость или расходимость числового ряда не нарушается, если в нем отбросить любое конечное число членов. Но его сумма, если она существует, при этом изменяется.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$.

▶Запишем общий член данного ряда:

$$u_n = \frac{n}{3n+1}.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{3n+1} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

т.е. ряд расходится.◀

Рассмотрим некоторые *достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами.*

Теорема 3 (признаки сравнения). *Если даны два ряда*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{12.3}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{12.4}$$

и для всех $n \geq n_0$ *выполняются неравенства* $0 < u_n \leq v_n$, *то:*

1) *из сходимости ряда (12.4) следует сходимость ряда (12.3)*;
2) *из расходимости ряда (12.3) следует расходимость ряда (12.4).*

В качестве рядов для сравнения целесообразно выбирать ряд, представляющий сумму членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$, а также гармонический (расходящийся) ряд.

Пример 3. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \ldots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \ldots . \qquad (1)$$

▶Для установления сходимости ряда (1) воспользуемся неравенством

$$u_n = \frac{1}{n \cdot 3^n} < \frac{1}{3^n} \ (n \geq 2)$$

и сравним данный ряд со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$, $q = \frac{1}{3} < 1$. Согласно признаку сравнения (см. теорему 3, п. 1) ряд (1) сходится.◀

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$.

▶Так как $\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} > \frac{1}{n}$ для любого $n \geq 2$, то члены данного ряда больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда. Значит, исходный ряд расходится.◀

Теорема 4 (признак Д’Аламбера). *Пусть для ряда (12.1)* $u_n > 0$ *(начиная с некоторого* $n = n_0$*) и существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q .$$

Тогда:

1) *при* $q < 1$ *данный ряд сходится;*

2) *при* $q > 1$ *ряд расходится.*

При $q = 1$ признак Д’Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда: он может и сходиться, и расходиться. В этом случае сходимость ряда исследуют с помощью других признаков.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}}$.

▸ Поскольку $u_n = \frac{n^2}{2^{n-1}}$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{2^n}$, то

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n-1}}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1 .$$

Следовательно, данный ряд сходится.◂

Теорема 5 (радикальный признак Коши). *Если, начиная с некоторого* $n = n_0$, $u_n > 0$ *и* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$, *то при* $q < 1$ *ряд (12.1) сходится, а при* $q > 1$ *расходится.*

При $q = 1$ радикальный признак Коши неприменим.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n$.

▸ Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$q = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{8n-1}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{8n-1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + 1/n}{8n - 1/n} = \frac{1}{8} < 1 .$$

Следовательно, данный ряд сходится.◂

Теорема 6 (интегральный признак Коши). *Пусть члены ряда (12.1) положительны, монотонно убывают и функция* $y = f(x)$, *непрерывная при* $x \geq a \geq 1$, *такова, что* $f(n) = u_n$. *Тогда ряд (12.1) и интеграл* $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Например, поскольку $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$, то *ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Сходимость многих рядов можно исследовать путем сравнения их с соответствующим рядом Дирихле.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+1)^2}$.

▸Положим, что $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. Эта функция удовлетворяет всем требованиям интегрального признака Коши. Тогда несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^{B} \frac{2x}{(x^2+1)^2}dx = -\lim_{B\to\infty}\frac{1}{(x^2+1)}\Bigg|_1^B = \frac{1}{2},$$

т.е. сходится, а значит, данный ряд также сходится.◂

Числовой ряд (12.1), члены u_n которого после любого номера N $(n>N)$ имеют разные знаки, называется *знакопеременным.*

Если ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{12.5}$$

сходится, то ряд (12.1) также сходится (это легко доказывается) и называется *абсолютно сходящимся.* Если ряд (12.5) расходится, а ряд (12.1) сходится, то ряд (12.1) называется *условно (неабсолютно) сходящимся.*

При исследовании ряда на абсолютную сходимость используются признаки сходимости рядов с положительными членами.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\alpha}{n^2}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

▸Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, т.е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin n\alpha|}{n^2}$ $(\alpha \in \mathrm{R})$. Так как $|\sin n\alpha| \le 1$, то члены исходного ряда не больше членов ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ $(\alpha = 2)$, который, как известно, сходится. Следовательно, на основании признака сравнения (см. теорему 3, п. 1) данный ряд сходится абсолютно. ◂

Ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots, \tag{12.6}$$

где $u_n > 0$, называется *знакочередующимся рядом.*

Теорема 7 (признак Лейбница). *Если для знакочередующегося ряда (12.6)* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$*, то ряд (12.6) сходится и его сумма S удовлетворяет условию* $0 < S < u_1$.

