М.А. Маталыцкий Г.А. Хацкевич

Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы

Для студентов физико–математических специальностей учреждений высшего образования

М.А. Маталыцкий
Г.А. Хацкевич

Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы

*Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений
высшего образования
по физико-математическим
специальностям*

Минск
«Вышэйшая школа»
2012

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
М33

Р е ц е н з е н т ы: кафедра теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета (заведующий кафедрой доктор физико-математических наук, профессор *Н.Н. Труш*), заведующий кафедрой экономической кибернетики и теории вероятностей Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины доктор физико-математических наук, профессор *Ю.В. Малинковский*

Матальцкий, М. А.

М33 Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы : учеб. пособие / М. А. Матальцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск : Выш. шк., 2012. – 720 с. ил.: ISBN 978-985-06-2105-4.

Даны определения вероятности случайных событий и основные соотношения, связанные с условными вероятностями и схемой Бернулли. Рассмотрены различные типы случайных величин, их числовые и функциональные характеристики, а также вопросы, связанные со сходимостью случайных последовательностей – закон больших чисел и центральная предельная теорема.

Приведены сведения о марковских случайных процессах и цепях Маркова с дискретным и непрерывным временем, процессах с конечными моментами второго порядка, процессах с независимыми приращениями, стационарных и эргодических случайных процессах, стохастических интегралах и стохастических дифференциальных уравнениях. Рассмотрены вопросы применения случайных процессов при анализе математических моделей различных реальных объектов.

Рассмотрены основные распределения, применяемые в статистике, методы нахождения оценок неизвестных параметров и свойства оценок, проверка простых и сложных гипотез, последовательный и дисперсионный анализ, линейные регрессионные модели.

Даны решения более 130 различных типовых примеров и более 1100 задач для самостоятельного решения различной степени трудности.

Для студентов учреждений высшего образования. Будет полезно магистрантам и аспирантам, преподавателям, а также научным и практическим работникам.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

ISBN 978-985-06-2105-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

За последние десятилетия в высших учебных заведениях значительно увеличился объем преподавания дисциплин, использующих вероятностные и статистические методы. Для студентов математических специальностей, таких, как «математика», «прикладная математика», «экономическая кибернетика», «актуарная математика», «математическая экономика», «компьютерная математика», «компьютерная безопасность», в университете читается годовой или трехсеместровый курс теории вероятностей и математической статистики.

Курс состоит из трех основных разделов: элементы теории вероятностей, элементы теории случайных процессов и элементы математической статистики.

Данное учебное пособие написано по этим разделам курса. Оно подготовлено на базе курса лекций и методических разработок по университетскому курсу теории вероятностей и математической статистики, читаемому авторами для студентов различных физико-математических специальностей.

Отличительной особенностью учебного пособия является то, что, кроме основательного изучения понятий и методов современной теории вероятностей, случайных процессов и математической статистики, оно содержит большое число разнообразных теоретических примеров и задач различной степени трудности. Некоторые из них снабжены ответами. Это позволяет использовать учебник не только для чтения лекций, но и для проведения практических занятий.

Структура изложения курса такова, что он может одновременно играть роль учебника, задачника и справочника.

Много внимания уделено вопросам применения вероятностных методов в различных областях.

Основные теоремы приведены с полными доказательствами, которые могут быть использованы при доказательстве различных утверждений, сформулированных в задачах. В большинстве параграфов есть простые задачи, которые сводятся к прямому применению основных формул и приемов. С другой стороны, в них присутствуют достаточно сложные задачи, решения которых содержат важные идеи и связаны с тщательным проведением математических выкладок, а также с практическим применением. Такие задачи отмечены звездочкой: они могут служить началом курсовой работы.

В учебном пособии представлено значительное число задач прикладного характера, что позволит не только обучить студентов теоретическим основам, но и привить навыки вероятностно-статистического моделирования реальных явлений.

При составлении задач был использован ряд отечественных и зарубежных учебников и задачников, приведенных в списке литературы; некоторые из задач составлены авторами.

Первые два раздела данного пособия написаны профессором М.А. Маталыцким. Третий раздел написан профессором Г.А. Хацкевичем.

Выражаем благодарность рецензентам, сделавшим ряд полезных замечаний.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Теорию вероятностей можно определить как науку, изучающую случайные события. *Случайные события*, как они понимаются в теории вероятностей, обладают рядом характерных особенностей – в частности, все они происходят в массовых явлениях.

