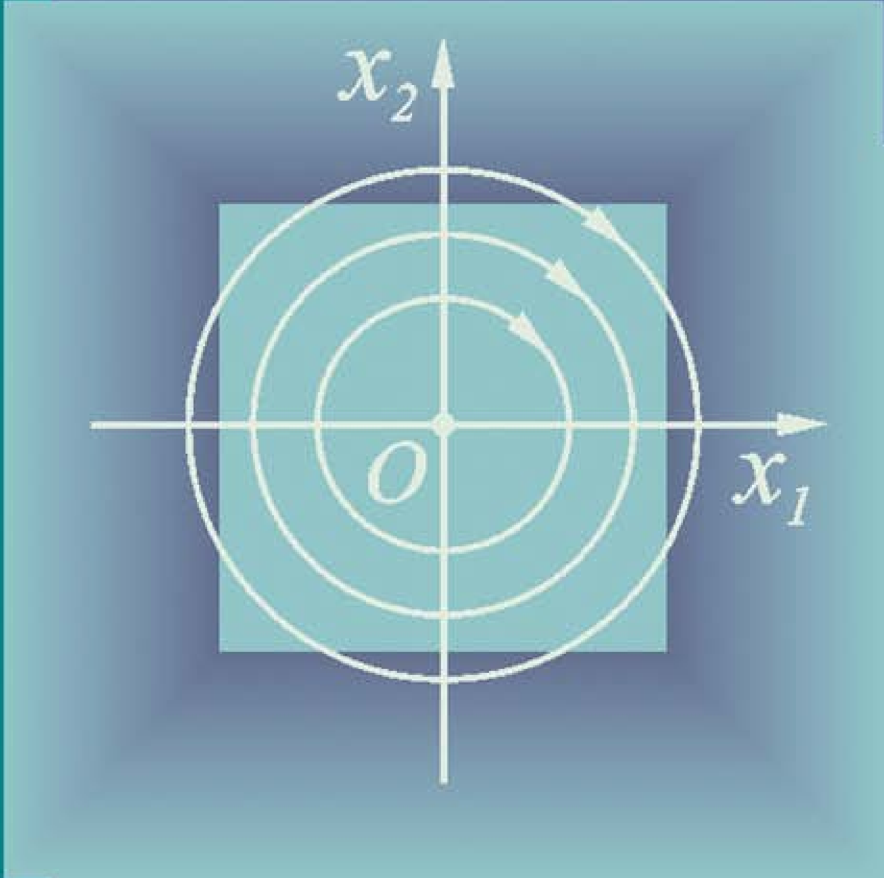
ВУЗ

студентам учреждений высшего образования

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Практикум



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Практикум

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по математическим, физическим и
экономическим специальностям

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
2012

УДК 517.9(075.9)
ББК 22.161.6я73
Д50

А в т о р ы: Л.А. Альсевич, С.А. Мазаник, Г.А. Расолько, Л.П. Черенкова

Р е ц е н з е н т ы: кафедра дифференциальных уравнений и теории функций Гомельского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, доцент *А.П. Старовойтов*); заведующий кафедрой высшей математики Белорусского государственного экономического университета доктор физико-математических наук, профессор *М.П. Дымков*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Дифференциальные уравнения. Практикум : учеб.
Д50 пособие / Л. А. Альсевич [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2012. – 382 с.: ил.
ISBN 978-985-06-2111-5

Даны краткие теоретические сведения и решения типовых задач. Задачи повышенной трудности сопровождаются указаниями. Представлено большое количество задач прикладного характера, снабженных необходимыми сведениями из соответствующих областей физики, механики, биологии, экономики. Приведены задания для контрольных и лабораторных работ.

Для студентов математических, физических и экономических специальностей учреждений высшего образования. Может быть использовано аспирантами, магистрантами и студентами всех естественнонаучных специальностей.

УДК 517.9(075.9)
ББК 22.161.6я73

ISBN 978-985-06-2111-5

© Издательство «Вышэйшая школа», 2012

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие подготовлено в соответствии с программой курса дифференциальных уравнений для студентов, специализирующихся по прикладной математике. Оно будет полезно также студентам математических, физических, экономических факультетов университетов и технических вузов. Построено пособие так, чтобы выработать у учащихся практические навыки решения и исследования дифференциальных уравнений и систем, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания.

Расположение материала, операторный подход к изложению теории линейных стационарных дифференциальных уравнений и стационарных линейных векторных уравнений, методика изучения элементарных уравнений как уравнений, приводимых к уравнениям в полных дифференциалах, отличают данное пособие от традиционных. Изучение линейных уравнений со стационарным оператором позволяет уже в начале курса рассматривать приложения дифференциальных уравнений к теории колебаний, которая в свою очередь знакомит студентов с качественной теорией дифференциальных уравнений, развивает у них исследовательские навыки. В пособии представлены задания для контрольных и лабораторных работ, а также варианты тестовых заданий по отдельным темам курса.

