Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

Геометрия

для самоподготовки

9
класс

Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

Геометрия

для самоподготовки

9 класс

Пособие
для учащихся
учреждений общего среднего
образования

Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 514(075.3/.4)
ББК 22.151я721
С60

Р е ц е н з е н т: старший преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин и информационных технологий ГУО «Минский областной институт развития образования» *В.В. Казаков*

Солтан, Г. Н.

С60 Геометрия для самоподготовки : 9-й класс : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 86 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2153-5.

Книга написана в соответствии с программой по математике для учреждений общего среднего образования. В ней изложен курс геометрии 9 класса в виде материалов для самоподготовки.

Для учащихся общеобразовательных учебных заведений, гимназий, абитуриентов. Пособие будет полезным для самостоятельной работы учащихся, а также для систематизации знаний и закрепления практических умений и навыков при подготовке к экзаменам по математике.

УДК 514(075.3/.4)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-06-2153-5

Предисловие

Пособие написано в соответствии с программой по математике для общеобразовательных учреждений. В нем изложен курс геометрии 9 класса в виде материалов для самоподготовки, большинство из которых включает рассмотрение теоретических вопросов и решение типовых задач. Наиболее важное (определения, аксиомы, теоремы) выделено специальными шрифтами. После объяснительного текста предложены контрольные вопросы, которые предназначены для повторения и проверки усвоения теории. Далее идут упражнения для закрепления теоретических знаний и формирования практических умений и навыков. Для повторения учебного материала и подготовки к контрольным работам в отдельные параграфы включены задачи по основным темам, в которых предлагаются специальные задания под рубрикой «*Проверь себя*!». Также имеются «Приложения», в которых приведены таблицы квадратов натуральных чисел (10–99), приближенных значений синусов, косинусов (0°–90°) и тангенсов (0°–89°) углов. К упражнениям даются указания и ответы.

Для лучшего усвоения материала целесообразно пользоваться этим пособием по следующей схеме.

1. Изучить теоретический материал и примеры решения задач.

2. Ответить на контрольные вопросы и приступить к выполнению упражнений.

3. Для проверки правильности решения задач и при возникновении значительных затруднений в их решении обратиться к ответам и указаниям.

Желаем успехов!

Авторы

I. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Взаимное расположение прямой и окружности

Рассматривая вопрос о взаимном расположении прямой и окружности, можно отметить, что:

1) *если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то эта прямая имеет только одну общую точку с окружностью* (рис. 1, *а*);

2) *если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то эта прямая не имеет общих точек с окружностью* (рис. 1, *б*);

3) *если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то эта прямая имеет с окружностью только две общие точки* (рис. 1, *в*).

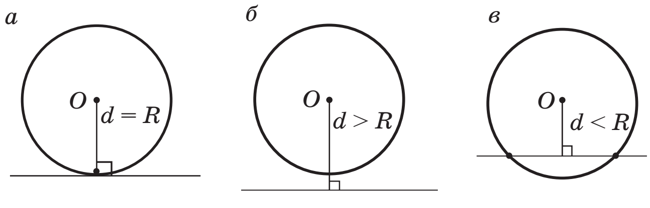

Рис. 1

Обоснуем третий случай. Пусть дана окружность с центром в точке O, радиус которой $OA = R$, а расстояние OH от точки O до данной прямой равно d ($d < R$). Отметим на этой прямой точки B и C такие, что $BH = HC = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 2). Тогда по теореме Пифагора $OB = OC = R$, следовательно, данная прямая имеет с окружностью две общие точки – B и C.

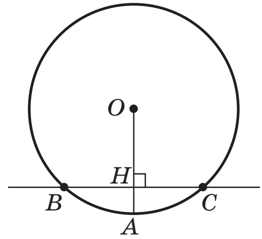

Рис. 2

Докажем теперь, что прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек. Допустим, что прямая b имеет три общие точки B, D и C с этой окружностью (рис. 3). Тогда $OB = OD = OC$, а треугольники OBD и ODC – равнобедренные. Проведем медианы OK и OH этих треугольников. Они являются и их высотами. Получили, что из точки O проведены два перпендикуляра OK и OH к прямой b, а это противоречит теореме о единственности перпендикуляра, проведенного из точки к прямой. Значит наше допущение неверно. Следовательно, прямая и окружность не могут иметь более двух общих точек.

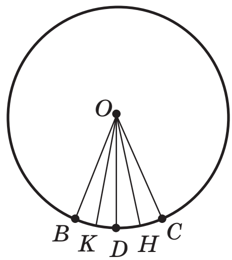

Рис. 3

З а д а ч а. В данной окружности с центром в точке O проведены хорда AB и радиус OM, пересекающий эту хорду в точке K, которая делит радиус и хорду пополам. Найти длину этой хорды, если диаметр окружности равен 12 см.

Р е ш е н и е. Проведем радиусы OA и OB окружности (рис. 4). Треугольник AOB равнобедренный. Отрезок OK его медиана, проведенная к основанию, следовательно, OK – высота треугольника. Из прямоугольного ΔOKA по теореме Пифагора $AK = \sqrt{27}$ см $= 3\sqrt{3}$ см. Тогда $AB = 6\sqrt{3}$ см.

О т в е т: $6\sqrt{3}$ см.

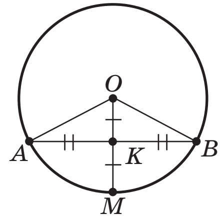

Рис. 4

1. Каково может быть взаимное расположение прямой и окружности?

Упражнения

1. Каково взаимное расположение прямой AB и окружности с центром в точке O и радиусом, равным 9 см, если: а) $AB = 24$ см, $OA = OB = 15$ см; б) $AB = 16$ м, $OA = OB = 17$ м?