Первые вероятностные задачи были связаны с азартными играми. В XVIII в. ими занимались Б. Паскаль, П. Ферма, а также Я. Бернулли, автор закона больших чисел. В XVIII в. А. де Муавр сформулировал первое предельное утверждение, относящееся позже к центральной предельной теореме. В том же веке Т. Байес предложил свою знаменитую формулу, заложив тем самым фундамент развитой позднее теории оценивания.

Дальнейшее развитие теории вероятностей во второй половине XVIII и первой половине XIX в. связано с именем П. Лапласа. Его классический трактат «Theorie Analytique des Probabilities» содержит оригинальные результаты собственных исследований и его предшественников. К этому же периоду относятся труды К. Гаусса и С. Пуассона. Во второй половине XIX в. большое значение для развития теории вероятностей имели труды П.Л. Чебышева.

Начало XX в. связано с наиболее значительным развитием теории вероятностей. Разработаны ее математические основы, определены связи с другими разделами математики и развит ее аналитический аппарат. Существенно расширилась область ее применения в физике, технике и других областях.

Первое определение вероятности ввел П. Лаплас. Однако его определение требовало конкретных логических оговорок и область применения этого определения была довольно узкой. Введение Ж. Бюффоном геометрической вероятности было шагом вперед для обоснования основ теории вероятностей, но парадоксы Э. Бертрана свидетельствовали о существовании пробелов в ее понятиях.

Разработкой математических основ теории вероятностей занимались С.Н. Бернштейн, В.И. Гливенко, А.Н. Колмогоров, К. Мизес, Г. Штейнгауз. В.И. Гливенко определил совместно события и их вероятности как нормированную булевскую алгебру. Г. Штейнгауз рассматривал вероятность как меру Лебега, определенную в борелевском поле измеримых подмножеств отрезка [0, 1]. А.Н. Колмогоровым введено определение вероятности как нормированной меры, определенной в минимальном борелевском поле подмножеств некоторого множества, называемого множеством элементарных событий.

Теоремы П. Леви о характеристических функциях и разработка теории безгранично делимых законов распределения позволили найти предельные распределения для сумм независимых случайных величин (Б.В. Гнеденко, А.Н. Колмогоров, В. Феллер, А.Я.Хинчин).

Утверждения А.Я. Хинчина и А.Н. Колмогорова о законе повторного логарифма и усиленном законе больших чисел углубили результаты, касающиеся закона больших чисел.

Следует отметить, что теория вероятностей постоянно развивалась исходя из потребностей практики. В абстрактной форме она отражает закономерности, присущие случайным событиям массового характера. Эти закономерности играют исключительно важную роль в физике, технике, в частности компьютерной, экономике и других областях естествознания.

При изучении различных явлений действительности мы сталкиваемся с процессами, предсказать развитие которых заранее не можем. Случайные процессы – удобная математическая модель функций времени, значениями которых являются случайные величины. Например, число запросов, поступающих в единицу времени на центральный сервер информационно-компьютерной сети, являясь случайной величиной, зависит от времени суток; расход электроэнергии в единицу времени также является функцией времени со случайными значениями; координата отдельной молекулы в газе, заключенном в сосуд, меняется со временем и принимает случайные значения. Таким образом, можно сказать, что случайный процесс – это семейство случайных величин, зависящих от времени.

Теория случайных процессов, возникшая в результате построения математических моделей реальных физических процессов, представляет собой наиболее содержательную и более всего используемую в приложениях часть теории вероятностей. Она находит многочисленные применения в физике, технике, экономике, биологии, медицине и других дисциплинах, а также в различных разделах математики.

Первое математическое описание случайного процесса, называемого в настоящее время *винеровским или процессом броуновского движения*, дал Л. Башелье в докладе, представленном им Парижской академии наук в 1900 г. [44]. Он предложил использовать этот процесс в качестве модели колебаний цены активов, стремясь получить аналитические выражения для стоимости различных типов опционов и сравнить их с наблюдаемыми рыночными ценами последних. Опцион является примером финансовой производной и дает его владельцу право купить указанное число долей акций по определенной цене в указанную дату или до нее.