Наряду с широко известными методами интегрирования линейных стационарных систем дифференциальных уравнений (методы Коши, Лагранжа, Д’Аламбера, экспонентное представление решения) предлагается операторный метод сведения системы к системе независимых уравнений и метод построения экспоненты матрицы, не требующий знания жордановой формы матрицы.

Пособие составлено на основании опыта проведения практических и лабораторных занятий по курсу дифференциальных уравнений на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. По структуре и методике изложения материала оно связано с книгами Ю.С. Богданова, Ю.Б. Сыроида «Дифференциальные уравнения» (Минск: Вышэйшая школа, 1983) и Ю.С. Богданова, С.А. Мазаника, Ю.Б. Сыроида «Курс дифференциальных уравнений» (Мінск: Універсітэцкае, 1996). Настоящее издание является продолжением наших книг «Практикум по дифференциальным уравнениям» (Минск: Вышэйшая школа, 1990; Минск: БГУ, 2000), поэтому мы сохранили нумерацию задач, а для новых задач используется двойная нумерация. Наряду с задачами, составленными авторами, в практикуме приведены стандартные задачи из известных сборников задач по дифференциальным уравнениям.

В практикум включен ряд примеров решения задач с использованием пакета компьютерной математики MathCad. Это дополнение вызвано тем, что рассматриваемые методы интегрирования и их применение основаны на четких и понятных алгоритмах, однако практическое их использование часто требует от студентов выполнения большого объема вычислений и аналитических преобразований. Широкие возможности, которыми обладают в этом плане современные системы компьютерной математики, позволяют в определенной мере решить эту проблему. Применение пакетов компьютерной математики в процессе обучения не является самоцелью и никоим образом не может полностью заменить традиционные методы обучения. Тем не менее использование таких пакетов на практических занятиях по дифференциальным уравнениям позволяет не только находить аналитические или численные решения дифференциальных уравнений, но и осуществить визуализацию полученных результатов, что облегчает восприятие студентами материала, дает возможность на занятиях рассмотреть гораздо больше примеров, больше времени уделить качественному анализу получаемых результатов. Отметим, что в силу специфики пакета MathCad многие символьные вычисления занимают в строке документа несколько рядом расположенных страниц и при их внедрении в книгу некоторые части вычислений не видны. Однако при работе на компьютере по приведенному в тексте листингу информация восстанавливается в полном объеме.

Авторы выражают глубокую признательность член-корреспонденту Национальной академии наук Беларуси профессору Ф.М. Кирилловой, профессорам А.Ф. Андрееву, М.П. Дымкову, Г.А. Медведеву, В.И. Мироненко и доценту Н.Т. Стельмашуку за рецензии, советы и замечания, способствовавшие улучшению наших книг.

Все отзывы и пожелания просим присылать по адресу: 220050, Минск, проспект Ф. Скорины, 4, кафедра высшей математики, факультет прикладной математики и информатики, Белорусский государственный университет.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Дифференциальное уравнение. Порядок уравнения. Решения уравнения

Дифференциальное уравнение для определения функции $x = x(t)$ имеет вид

$$F(t, x, Dx, D^2 x, \ldots, D^n x) = 0, \tag{1.1}$$

где F – заданная функция своих аргументов; D – *оператор дифференцирования по t*, т.е. оператор, действующий по следующим правилам:

$$D^0 x = x, \quad Dx = \frac{dx}{dt}, \quad D^{k+1} x = D(D^k x) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^k x}{dt^k}\right) = \frac{d^{k+1} x}{dt^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Искомая функция $x = x(t)$ зависит от одного аргумента t и считается заданной на связном множестве (промежутке). Рассматриваемое уравнение называют *обыкновенным.* Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть записано также с помощью дифференциалов искомой функции и независимой переменной

$$H(t, x, dx, d^2 x, \ldots, d^n x) = 0, \tag{1.3}$$

где H – заданная функция своих аргументов.

Порядком уравнения называют порядок старшей из производных или старшего из дифференциалов искомой функции, входящих в уравнение.

Решением уравнения называют функцию $x = x(t)$, которая задана на промежутке $I = |a, b| \subset \mathbb{R}$, имеет все производные до порядка n включительно и обращает на промежутке I уравнение в тождество

$$F(t, x(t), Dx(t), D^2 x(t), \ldots, D^n x(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in I \tag{1.4}$$

(здесь под $|a, b|$ понимается один из промежутков: $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b), $-\infty \le a < b \le +\infty$).