Следствие. Остаток r_n *ряда (12.6) всегда удовлетворяет условию* $|r_n| < u_{n+1}$.

Например, ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

сходится, так как выполнены условия признака Лейбница. Он сходится условно, так как ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$ расходится.

Абсолютно сходящиеся ряды (в отличие от условно сходящихся) обладают свойствами сумм конечного числа слагаемых (например, от перемены мест слагаемых сумма не меняется).

Верна следующая

Теорема 8. *Если числовой ряд сходится условно, то, задав любое число а, можно так переставить члены ряда, что его сумма окажется равной а. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.*

Проиллюстрируем теорему 8 на примере. Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots = S.$$

Переставим его члены так, чтобы после каждого положительного члена стояли два отрицательных. Получим:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} + \ldots .$$

Сложим теперь каждый положительный член с последующим отрицательным:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots\right) = \frac{1}{2}S.$$

Очевидно, что сумма исходного ряда уменьшилась вдвое!

Пример 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}. \qquad (1)$$

▶Так как члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 0$, то, согласно признаку Лейбница, ряд (1) сходится.

Рассмотрим теперь ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1), т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}, \qquad (2)$$

общий член которого задается функцией $f(x) = \dfrac{2x+1}{x(x+1)}$ при $x = n$. Имеем:

$$\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x(x+1)}dx = \lim_{B\to\infty}\int_1^B \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \lim_{B\to\infty}(\ln|x| + \ln|x+1|)\Big|_1^B = \lim_{B\to\infty}(\ln B(B+1) - \ln 2) = \infty .$$

Следовательно, ряд (2) расходится, и поэтому ряд (1) сходится условно. ◂

Пример 10. Вычислить сумму ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

с точностью $\delta = 0{,}001$.

▸Всякая n-я частичная сумма сходящегося ряда является приближением к его сумме с точностью, не превосходящей абсолютной величины остатка этого ряда. Выясним, при каком количестве членов n-й частичной суммы выполняется неравенство $|r_n| \le \delta$.

Для данного ряда

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \ldots .$$

Так как $(n+1)! < (2n+2)! < (2n+3)! < \ldots$, то

$$r_n \le \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

Путем подбора легко определить, что $r_n < \dfrac{1}{120 \cdot 16} < 0{,}001$ при $n = 4$. Следовательно, сумма данного ряда (с точностью $\delta = 0{,}001$)

$$S \approx S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = 0{,}648 .$$ ◂

Пример 11. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$$

с точностью $\delta = 0{,}001$.

▸Так как данный ряд – знакочередующийся, сходящийся, то величина отброшенного при вычислении остатка ряда, который также является знакочередующимся, не превосходит первого отброшенного члена (на основании следствия из признака Лейбница). Нужное число членов n найдем путем подбора из неравенства $\dfrac{1}{n^2 \cdot 2^n} \le 0{,}001$. При $n = 6$ последнее неравенство выполняется, значит, если отбросить в данном ряде все члены, начиная с шестого, то требуемая точность будет обеспечена. Следовательно,

$$S \approx S_5 = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800} = 0{,}449 .◄$$

При сравнении рядов часто целесообразнее использовать не теорему 3, а так называемую *теорему сравнения в предельной форме*, которая является следствием теоремы 3.

Теорема 9. *Если ряды (12.3) и (12.4) с положительными членами таковы, что существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = a > 0 , \ a \neq \infty ,$$

то оба ряда или сходятся, или расходятся.

Пример 12. Исследовать на сходимость ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha} \pm \beta \ln n} , \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0 .$$

►Сравним данные ряды с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Тогда получим:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\alpha} \pm \beta \ln n}{n^{\alpha}} = 1 \pm \beta \lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 1 \neq 0 .$$

Следовательно, данные ряды ведут себя как ряд Дирихле: при $\alpha > 1$ сходятся, при $0 < \alpha \leq 1$ расходятся.◄

АЗ-12.1

1. Доказать сходимость ряда и найти его сумму:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}$.

(*Ответ:* а) 1/3; б) 5/4.)

2. Исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n^3 - 1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{2^n(n+2)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n^2+2n}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

3. Доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n)!}{a^{n!}} = 0$ при $a > 1$.