Вообще понятие случайного процесса появилось в XX в. и связано с именами А.Н. Колмогорова, А.Я. Хинчина, Е.Е. Слуцкого, Н. Винера. То, что теория случайных процессов принадлежит к категории наиболее быстро развивающихся математических дисциплин, в значительной мере определяется ее глубокими связями с практикой [4, 6].

В 1905 г. двумя известными физиками, М. Смолуховским и А. Эйнштейном, была разработана теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок. Она привела математику к началу создания теории случайных процессов. В исследованиях датского ученого А. Эрланга появилась новая важная область поисков, связанных с изучением загрузки телефонных сетей. Эти работы оказали значительное влияние не только на решение чисто телефонных задач, но и на формирование элементов теории случайных процессов, в частности процессов гибели и размножения. Такие процессы позднее применялись при исследовании динамики биологических популяций; именно от задач биологии и пошло наименование данного типа случайных процессов.

Изучение явления диффузии средствами теории вероятностей было предпринято в 1914 г. известными физиками М. Планком и А. Фоккером. Н. Винер, основатель кибернетики, в середине 20-х гг. XX в. при изучении броуновского движения ввел в рассмотрение процессы, названные *винеровскими*. Следует также отметить работы русского математика, профессора МГУ А.А. Маркова по изучению цепных зависимостей (цепи Маркова) и работы Е.Е. Слуцкого по теории случайных функций.

В 1931 г. была опубликована известная большая статья А.Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей», заложившая основы теории марковских процессов: в ней получены прямые и обратные дифференциальные уравнения, которые управляют вероятностями перехода случайных процессов без последействия. В этой же работе приводился набросок теории скачкообразных процессов без последействия, подробное развитие которой позднее (1936 г.) было дано В. Фелером, получившим интегродифференциальное уравнение для скачкообразных марковских процессов. В 1934 г. в работе А.Я. Хинчина осуществлено построение основ стационарных случайных процессов на базе физических задач. Он ввел понятие стационарного процесса в узком и широком смыслах. Вышеупомянутые работы следует считать началом построения общей теории случайных процессов. Они послужили основой для исследований Г. Крамера, Г. Вальда, А.Н. Колмогорова и многих других известных ученых. Более подробно история развития теории случайных процессов изложена в [6].

Охарактеризуем ряд основных задач теории случайных процессов, большинство из которых рассматривается в данном учебном пособии.

1. Одна из основных задач – построение математической модели, допускающее строгое или формальное определение случайного процесса, и исследование общих свойств этой модели.

2. Важной задачей является классификация случайных процессов. Существующая классификация в теории случайных процессов заключается в выделении из всей совокупности таких процессов некоторых классов, допускающих более или менее конструктивное описание [4]. Каждый класс характеризуется тем, что достаточно дополнительно задать лишь конечное число функциональных характеристик, чтобы выделить из всего класса отдельный случайный процесс. Иногда рассматривают классы процессов, допускающих единообразное решение определенного набора задач. Можно отметить следующие широкие классы: а) марковские процессы, включая, естественно, цепи Маркова; б) процессы с конечными моментами второго порядка (гильбертовы процессы); в) процессы с независимыми приращениями; г) стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы, в частности гауссовский и винеровский процессы; д) эргодические процессы.

3. Задача отыскания для различных классов случайных процессов аналитического аппарата, дающего возможность находить вероятностные характеристики процессов, тесно связана с предыдущей. Для простейших вероятностных характеристик такой аппарат создан и использует, как правило, теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными, а также интегродифференциальные и интегральные уравнения, разностные уравнения, преобразования Фурье.

4. Изучение различных преобразований случайных процессов также является важной задачей теории случайных процессов. Эти преобразования используются для того, чтобы с их помощью изучать сложные процессы путем сведения их к более простым. К такой задаче можно отнести и анализ стохастических дифференциальных и интегральных уравнений, в которые входят случайные процессы.

5. Задача определения значений некоторого функционала от процесса по значениям других функционалов от этого же процесса играет также важную роль в формировании ряда разделов теории случайных процессов. Примером такой задачи является задача предсказания, позволяющая определять значение процесса в некоторые будущие моменты времени, наблюдая процесс в течение определенного промежутка времени.

Опишем кратко некоторые основные области применения различных классов случайных процессов в настоящее время.