Задача 1.1. Определить, какие из приведенных функций x являются на соответствующем множестве I решениями уравнения $D^2 x + 4x = 1/\cos 2t$:

а) $x = 1/4 \cos 2t \ln \cos 2t + t/2 \sin 2t, \quad I = (-\pi/4, \pi/4)$;

б) $x = 1/4 \cos 2t \ln|\cos 2t| + t/2 \sin 2t, \quad I = (\pi/4, 3\pi/4)$;

в) $x = 1/4 \cos 2t \ln|\cos 2t| + t/2 \sin 2t, \quad I = (0, \pi/2)$;

г) $x = 1/4 \cos 2t \ln \cos 2t + t/2 \sin 2t, \quad I = (-\pi/4, \pi/4) \cup (7\pi/4, 9\pi/4)$;

д) $x = \cos 2t + \sin 2t, \quad I = (7\pi/4, 9\pi/4)$.

Р е ш е н и е. а) Функция $f(t) = 1/\cos 2t$ определена и непрерывна на заданном интервале $I = (-\pi/4, \pi/4)$. Непосредственной подстановкой

$$x = 1/4 \cos 2t \ln \cos 2t + t/2 \sin 2t, \qquad Dx = t \cos 2t - 1/2 \sin 2t \ln \cos 2t,$$
$$D^2 x = -\cos 2t \ln \cos 2t - 2t \sin t + 1/\cos 2t$$

в данное уравнение убеждаемся, что оно обращается в тождество на $I = (-\pi/4, \pi/4)$. Следовательно, заданная функция x является решением уравнения.

б) Поскольку $\cos 2t$ на интервале $I=(\pi/4, 3\pi/4)$ отрицателен и $|\cos 2t| = -\cos 2t,$ то функцию x запишем в виде $x = 1/4 \cos 2t \ln(-\cos 2t) + t/2 \sin 2t.$ Функция $1/\cos 2t$ определена и непрерывна на $I,$ функция x дважды дифференцируема на I. Непосредственной подстановкой

$$x = 1/4 \cos 2t \ln(-\cos 2t) + t/2 \sin 2t, \quad Dx = -1/2 \sin 2t \ln(-\cos 2t) + t \cos 2t,$$
$$D^2 x = -\cos 2t \ln(-\cos 2t) - 2t \sin t + 1/\cos 2t$$

в данное уравнение убеждаемся, что оно обращается в тождество на $I=(\pi/4, 3\pi/4)$. Следовательно, функция x является решением уравнения.

в) Считать функцию x решением заданного уравнения на промежутке $I=(0, \pi/2)$ нельзя, так как она не дифференцируема на I и правая часть уравнения $f(t) = 1/\cos 2t$ разрывна на $I.$

г) Согласно определению решения дифференциального уравнения, функция, заданная на множестве $I=(-\pi/4, \pi/4) \cup (7\pi/4, 9\pi/4),$ не является решением, так как в данном случае множество I не является промежутком, т.е. не является связным.

д) Функция $f(t) = 1/\cos 2t$ определена и непрерывна на заданном интервале $I=(7\pi/4, 9\pi/4).$ Подставив в исходное уравнение

$$x = \cos 2t + \sin 2t, \quad Dx = -2\sin 2t + 2\cos 2t, \quad D^2 x = -4\cos 2t - 4\sin 2t,$$

будем иметь $0 = 1/\cos 2t$. Это означает, что функция x не является решением данного уравнения.

Определить, какие из приведенных функций являются решениями указанного уравнения на заданном множестве:

1. $x = t\,Dx + t\,e^{x/t}$:

а) $x = -t \ln\ln t, \quad I=(0,+\infty);$

б) $x = -t \ln\ln t, \quad I=(1,+\infty);$

в) $x = -t \ln\ln t, \quad I=[1,+\infty);$

г) $x = \ln t, \quad I=(0,+\infty).$

2. $D^2 x - 2\,Dx + x = \dfrac{e^t}{t}$:

а) $x = e^t \ln t, \quad I=(0,+\infty);$

б) $x = t\,e^t \ln t, \quad I=(0,+\infty);$

в) $x = t\,e^t \ln t, \quad I=(-\infty,0) \cup (0,+\infty);$

г) $x = e^t(t \ln|t| + t), \quad I=(-\infty,0).$

3. $(2t+1)x'' + 4tx' - 4x = 0$:

а) $x = t + e^{-2t}, \quad I=(-2,-1) \cup (1,2);$

б) $x = e^{2t}, \quad I=\mathbb{R};$

в) $x = C_1 t + C_2 e^{-2t}, \quad I=\mathbb{R},$
C_1, C_2 – постоянные;

г) $x = t, \quad I=\mathbb{R}.$

4. $x' = \dfrac{1}{2}\sqrt{t} + \sqrt[3]{x}$:

а) $x = t^{3/2}, \quad I=[0,+\infty);$

б) $x = |t|^{3/2}, \quad I=(-\infty,0);$

в) $x = 1 + t^{3/2}, \quad I=[0,+\infty);$

г) $x = -t^{3/2}, \quad I=[0,+\infty).$

5. $D^2 x + \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{t}}{\cos t} Dx + x = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$:

а) $x = \sin t, \quad I=[0, \pi/2);$

б) $x = t \sin t, \quad I=[0, \pi/2);$

в) $x = t \sin t, \quad I=[0, +\infty);$

г) $x = \sin t, \quad I=[0, \pi/2).$

6. $t^2 D^2 x + t\,Dx + 2x = 2\cos\ln t + \sin\ln t$:

а) $x = \sin\ln t + \cos(\sqrt{2}\ln t), \quad I=(-\infty, 0);$

б) $x = 1/2\cos\ln t + \sin\ln t, \quad I = (0, +\infty)$;

в) $x = 1/2\cos\ln t + \sin\ln t + \cos(\sqrt{2}\ln t), \quad I = (0, +\infty)$;

г) $x = 1/2\cos\ln t + \sin\ln t + 2\sin(\sqrt{2}\ln t), \quad I = (0, +\infty)$.

7. $D^3x + Dx = \sin t/\cos^2 t$:

а) $x = 1/\cos t + \cos t\ln\cos t + (t - \operatorname{tg} t)\sin t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2)$;

б) $x = 1 + \cos t + \sin t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2)$;

в) $x = \cos t\ln\cos t + (t - \operatorname{tg} t)\sin t + \dfrac{1}{\cos t}, \quad I = (-\pi/2, \pi/2)\bigcup(3\pi/2, 5\pi/2)$.

Показать, что функции $x = x(t)$, зависящие от произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$, являются решениями соответствующих уравнений. Указать максимальный промежуток существования решения:

8. $x = C_1 e^{C_2 t}, \quad xD^2x = (Dx)^2$.

9. $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t, \quad D^2x + 9x = 0$.

10. $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + \dfrac{t}{9}, \ D^2x + 9x = t$.

11. $x = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + e^{3t}, \quad D^2x + 9x = 18e^{3t}$.

12. $x = C_1/t + C_2, \quad tx'' + 2x' = 0$.

13. $x = C_1 t + C_1^2, \quad x = tDx + (Dx)^2$.

14. $x = C_1 t + \sin C_1, \quad x = tDx + \sin Dx$.

15. $x = C_1 t + \ln C_1, \quad x = tx' + \ln x'$.

16. $x = C_1\operatorname{ch} t + C_2\operatorname{sh} t, \quad D^2x - x = 0$.

17. $x = C_1\dfrac{t^2}{2} + C_1^2 t + C_2, \quad Dx = t\,D^2x + (D^2x)^2$.

18. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t, \quad D^4x - x = 0$.

19. Доказать, что многочлены Чебышева первого рода

$$T_m(t) = \cos(m\arccos t)/2^{m-1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют уравнениям $(1 - t^2)D^2x - tDx + m^2x = 0, \quad m \in \mathbb{N}$.

Показать, что функции $x = x(t)$, заданные неявно, являются решениями соответствующих уравнений:

20. $x = \operatorname{arctg}(x + t) + C, \quad (x + t)^2 Dx = 1$.

21. $t = x^2 + x, \quad DxD^3x - 3\left(D^2x\right)^2 = 0$.

22. $x\ln x - t - \int\limits_0^t e^{\tau^2}d\tau = 0, \quad x(1 + \ln x)x'' + (x')^2 = 2txe^{t^2}$.

23. $9x^2 - 4at^3 = 0, \quad (Dx)^2 - at = 0, \quad a \in \mathbb{R}$.

24. $(x-t)(x^2-t^2+1)=0,\ tx(Dx)^2-(t^2+x^2)Dx+tx=0.$

25. $\left(tx+1\right)(t^2x-1)=0,\quad \left(x'\right)^2+\dfrac{3x}{t}x'+\dfrac{2x^2}{t^2}=0.$

26. $x^3-7t^2x+6t^3=0,\quad (Dx)^3-7Dx+6=0.$

27. $t^2+x+\ln x-\dfrac{t}{x}=C,\quad x>0,\quad (2tx^2-x)+(x^2+t+x)Dx=0.$

28. $x^4=4a^2t^2,\quad x^2\left(Dx\right)^2-a^2=0,\quad a\in\mathbb{R}.$

29. $t^2+x^2=a^2,\quad x=tDx-a\sqrt{1+\left(Dx\right)^2},\quad a\in\mathbb{R}.$

Показать, что функции $x=x(t)$, заданные параметрически, являются решениями соответствующих уравнений:

30. $\begin{cases} t=\dfrac{\ln\tau}{2}+\dfrac{3}{4\tau^2}, \\ x=\dfrac{\tau}{4}+\dfrac{3}{4\tau^3}, \quad \tau>0, \end{cases}$ $\quad (D^2x)^2-2DxD^2x+3=0.$