2. Расстояние от центра окружности до точки M меньше радиуса этой окружности. Докажите, что любая прямая, проходящая через точку M, имеет с окружностью две общие точки.

3. Отрезок BH – перпендикуляр, проведенный из точки B к прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 6 см. Сколько общих точек имеют прямая BH и окружность, если: а) $\angle BOH = 60°$, $OB = 12$ см; б) $BH = 5$ см, $\angle OBH = 45°$?

4. а) Докажите, что радиус, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен ей. Верно ли обратное утверждение?

б) Точка A удалена от центра данной окружности на расстояние, меньшее ее радиуса. Постройте все точки, симметричные относительно точки A, которые принадлежат данной окружности.

5. а) В окружности проведены диаметры AB и CD. Установите вид четырехугольника $BDAC$.

б) Отрезок AB является диаметром окружности, а ее хорды BC и AM параллельны. Докажите, что хорда CM является диаметром этой окружности.

6. а) Точка O – общий центр двух окружностей (рис. 5, *а*). Докажите, что ΔAOB и ΔCOD подобны.

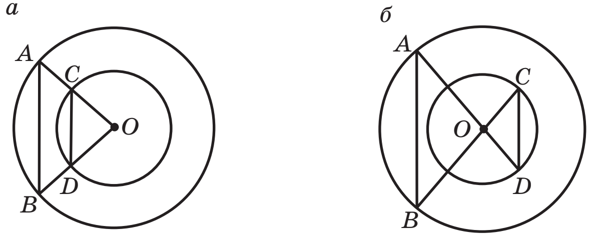

Рис. 5

б) Докажите, что прямые AB и DC параллельны (рис. 5, *б*), если точка O – общий центр окружностей.

7. Постройте квадрат $ABCD$ со стороной, равной 4 см, и окружность с центром в точке A и радиусом 3 см. Сколько общих точек имеет данная окружность с прямыми AB, BC и BD? Ответ обоснуйте.

2. Касательная к окружности

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности.

Эту общую точку называют **точкой касания** прямой и окружности (рис. 6).

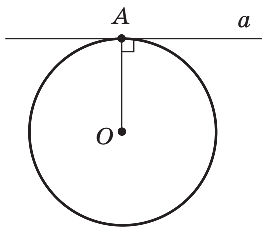

Рис. 6

Теорема (*признак касательной*). **Если прямая проходит через конец радиуса, принадлежащий окружности, и перпендикулярна ему, то она является касательной к окружности.**

Доказательство. Пусть прямая AB перпендикулярна радиусу окружности OA, конец которого (точка A) лежит на окружности (рис. 7). Тогда произвольная точка X прямой AB, отличная от точки A, удалена от центра O окружности на расстояние OX, большее OA ($OD = OA$, $OX > OA$, так как гипотенуза прямоугольного треугольника длиннее его катета). Поэтому точка X не принадлежит окружности. Следовательно, прямая AB имеет только одну общую точку A с окружностью. Значит она является касательной к окружности.

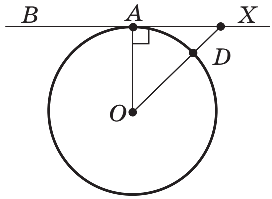

Рис. 7

Теорема (*свойство касательной*). **Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания.**

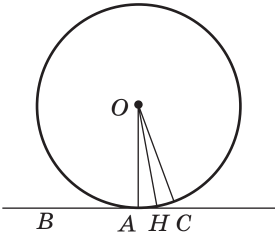

Рис. 8

Доказательство. Пусть прямая AB касается окружности в точке A (рис. 8). Допустим, что радиус окружности OA не перпендикулярен прямой AB. Проведем радиус OH окружности, перпендикулярный прямой AB, и отложим на прямой AB отрезок HC, равный отрезку HA. Тогда $OC = OA$ (по свойству серединного перпендикуляра OH к отрезку AC). Следовательно, точка C также принадлежит окружности. Получили, что прямая AB имеет с окружностью более одной общей точки, а это противоречит тому, что AB – касательная к окружности. Значит наше предположение неверно. Следовательно, радиус OA перпендикулярен касательной AB.

Прямая, имеющая с окружностью две общие точки, называется секущей.

Задача. Построить касательную к данной окружности, проходящую через точку, не принадлежащую ей.

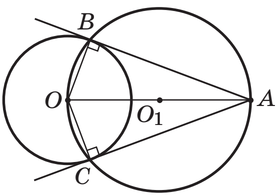

Рис. 9

Решение. Пусть дана окружность с центром в точке O и точка A, не лежащая на окружности (рис. 9). Проведем отрезок AO и построим на этом отрезке как на диаметре окружность, обозначим центр этой окружности O_1. Тогда общие точки B и C окружностей являются точками касания прямых AB, AC и данной окружности, так как $\angle OBA = \angle OCA = 90°$ (треугольники OBA и OCA – прямоугольные, так как их медианы BO_1 и CO_1 равны половине стороны OA).

1. Какая прямая называется касательной к окружности?
2. Сформулируйте и докажите признак касательной.
3. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное признаку касательной.

Содержание

Учебное издание

Солтан Геннадий Николаевич
Солтан Алла Евгеньевна

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

9 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования

Редактор *Т.В. Кульнис*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *Ю.Н. Трусевич*

Подписано в печать 27.01.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «SchoolBookNewC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 5,12. Уч.-изд. л. 4,05. Тираж 1000 экз. Заказ 136.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Филиал № 1 открытого акционерного общества «Красная звезда». ЛП № 02330/0494160 от 03.04.2009. Ул. Советская, 80, 225409, Барановичи.