Марковские процессы широко используются при разработке математических моделей информационно-компьютерных систем и сетей, в математической, в частности финансовой, экономике, в математической биологии, в теории каскадов космических частиц. В этой же теории применяются процессы с независимыми приращениями. Стационарные в узком и широком смыслах случайные процессы имеют широкое применение в радиоэлектронике и теории информации, а гауссовские процессы – также в радиоэлектронике и молекулярной теории газов. Наряду со стандартными разделами курса (теория вероятностей, марковские процессы и цепи Маркова, стационарные процессы) в пособии присутствуют нетрадиционные разделы, посвященные стохастическому анализу, стохастическим интегралам и дифференциальным уравнениям, мартингалам.

Следует отметить, что за последние полвека теория вероятностей и случайных процессов превратились в стройную математическую дисциплину с собственными проблемами и методами доказательств. Выяснилось, что наиболее существенные проблемы этой теории служат делу решения многочисленных прикладных задач. Вообще в последнее время методы теории вероятностей и случайных процессов находят все новые области применения и сейчас ни одна из естественных наук и многие гуманитарные науки не избежали влияния этой теории.

В данном учебном пособии III раздел посвящен математической статистике, так как статистика является наиболее практическим разделом среди дисциплин стохастического блока. Множество явлений и процессов в естествознании и обществе может быть подвержено адекватному статистическому анализу методами математической статистики.

Математическая статистика является аксиоматически обоснованной математической наукой, которая, придавая теоретическое обоснование результатам статистической отрасли, обеспечивает информационную поддержку органам управления социально-экономическим развитием любой страны. Однако следует заметить, что еще в начале XX в. этот признанный в современной научной классификации раздел математической науки относился к эмпирическому и экспериментальному направлению. Заслуга решительного поворота к признанию статистики математической наукой, принадлежит прежде всего английскому математику К. Пирсону. Трудно переоценить его вклад в разработку математического аппарата статистики, содержащего, в частности, теорию корреляции и критерии согласия.

В дальнейшем развитии математической статистики необходимо упомянуть Р. Фишера (дисперсионный анализ), И. Фишера (теория статистических индексов), А.А. Чупрова, Н.С. Четверикова, Е.Е. Слуцкого (статистический анализ временных рядов).

В становление математической статистики большой вклад внесли также А.Н. Колмогоров, Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов, Д.М. Чибисов.

РАЗДЕЛ I

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ГЛАВА 1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ИХ ВЕРОЯТНОСТИ

1.1. Случайные события и соотношения между ними

Типичной формой закона, устанавливаемого научной теорией, является следующая: создание условий A неизбежно приводит к B. Целью теории как раз и является определение условий, при которых какое-либо интересующее нас событие заведомо происходит или заведомо не происходит, т.е. эти условия могут быть выражены по одной из следующих двух схем:

1) если осуществляется комплекс условий A, то с достоверностью происходит событие B;

2) если осуществляется комплекс условий A, то событие B произойти не может.

В первом случае событие B по отношению к комплексу условий A называется *достоверным событием*, а во втором – *невозможным событием*. Такие события принято называть *детерминированными*. Детерминированные события с неизбежностью следуют после осуществления соответствующего комплекса условий. Другими словами, комплекс условий A в этом случае однозначно определяет событие B. Событие B, которое при осуществлении комплекса условий A иногда происходит, а иногда не происходит, называется *случайным* по отношению к этому комплексу условий.

Дадим строгое определение случайного события. Для этого нам понадобится понятие об элементарных событиях.

Определение. Возможные события, порождаемые комплексом условий, называются элементарными, если:

а) они различны (т.е. осуществление одного означает неосуществление любого другого);

б) после выполнения комплекса условий обязательно происходит одно из них.

Заметим, что эти условия определяют элементарные события неоднозначно, т.е. даже в одной и той же задаче они могут быть определены по-разному. Обозначим через $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$ пространство элементарных событий.

Определение. Любое объединение элементарных событий называется *случайным событием*, $B \subseteq \Omega$.