31. $\begin{cases} t=\dfrac{1}{\sqrt{p}}+\dfrac{1}{3p^2}, \\ x=\dfrac{2}{3p}-\sqrt{p}, \quad p>0, \end{cases}$ $\quad t\left(x'\right)^2+xx'-1=0.$

32. $\begin{cases} t=\tau^{-2}\ln\tau, \\ x=\tau^{-1}\left(1+2\ln\tau\right), \quad \tau>0, \end{cases}$ $\quad xDx-2t\left(Dx\right)^2-1=0.$

33. $\begin{cases} t=2\left(1-p\right)+e^{-p}, \\ x=2-p^2+e^{-p}\left(1+p\right), \quad p\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\quad x=(1+Dx)t+(Dx)^2.$

34. $\begin{cases} t=e^{-\varphi}\cos\varphi, \\ x=\left(1+\sin 2\varphi\right)e^{-2\varphi}/4, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\quad 4x=(Dx+t)^2.$

35. $\begin{cases} t=e^{-\varphi}\left(1+\varphi\right), \\ x=e^{-2\varphi}\left(1+2\varphi+2\varphi^2\right)/4, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\quad 4x=\left(x'\right)^2+t^2.$

36. $\begin{cases} t=e^{-\varphi/2}\cos\varphi, \\ x=\left(2+\sin 2\varphi\right)e^{-\varphi}/4, \quad \varphi\in\mathbb{R}, \end{cases}$ $\quad 2x=t^2+tDx+(Dx)^2.$

37. $\begin{cases} t=\dfrac{p^3}{4}-\dfrac{p^2}{2}, \quad p\in\mathbb{R}, \\ x=3\dfrac{p^4}{16}-\dfrac{p^3}{3}, \end{cases}$ $\quad x=-\dfrac{(Dx)^3}{12}+\dfrac{t}{2}Dx+\dfrac{1}{4}(Dx)^2+t+\dfrac{t^2}{(Dx)^2}.$

37.1. $\begin{cases} t = \sqrt{1-\tau^2}, \\ x = \dfrac{1}{\tau}, \quad 0 < \tau < 1, \end{cases}$ $\qquad D^2x - 2t\,x^2Dx = x^5.$

37.2. $\begin{cases} t = \sin\tau, \\ x = \dfrac{1}{\cos\tau}, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \tau < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ $\qquad D^2x - 2t\,x^2Dx = x^5.$

37.3. $\begin{cases} t = \operatorname{sh}^2\tau, \\ x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2\tau}, \quad \tau \in \mathbb{R}, \end{cases}$ $\qquad D^2x + 2x\,Dx = 0.$

Каждое дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, семейство решений, задаваемое формулой, содержащей *произвольные постоянные*.

Рассмотрим обратную задачу: построить дифференциальное уравнение по известному решению $x = x(t, C_1, \dots, C_n)$, заданному соотношением $\Phi(t, x, C_1, \dots, C_n) = 0$.

Дифференциальное уравнение, связывающее t и $x(t)$, получается путем исключения постоянных $C_1, \dots, C_n$ из системы

$$\begin{cases} \Phi\left(t, x, C_1, ..., C_n\right) = 0, \\ D\Phi\left(t, x, C_1, ..., C_n\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ D^n\Phi\left(t, x, C_1, ..., C_n\right) = 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Построить дифференциальные уравнения наименьших порядков, решением которых являются заданные функции:

38. $x = \dfrac{1}{t+C}.$

39. $x = C_1e^t + C_2e^{-t} + \sin t.$

40. $t^2 + Ctx - x^2 = 2t.$

41. $x = C\cos t, \ \ y = C\sin t.$

42. $x^{2/3} + t^{2/3} = C^{2/3}.$

43. $x = Ct + C\big/\sqrt{1+C^2}.$

44. $x = t\left(1 + \int \dfrac{e^t}{t}dt\right).$

45. $x = t\int \dfrac{\sin t}{t}dt + 5t^2.$

46. $x = t\left(\int\limits_2^t \dfrac{\tau}{\ln\tau}d\tau + C\right) + \sin t.$

47. $x - C_2 - C_1^2t - \dfrac{C_1}{2}t^2 = 0.$

48. $3x = 3t + (t+C_1)^3 + C_2.$

49. $3x = 4(t+C_1)^{3/2} + C_2t + C_3.$

50. $x\ln x + t + C_1x + C_2 = 0.$

51. $2C_1x = \left(C_1t + C_2\right)^2 + 1.$

52. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, оси симметрии которых параллельны оси ординат, а вершины расположены на оси абсцисс.

53. Составить дифференциальное уравнение семейства парабол, вершины которых совпадают с началом координат, а осью симметрии является ось абсцисс.

54. Составить дифференциальное уравнение однопараметрического семейства окружностей единичного радиуса, центры которых лежат на прямой $y = 1$.

55. Составить дифференциальное уравнение семейства эллипсов, центры которых совпадают с началом координат, а оси симметрии – с осями координат.

II. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

2. Простейшие дифференциальные уравнения. Общее и частное решения. Начальная и граничная задачи. Функция Грина

Простейшим дифференциальным уравнением порядка n является уравнение

$$D^n x = f(t), \; t \in I, \tag{2.1}$$

где функция $f(t)$ непрерывна на промежутке I.

Формула, определяющая совокупность решений рассматриваемого уравнения и содержащая n произвольных постоянных, задает его общее решение.

Общее решение простейшего уравнения задается формулой

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_s^t \left(\int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) \, d\tau_n \dots d\tau_2 \right) d\tau_1 \tag{2.2}$$

или формулой

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k t^k + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) \, d\tau \;\; \forall s \in I, \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{2.3}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных C_k, $k = \overline{0, n-1}$, называют *частным решением*. Для выделения частного решения из общего используют начальные, граничные и другие дополнительные условия. Условия, относящиеся к одному значению аргумента, называют *начальными*, а относящиеся к различным значениям аргумента – *граничными*.

Начальная задача (*задача Коши*) для простейшего уравнения порядка n имеет вид

$$D^n x = f(t), \; t \in I, \; D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \; k = \overline{0, n-1}. \tag{2.4}$$

Решение начальной задачи для простейшего уравнения определяется по формуле

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k \frac{(t-s)^k}{k!} + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) \, d\tau . \tag{2.5}$$

Найти общие решения уравнений на заданном промежутке:

56. $Dx = t \sin t, \quad I \in \mathbb{R}.$

57. $D^n x = t, \quad I = \mathbb{R}.$

58. $D^3 x = t^{-3}, \quad I = (0, +\infty).$

59. $x' = \cos^2 t, \quad I = \mathbb{R}.$

60. $Dx = \operatorname{tg} t, \quad I = (-\pi/2, \pi/2).$

61. $Dx = (1 - t^2)^{-3/2}, \quad I = (-1, 1).$

62. $x' = \sin^3 t, \quad I = \mathbb{R}.$

63. $Dx = e^t \cos t, \quad I = \mathbb{R}.$

64. $D^2 x = \cos 2t, \quad I = \mathbb{R}.$

65. $x'' = (\sin t)/t, \quad I = (0, +\infty).$

66. $D^2 x = e^t / t, \quad I = (0, +\infty).$

Решить начальные задачи и обосновать выбор I :

67. $Dx = \operatorname{ctg} t, \quad I = (0, \pi), \quad x\big|_{t=\pi/2} = -1.$

68. $Dx = t\Big/\sqrt{4t^2 - 1}, \quad I = (-\infty, -1/2), \quad x\big|_{t=-1} = 7.$

69. $x' = \cos t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 10.$

70. $Dx = 1\Big/\sqrt{1 - t^2}, \quad I = (-1, 1), \quad x\big|_{t=0} = 93.$

71. $D^3 x = -\cos t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad Dx\big|_{t=0} = 0, \quad D^2 x\big|_{t=0} = -1.$

72. $D^3 x = 2/t^3, \quad I = (-\infty, 0), \quad x\big|_{t=-1} = Dx\big|_{t=-1} = D^2 x\big|_{t=-1} = 1.$

73. $D^3 x = e^t + 3t^{-5/2}, \quad I = (0, +\infty), \quad x\big|_{t=1} = Dx\big|_{t=1} = D^2 x\big|_{t=1} = 0.$

74. $x'' = 1, \quad I = \mathbb{R}$:

а) $x\big|_{t=t_0} = \alpha, \quad x'\big|_{t=t_0} = \beta;$

б) $x\big|_{t=0} = 0, \quad x'\big|_{t=0} = 0;$

в) $x\big|_{t=0} = 0, \quad x'\big|_{t=0} = 1;$

г) $x\big|_{t=0} = 1, \quad x'\big|_{t=0} = 0.$

75. $D^3 x = e^{-t}, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = Dx\big|_{t=0} = D^2 x\big|_{t=0} = 0.$

76. $D^2 x = (t-1)^{-3} - (t+1)^{-3}, \quad I = (-1, 1), \quad x\big|_{t=0} = Dx\big|_{t=0} = 0.$

Решить граничные задачи:

77. $D^2 x = 2, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=-1} = 0, \quad x\big|_{t=1} = 0.$

78. $D^3 x = 2t^{-3}, \quad I = (0, +\infty), \quad x\big|_{t=1} = Dx\big|_{t=2} = D^2 x\big|_{t=3} = 0.$

79. $x' = -\sin t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=\pi/2} = 0.$

80. $x' = -\sin t, \quad I = \mathbb{R}, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=\pi/2} = 1.$

81. Показать, что граничная задача $Dx = f(t),\ I = \mathbb{R},\ x\big|_{t=s} = a,\ \ x\big|_{t=r} = b,\ s \le t \le r,$ имеет решение лишь в исключительных случаях, и описать эти случаи.