4. С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+2n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$;

в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

Самостоятельная работа

1. 1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n+5^n}{15^n}$ и найти его сумму. (*Ответ:* 3/4.)

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3}$.

2. 1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ и найти его сумму. (*Ответ:* 1/2.)

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+4)^2}$.

3. 1. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ и найти его сумму. (*Ответ:* 1/6.)

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$.

АЗ-12.2

1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n \cdot 2^{-n}$;

в) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2-9}$;

г) $\sum\limits_{n=4}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{6n+5}$;

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\alpha n)}{n^2+1}$;

е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$.

2. Составить разность двух расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ и исследовать на сходимость полученный ряд.

3. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^2}$ с точностью $\delta = 0{,}01$. (*Ответ:* 0,58.)

4. Сколько первых членов ряда достаточно взять, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, меньшую, чем 10^{-6}:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$?

(*Ответ:* а) $n = 10^3$; б) $n = 10^6$.)

Самостоятельная работа

1. 1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{1}{n\ln^2 n}$.

2. Найти приближенное значение суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(0{,}6)^n}{n^2+1}$, ограничившись тремя его членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений. (*Ответ:* $S = 0{,}250$, $\delta = 0{,}008$.)

2. 1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{\ln n}{n}$.

2. Найти приближенное значение суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(0{,}7)^n}{(n-1)!}$, ограничившись тремя его первыми членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений. (*Ответ:* $S = 0{,}38$, $\delta = 0{,}04$.)

3. 1. Исследовать на условную и абсолютную сходимости ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{n^2}{3^n}$.

2. Сколько первых членов нужно взять в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$, чтобы их сумма отличалась от суммы ряда на величину, не превосходящую 0,001?

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие - - - 3
Методические рекомендации - - - 4

12. Ряды - - - 7

12.1. Числовые ряды. Признаки сходимости числовых рядов - - - 7
12.2. Функциональные и степенные ряды - - - 18
12.3. Формулы и ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды - - - 27
12.4. Степенные ряды в приближенных вычислениях - - - 33
12.5. Ряды Фурье - - - 40
12.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 12 - - - 51
12.7. Дополнительные задачи к гл. 12 - - - 148

13. Кратные интегралы - - - 150

13.1. Двойные интегралы и их вычисление - - - 150
13.2. Замена переменных в двойном интеграле. Двойные интегралы в полярных координатах - - - 159
13.3. Приложения двойных интегралов - - - 163
13.4. Тройной интеграл и его вычисление - - - 173
13.5. Приложения тройных интегралов - - - 179
13.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 13 - - - 184
13.7. Дополнительные задачи к гл. 13 - - - 223

14. Криволинейные интегралы - - - 226

14.1. Криволинейные интегралы и их вычисление - - - 226
14.2. Приложения криволинейных интегралов - - - 237
14.3. Индивидуальные домашние задания к гл. 14 - - - 242
14.4. Дополнительные задачи к гл. 14 - - - 269

15. Элементы теории поля - - - 271

15.1. Векторная функция скалярного аргумента. Производная по направлению и градиент - - - 271
15.2. Скалярные и векторные поля - - - 278
15.3. Поверхностные интегралы - - - 282
15.4. Поток векторного поля через поверхность. Дивергенция векторного поля - - - 291
15.5. Циркуляция векторного поля. Ротор векторного поля - - - 296
15.6. Дифференциальные операции второго порядка. Классификация векторных полей - - - 302
15.7. Индивидуальные домашние задания к гл. 15 - - - 308
15.8. Дополнительные задачи к гл. 15 - - - 337

Приложения - - - 340
Рекомендуемая литература - - - 366

Учебное издание

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В четырех частях

Часть 3

Рябушко Антон Петрович
Бархатов Виктор Владимирович
Державец Вера Владимировна
Юруть Иван Ефимович

Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *В.И. Аверкина*
Набор и компьютерная верстка *Ю.Л. Шибаевой*

Подписано в печать 09.01.2013. Формат 84×108/32.
Бумага для офсетной печати. Гарнитура «Ньютон». Офсетная печать. Усл. печ. л. 19,32.
Уч.-изд. л. 18,01. Тираж 1500 экз. Заказ 90.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”».
ЛП № 02330/0494179 от 03.04.2009. Пр. Независимости, 79, 220013, Минск.