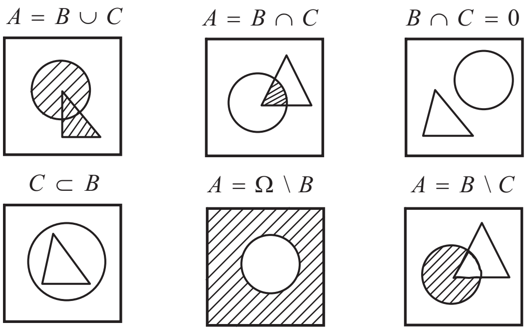
Событие B осуществляется тогда, когда происходит одно из элементарных событий $\omega \in B$. В данном случае пространство Ω может рассматриваться тоже как событие. Так как одно из элементарных событий происходит всегда, то и событие Ω происходит всегда, поэтому оно является достоверным событием. Событие, не содержащее ни одного элементарного события, является *невозможным* и обозначается $\varnothing$.

Таким образом, мы пришли к описанию случайных событий как множеств, получающихся объединением элементарных событий. В связи с этим для определения соотношений между случайными событиями в теории вероятностей принят язык теории множеств, который приобретает своеобразную вероятностную трактовку. Поясним некоторые соотношения при помощи табл. 1.1.

Таблица 1.1

Язык теории множеств	Соотношения между событиями на языке теории множеств
$A = B \bigcup C$	Событие A (объединение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходит хотя бы одно из событий B и C
$A = B \bigcap C$	Событие A (пересечение событий B и C) происходит тогда и только тогда, когда происходят и событие B, и событие C
$B \bigcap C = \varnothing$	События B и C являются несовместными. Если событие C происходит, то событие B не происходит
$C \subset B$	Событие C влечет за собой событие B
$A = \Omega \setminus B$, $\left(A = \overline{B}\right)$	Событие A является дополнительным (противоположным) по отношению к событию B. Событие A происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие B
$A = B \setminus C$	Событие A происходит тогда и только тогда, когда событие B происходит, а событие C не происходит

Соотношения между событиями наглядно иллюстрируются на диаграммах Вьенна – Эйлера, где пространство Ω изображено в виде квадрата, внутренними точками являются элементарные события, событие B – в виде круга, событие C – в виде треугольника, событию A соответствуют заштрихованные области. Приведем диаграммы для соотношений между событиями (см. табл. 1.1).



Для анализа соотношений между случайными событиями могут оказаться полезными следующие соотношения.

1. $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$. Данные равенства следуют из определений.

2. $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$. Доказательство следует из следующей цепочки импликаций:

$$\omega \in \overline{A \bigcup B} \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \notin A,\ \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A},\ \omega \in \overline{B} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B}$$

и, наоборот,

$$\omega \in \overline{A} \bigcap \overline{B} \Rightarrow \omega \notin A,\ \omega \notin B \Rightarrow \omega \notin A \bigcup B \Rightarrow \omega \in \overline{A \bigcup B}.$$

3. $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$.

4. $A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$. Это следует из того, что если $\omega \in \overline{B}$, то $\omega \notin B$, значит, $\omega \notin A$ и $\omega \in \overline{A}$.

Из соотношений 2–4 следует, что, если задана некоторая конструкция из событий, ее дополнение можно выразить, заменив в ней все события на противоположные, символы объединения, пересечения и включения – на символы пересечения, объединения и обратного к включению соответственно. Данное свойство известно под названием *закона де Моргана*, например $\overline{\left(A \bigcup B\right) \bigcap C} = \left(\overline{A} \bigcap \overline{B}\right) \bigcup \overline{C}$.

1.2. Вероятностные модели. Классическое определение вероятности

Любому случайному событию $A \subseteq \Omega$ поставим в соответствие действительное неотрицательное число $P(A)$, которое будем называть *вероятностью события* A. Положим, что $P(0) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Если Ω состоит из конечного множества элементарных событий, $\Omega = \left\{\omega_k, k = \overline{1, N}\right\}$ и $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \omega_{j_k}$, $n < N$, то естественно предположить, что $0 = P(0) < P(A) < P(\Omega) = 1$. Если все ω_k, $k = \overline{1, N}$, равновозможны, то естественно также предположить, что вероятность события A пропорциональна числу элементарных событий, которое оно объединяет:

$$P(A) = pn,$$

где коэффициент пропорциональности p можно найти из условия $P(\Omega) = 1$, т.е. при $n = N$ получаем $pN = 1$; отсюда следует, что $p = \dfrac{1}{N}$, $P(A) = \dfrac{n}{N}$. К такому же результату можно прийти, если принять, что $P(\omega_k) = p$, $k = \overline{1, N}$, где p имеет смысл вероятности элементарного события, и выполняется свойство аддитивности:

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \omega_{j_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P(\omega_{j_k}),$$

поскольку в этом случае снова имеем $P(A) = pn$. Итак, в данном случае $p(\omega_k) = p = \dfrac{1}{N}$, $k = \overline{1, N}$. Условие

$$P(\Omega) = P(\bigcup_{k=1}^{N} \omega_k) = \sum_{k=1}^{N} P(\omega_k) = 1$$

называется *условием нормировки*.