82. Показать, что граничная задача $D^2 x = f(t),\ I = \mathbb{R},\ x\big|_{t=s} = a,\ \ x\big|_{t=r} = b,\ s \le t \le r,$ всегда имеет решение, и найти его.

Граничная задача для простейшего уравнения при $n = 2$

$$D^2 x = f(t), \quad t \in I = [a, b], \quad x\big|_{t=a} = A, \quad x\big|_{t=b} = B,$$

имеет решение

$$x = x(t) = \frac{b-t}{b-a} A + \frac{t-a}{b-a} B + \int_a^b G(t, \tau) f(\tau)\, d\tau,$$

где $G(t,\tau) = (t-\tau)\cdot 1(t-\tau) - \dfrac{t-a}{b-a}(b-\tau)$, $1(t)$ – *функция единичного скачка*, $1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \ge 0. \end{cases}$

Функция $G(t, \tau)$ называется *функцией Грина* граничной задачи.

Записать с помощью функции Грина решения граничных задач:

83. $D^2 x = t, \quad x\big|_{t=0} = 1, \quad x\big|_{t=2} = 1.$

84. $D^2 x = \cos t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=\pi} = 0.$

85. $x'' = \operatorname{tg} t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=\pi/4} = 1.$

86. $x'' = t, \quad x\big|_{t=0} = 0, \quad x\big|_{t=1} = 0.$

3. Уравнения с кусочно-непрерывной неоднородностью

Решением простейшего дифференциального уравнения n-го порядка $D^n x = f(t)$, $t \in I$, с *кусочно-непрерывной неоднородностью* $f(t)$ называется функция, имеющая непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, обладающая кусочно-непрерывной производной (Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Гл. XXIV. §1–2) порядка n и обращающая уравнение в тождество на I всюду, за исключением, быть может, точек разрыва функции f.

Решение задачи Коши (начальной задачи)

$$D^n x = f(t), \quad t \in I, \quad D^k x\big|_{t=s} = \xi_k, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad s \in I,$$

в случае кусочно-непрерывной неоднородности f на I может быть получено по формуле (2.5) построения решения задачи Коши для непрерывной функции f.

Задача 3.1. Найти общее решение уравнения $D^3 x = f(t)$, где

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & t < 0, \\ t^2, & t \ge 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Так как $D^3 x = D(D^2 x)$, то исходное уравнение приводится к уравнению второго порядка

$$D^2 x = \begin{cases} (t+1)^2 / 2 + C_1^*, & t < 0, \\ t^3/3 + C_1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая, что искомое решение $x(t)$ должно быть непрерывно на $I = \mathbb{R}$ и иметь непрерывные производные первого и второго порядков, потребуем непрерывности $D^2 x$ в точке $t = 0$, что приводит к равенству $C_1^* + 0{,}5 = C_1$. Следовательно, $C_1^* = C_1 - 0{,}5$. Тогда

$$D^2 x = \begin{cases} (t+1)^2 / 2 + C_1 - 0{,}5, & t < 0, \\ t^3/3 + C_1, & t \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$D x = \begin{cases} (t+1)^3 / 3! + (C_1 - 0{,}5)t + C_2^*, & t < 0, \\ t^4/12 + C_1 t + C_2, & t \ge 0. \end{cases}$$

Вследствие непрерывности Dx в точке $t = 0$ получаем $C_2^* + 1/6 = C_2$, откуда $C_2^* = C_2 - 1/6$. Следовательно,

$$Dx = \begin{cases} (t+1)^3 / 3! + (C_1 - 0{,}5)t + C_2 - 1/6, & t < 0, \\ t^4/12 + C_1 t + C_2, & t \ge 0, \end{cases}$$

откуда

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{(t+1)^4}{4!}+\left(C_1-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{t^2}{2}+\left(C_2-\dfrac{1}{6}\right)t+C_3^*, & t<0,\\ t^5/60+C_1t^2/2+C_2t+C_3, & t\ge 0.\end{cases}$$

Непрерывность решения $x(t)$ в точке $t=0$ требует выполнения равенства $C_3^*+1/24=C_3$. Следовательно, искомое решение определяется формулой

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{(t+1)^4}{4!}+\left(C_1-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{t^2}{2}+\left(C_2-\dfrac{1}{6}\right)t+C_3-\dfrac{1}{24}, & t<0,\\ t^5/60+C_1t^2/2+C_2t+C_3, & t\ge 0.\end{cases}$$

Задача 3.2. Найти общее решение уравнения $Dx=f(t)$, где

$$f(t)=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 1, & t\ge 0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Данное уравнение первого порядка имеет решение

$$x(t)=\begin{cases}-t+C_1^*, & t<0,\\ t+C_1, & t\ge 0,\end{cases}$$

причем $C_1^*=C_1$. Обратим внимание на тот факт, что для найденной *кусочно-дифференцируемой функции* $x(t)$ производная Dx в точке $t=0$ – односторонняя (именно правая) производная – совпадает со значением $f(0)$.