Говорят, что определена *вероятностная модель*, если указано множество Ω всех возможных элементарных событий и на этих элементарных событиях определена вероятностная функция $P(\omega)$. Для рассмотренного выше случая вероятностная модель определяется следующим образом:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ..., \omega_N\};$$

$$P(\omega) = \left\{\frac{1}{N}, \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}, ..., \frac{1}{N}\right\}.$$

Данная вероятностная модель называется *классической*.

Определение *(классическое определение вероятности)*. Пусть пространство элементарных событий состоит из конечного числа равновозможных элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ и пусть случайное событие A состоит из n элементарных событий: $A = \left\{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, ..., \omega_{j_n}\right\}$, $\omega_{j_i} \in \Omega$, $i = \overline{1, n}$. Тогда вероятностью события A называется число

$$P(A) = \frac{n}{N}.$$

Эта формула называется *формулой классической вероятности*.

Пример 1.1. Монету бросают дважды. Найти вероятность того, что хотя бы 1 раз монета упадет гербом вверх.

Решение. Пространством элементарных событий является множество $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, где ГЦ означает, что при первом бросании появился герб, а при втором – цифра. Таким образом, $N = 4$. Пусть $A = \{$хотя бы 1 раз появится герб$\}$, тогда

$$A = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\} \Rightarrow n = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{4}.$$

Пусть теперь пространство Ω состоит из счетного числа элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...\}$. В таком случае надо считать $P(\omega_k)$ неодинаковыми либо считать, что свойство аддитивности не выполняется. В противном случае, так как Ω неограничено, мы бы получили $P(\omega_k) = 0$, $\forall k = 1, 2, ...$ Оказывается, что если выбрать первую возможность, то получающаяся схема является целесообразной и непротиворечивой. Поэтому в данном случае полагают $P(\omega_k) = p_k$, $k = 1, 2, ...$. Свойство аддитивности сохраняется, а условие нормировки имеет следующий вид:

$$P(\Omega)=P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\omega_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(\omega_k)=\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1.$$

Говорят, что задана *дискретная вероятностная модель*, если задано дискретное вероятностное множество элементарных событий (счетное или конечное) и для каждого из них определена вероятность, т.е. заданы

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_k,...\};$$

$$P(\omega)=\{p_1,p_2,...,p_k,...\}.$$

1.3. Элементы комбинаторики

Основной проблемой при решении задач с использованием формулы классической вероятности является подсчет числа способов, которыми могло произойти то или иное событие. В связи с этим такие задачи решаются, как правило, методами комбинаторики.

Часто используется следующее очевидное правило (*основной принцип комбинаторики*): если некий выбор A можно осуществить m различными способами, а некоторый другой выбор B можно осуществить n способами, то выбор A и B (A или B) можно осуществить mn $(m+n)$ способами.

При этом классическое определение вероятности можно выразить по-другому.

Определение. Рассмотрим эксперимент, имеющий N одинаково возможных исходов (любой мыслимый результат эксперимента называется *элементарным событием*). Предположим, что событию A благоприятствует n из этих исходов (оно состоит из n элементарных событий). Тогда справедлива формула классической вероятности.

При решении задач часто используют размещения, перестановки и сочетания. Если дано множество $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_n\}$, то *размещением* (*сочетанием*) из n элементов по k называется любое упорядоченное (неупорядоченное) подмножество из k элементов множества Ω. При $k=n$ размещение называется *перестановкой* из n элементов.

Пусть, например, дано множество $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$. Размещениями из 3 элементов этого множества по 2 являются (ω_1,ω_2), (ω_1,ω_3), (ω_2,ω_3), (ω_2,ω_1), (ω_3,ω_1), (ω_3,ω_2); сочетаниями – (ω_1, ω_2), (ω_1, ω_3), (ω_2, ω_3). Два сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, а размещения отличаются либо самими элементами, либо порядком их следования.