Найти общие решения уравнений:

87. $D^3x=1(t-\alpha),\quad \alpha\in\mathbb{R}.$

88. $D^2x=1(t)\sin(t).$

89. $D^2x=\begin{cases}t, & t<0,\\ \sin t, & t\ge 0.\end{cases}$

90. $Dx=\begin{cases}2+t, & t<0,\\ t^3, & t\ge 0.\end{cases}$

91. $x''=t\,\mathrm{sgn}\,t,\quad \mathrm{sgn}\,t=\begin{cases}-1, & t<0,\\ 0, & t=0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$

Решить задачи Коши:

92. $x'=e^{2t}\cdot 1(t),\quad x|_{t=0}=2.$

93. $D^2x=1/(t-3)$:

а) $x|_{t=3}=1,\quad Dx|_{t=3}=0;$

б) $x|_{t=4}=2,\quad Dx|_{t=4}=1;$

в) $x|_{t=0}=0,\quad Dx|_{t=0}=0.$

4. Геометрические приложения простейших дифференциальных уравнений. Простейшие математические модели естественных процессов

Геометрические приложения. При отыскании кривых $y = y(x)$, удовлетворяющих некоторым условиям, нередко бывает легче установить соотношения между дифференциалами переменных x и y, используя геометрический смысл этих понятий, и, следовательно, построить дифференциальное уравнение для функции $y(x)$. Построение касательной, определение длины подкасательной и поднормали основаны на том, что $y'(x_0)$ определяет угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0,\, y(x_0))$. *Подкасательной* кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0,\, y(x_0))$ называется проекция на ось абсцисс направленного отрезка касательной, заключенного между точкой касания и точкой пересечения этой касательной с осью абсцисс. *Поднормаль* кривой $y = y(x)$ в точке $(x_0,\, y(x_0))$ – это проекция на ось абсцисс направленного отрезка нормали от точки $(x_0,\, y(x_0))$ до точки пересечения нормали с осью абсцисс.

Иногда при решении геометрических задач получается *интегральное уравнение* (уравнение, содержащее интеграл искомой функции), которое приводится к дифференциальному уравнению с помощью операции дифференцирования.

Задача 4.1. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox пропорционален абсциссе точки касания.

Р е ш е н и е. Пусть $y = y(x)$ – искомая функция. Тогда $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$ есть тангенс упоминаемого в условии задачи угла. Следовательно, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = ax_0$, где a – коэффициент пропорциональности. Так как требуемое соотношение должно выполняться для всех точек искомой кривой, то имеем дифференциальное уравнение $y' = ax$. Решив его, получим кривые $y = ax^2/2 + C,\ C \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию задачи.

94. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

95. Найти кривые, у которых тангенс угла между касательной и положительным направлением оси Ox равен квадрату абсциссы точки касания.

96. Найти проходящую через точку $(1, 1)$ кривую, у которой отрезок касательной в произвольной точке этой касательной, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении 2:3, считая от оси абсцисс.

97. Найти проходящую через точку $(1, 1)$ кривую, у которой отрезок нормали в произвольной точке, заключенный между осями координат, делится точкой касания в отношении 2:3, считая от оси абсцисс.

98. Найти кривые, нормаль в каждой точке которых проходит через точку (a, b).

99. Найти кривые, у которых величина поднормали во всех точках кривой одинакова и равна $a,\ a > 0$. (У к а з а н и е. При решении полученного дифференциального уравнения рассматривать $x = x(y)$.)

100. Найти кривые, у которых подкасательная во всех точках имеет постоянную длину, равную a.

101. Найти кривые, для которых площадь фигуры, заключенной между осями координат, кривой и прямой, параллельной оси ординат, проходящей через произвольную точку кривой, равна кубу ординаты этой точки. (У к а з а н и е. Воспользоваться формулой вычисления площади криволинейной трапеции с помощью интеграла.)

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Альсевич Лариса Алексеевна
Мазаник Сергей Алексеевич
Расолько Галина Алексеевна
Черенкова Людмила Павловна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.
ПРАКТИКУМ**

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Савицкая*
Художественный редактор *Е.Э. Агунович*
Технический редактор *М.В. Бригер*
Корректор *Е.В. Савицкая*
Компьютерная верстка *М.В. Бригер*

Подписано в печать 27.06.2012. Формат 84×108/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Усл. печ. л. 40,32.
Уч.-изд. л. 25,8. Тираж 900 экз. Заказ1499.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
E-mail: market@vshph.com   Http://vshph.com

Филиал № 1 открытого акционерного общества «Красная звезда».
ЛП № 02330/0494160 от 03.04.2009. Ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.