Число сочетаний из *n* элементов по *k* вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)\ !} = n(n-1)\ ...\ (n-k+1)$ – число размещений из *n* элементов по *k*; $P_k = k!$ – число перестановок из *k* элементов. Справедливость соотношения $A_n^k = k!C_n^k$ следует из того, что число всех *k*-элементных подмножеств множества Ω равно C_n^k и каждое такое подмножество можно упорядочить $k!$ способами.

Рассмотрим перестановки с повторениями. Пусть из элементов ω_1, ω_2, ..., ω_i образуются конечные последовательности, содержащие *n* членов, в которых ω_1 повторяется k_1 раз, ω_2 – k_2 раза, …, ω_i – k_i раз, $k_1 + k_2 + ... + k_i = n$. Такие последовательности называются *перестановками с повторениями*. Две перестановки считаются одинаковыми, если они совпадают порядком расположения элементов, и считаются различными, если у них различный порядок расположения элементов. Число различных перестановок с повторениями

$$P_n(k_1,\ k_2,\ ...,\ k_i) = \frac{n!}{k_1!k_2!...k_i!}.$$

Пример 1.2. Какова вероятность того, что из 6 отмеченных чисел в карточке «Спортлото» (игра 6 из 49) *k* чисел будут выигрышными, $k = \overline{0,\ 6}$.

Решение. В данном примере эксперимент состоит в том, что случайным образом отмечаются 6 чисел из 49 в карточке «Спортлото». Поэтому равновозможными элементарными событиями будут наборы из шести отмеченных чисел. Так как для определения того, произойдет или не произойдет событие *A* – среди отмеченных чисел *k* чисел выигрышные, – порядок чисел не существен, то в качестве равновозможных элементарных событий достаточно рассматривать неупорядоченные наборы 6 чисел из 49. Следовательно, число равновозможных элементарных событий равно C_{49}^6. Событие *A* состоит из наборов 6 чисел, k из которых выигрышные, а $6-k$ – проигрышные. Набор из k выигрышных чисел можно выбрать C_6^k способами, а набор $6-k$ проигрышных чисел можно выбрать C_{43}^{6-k} способами. Тогда по основному принципу комбинаторики набор из k выигрышных и $6-k$ проигрышных чисел можно выбрать $C_6^k C_{43}^{6-k}$ способами. Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}.$$

Например, для $k=6$ имеем $P(A)\approx\left(14\cdot 10^6\right)^{-1}$.

ЗАДАЧИ К § 1.1—1.3

1.1. Доказать равенства для случайных событий:

$$\text{а) } \overline{\overline{A}\bigcap\overline{B}}=A\bigcup B;$$

$$\text{б) } \overline{\overline{A}\bigcup\overline{B}}=A\bigcap B.$$

1.2. Когда возможны равенства: а) $A\bigcup B=A$; б) $A\bigcup B=\overline{A}$; в) $A\bigcup B=A\bigcap B$; г) $A\bigcap B=A$; д) $A\bigcap B=\overline{A}$?

1.3. Упростить выражения: а) $(A\bigcup B)\bigcap(B\bigcup C)$; б) $(A\bigcup B)\bigcap$ $\bigcap(A\bigcup\overline{B})$; в) $(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup\overline{B})\bigcap(\overline{A}\bigcup B)$.

1.4. Доказать равенства: а) $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i$; б) $\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$.

1.5. Из множества студентов, присутствующих на лекции по теории вероятностей, наудачу выбирают одного. Пусть событие A состоит в том, что выбранный студент закончил среднюю школу с медалью, B – победитель областной олимпиады, C – выпускник лицея. Описать события $A\bigcap\overline{B}\bigcap C$, $A\setminus(A\bigcap B)$. При каком условии будет справедливо равенство $A\bigcap B\bigcap C=A$? Проверить справедливость соотношения $A\bigcap C\subseteq B$.

1.6. Брошен игральный кубик. Найти вероятность того, что появившееся число очков кратно 3.

1.7. Игральный кубик подбрасывается дважды. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков не превосходит 4.

1.8. Среди n лотерейных билетов k выигрышных. Наудачу взяли m билетов. Определить вероятность того, что среди них l выигрышных.

1.9. K человек случайным образом рассаживаются за круглым столом $(K > 2)$. Найти вероятность того, что 2 фиксированных лица A и B_2 окажутся рядом.

1.10. Определить вероятность того, что серия наугад выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номер серии может быть любым пятизначным числом, начиная с 00001.

1.11. На 10 карточках написаны буквы А, А, А, М, М, Т, Т, Å, È, К.После перестановки вынимают наугад одну карточку за другой и раскладывают их в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что на карточках будет написано слово «МАТЕМАТИКА».

1.12. Телефонный номер в г. Гродно состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что все цифры различны.

1.13. Какова вероятность того, что четырехзначный номер случайно взятого автомобиля в г. Гродно имеет все цифры различные?

1.14. В лифт двенадцатиэтажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на восьмом этаже.

1.15. На полке в случайном порядке расставлено 20 книг, среди которых находится трехтомник Я. Купалы. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

1.16. Некоторые жители г. Гродно и других городов шестизначный номер троллейбусного или автобусного билета считают «счастливым», если сумма его первых 3 цифр совпадает с суммой последних 3 цифр. Найти вероятность получить «счастливый» билет.

1.17. Рассмотрим множество F кусочно-линейных функций вида

$$f(0),\ f(x) = f(i) + \alpha_i (x - i),\ i \le x \le i+1,\ 0 \le i \le n-1,$$

где α_1 принимает значение 1 или –1. Найти вероятность того, что: а) наугад выбранная функция из множества F принимает в точке n значение k; б) наугад выбранная функция из F имеет в полуинтервале $(0,\, n]$ i корней; в) для случайно выбранной функции $f \in F$

$$\int_0^n f(x)\,dx = 0.$$

1.18. В партии, состоящей из N изделий, имеется k дефектных. В процессе приемного контроля из партии выбирается n изделий. Найти вероятность того, что из них ровно m изделий будут дефектными.

1.19. В ящике находится K типовых элементов замены (ТЭЗ), из них K_1 элементов 1-го типа, …, K_i элементов i-го типа, …, K_n элементов n-го типа; $\sum_{i=1}^{n} K_i = K$. Из ящика выбирают наугад k ТЭЗ. Найти вероятность того, что среди них будет k_1 ТЭЗ 1-го типа, …, k_i ТЭЗ i-го типа, …, k_n ТЭЗ n-го типа.

1.20. За N перенумерованными ПЭВМ будут работать n студентов (1 студент – за одной ПЭВМ). Каждый студент выбирает любую ПЭВМ случайно и с одинаковой вероятностью. Найти вероятность того, что для работы будут выбраны ПЭВМ с номерами $1,\ 2,\ ...,\ n$.

1.21. Для работы на N ПЭВМ случайным образом распределяются K студентов. Под состоянием совокупности из N ПЭВМ будем понимать вектор $\boldsymbol{k} = (k_1,\ k_2,\ ...,\ k_N)$, где k_i – число студентов, которые выполняют свое задание на i-й ПЭВМ, $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$. Состояния считаются различными, если им соответствуют векторы с различными компонентами. Найти: а) число состояний сети; б) вероятности состояний, предположив, что все состояния равновозможные.

1.22. Пакет из 10 различных сообщений должен быть передан по электронной почте. Сообщения передаются одно за другим произвольным образом. Определить вероятность того, что сообщение A будет передано раньше, чем сообщение B.

1.23. Из 30 экзаменационных вопросов студент знает 20. Какова вероятность того, что он правильно ответит на 2 вопроса из двух?

1.24. По линии связи в случайном порядке передают 30 букв русского алфавита. Найти вероятность того, что на ленте появится последовательность букв, которые образуют слово «МИНСК».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Маталыцкий Михаил Алексеевич
Хацкевич Геннадий Алексеевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Учебное пособие

Редактор *А.В. Новикова*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректоры *Т.К. Хваль*, *Е.З. Липень*, *Н.Г. Баранова*
Компьютерная верстка *Ю.Н. Трусевич*

Подписано в печать 23.07.2012. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Гарнитура «Таймс». Офсетная печать. Усл. печ. л. 37,8. Уч.-изд. л. 30,79.
Тираж 400 экз. Заказ 1736.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
ЛИ № 02330/0494062 от 03.02.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com