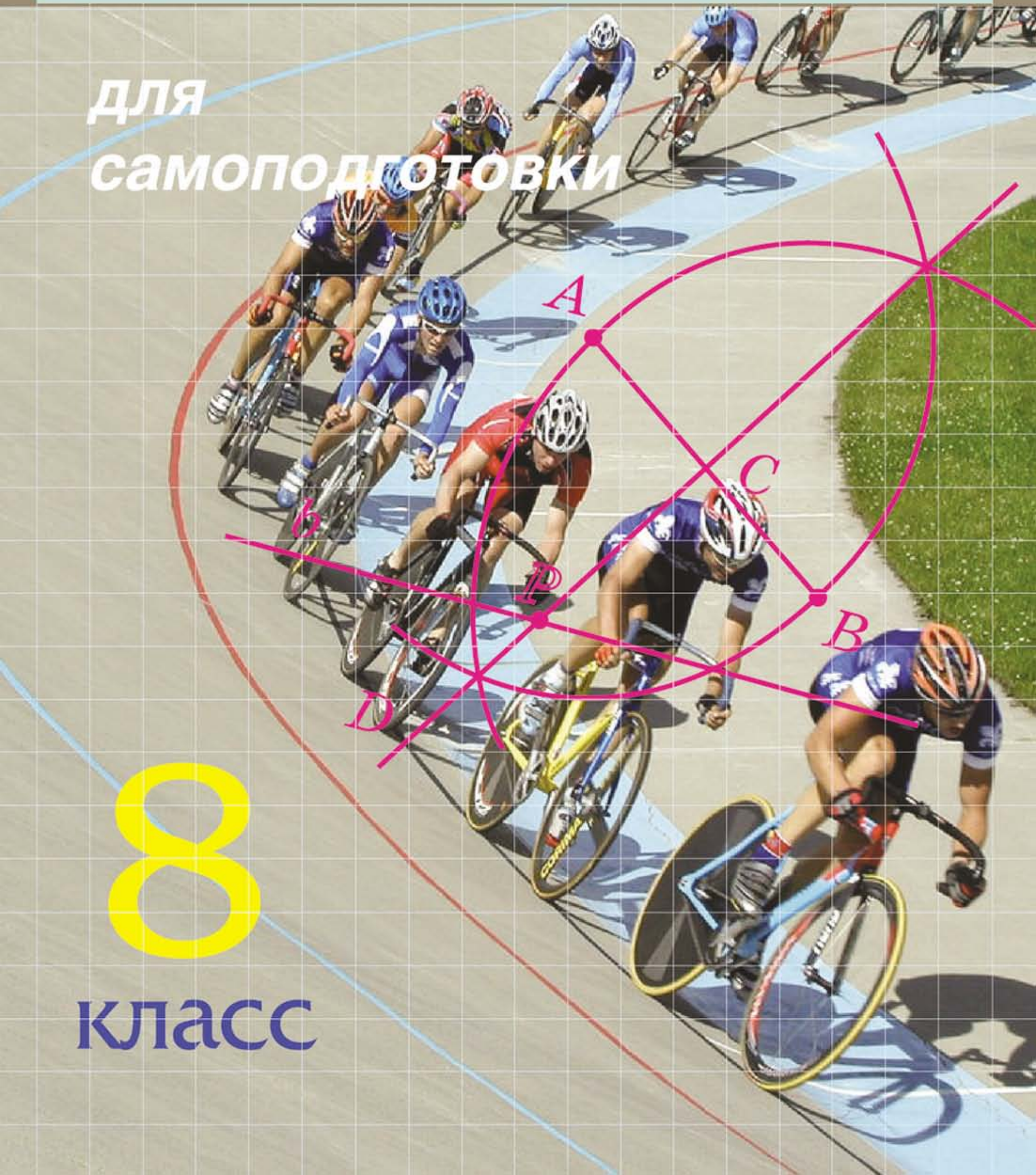
Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

Геометрия

для самоподготовки



8
класс

Г.Н. Солтан А.Е. Солтан

Геометрия

для самоподготовки

8 класс

Пособие
для учащихся
учреждений общего среднего
образования

Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 514(075.3/.4)
ББК 22.151я721
С60

Рецензент: старший преподаватель кафедры естественнонаучных дисциплин и информационных технологий ГУО «Минский областной институт развития образования» *В.В. Казаков*

Солтан, Г. Н.
С60 Геометрия для самоподготовки : 8-й класс : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования / Г. Н. Солтан, А. Е. Солтан. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 110 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2152-8.

Книга написана в соответствии с программой по математике для учреждений общего среднего образования. В ней изложен курс геометрии 8 класса в виде материалов для самоподготовки.
Для учащихся общеобразовательных учебных заведений, гимназий, абитуриентов. Пособие будет полезным для самостоятельной работы учащихся.

УДК 514(075.3/.4)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-06-2152-8

Предисловие

Пособие написано в соответствии с программой по математике для общеобразовательных учреждений. В нем изложен курс геометрии 8 класса в виде материалов для самоподготовки, большинство из которых включает рассмотрение теоретических вопросов и решение типовых задач. Наиболее важное (определения, аксиомы, теоремы) выделено специальными шрифтами. После объяснительного текста предложены контрольные вопросы, которые предназначены для повторения и проверки усвоения теории. Далее идут упражнения для закрепления теоретических знаний и формирования практических умений и навыков. Для повторения учебного материала и подготовки к контрольным работам в отдельные параграфы включены задачи по основным темам, в которых предлагаются специальные задания под рубрикой «*Проверь себя!*». Также имеются «Приложения», в которых приведены таблицы квадратов натуральных чисел (10–99), приближенных значений синусов, косинусов (0°–90°) и тангесов (0°–89°) углов. К упражнениям даются указания и ответы.

Для лучшего усвоения материала целесообразно пользоваться этим пособием по следующей схеме.

1. Изучить теоретический материал и примеры решения задач.

2. Ответить на контрольные вопросы и приступить к выполнению упражнений.

3. Для проверки правильности решения задач и при возникновении значительных затруднений в их решении обратиться к ответам и указаниям.

Желаем успехов!

Авторы

I. МНОГОУГОЛЬНИКИ

1. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника

Многоугольником называется простая замкнутая ломаная вместе с образованной ею внутренней областью (рис. 1). При этом внутренняя область называется *внутренней областью многоугольника*. Простая замкнутая ломаная делит плоскость на две части: внутреннюю область (на рис. 1 она закрашена) и внешнюю область.

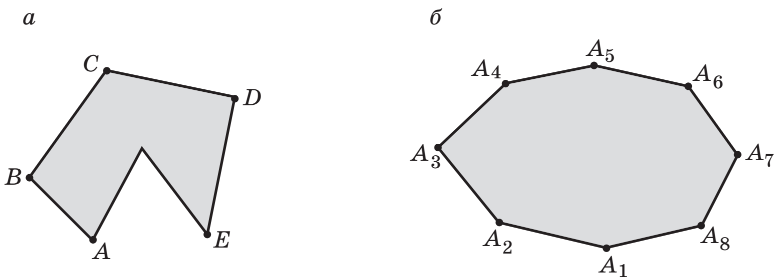


Рис. 1

Вершины ломаной называются *вершинами многоугольника*, а звенья ломаной – *сторонами многоугольника*. Две вершины многоугольника, принадлежащие одной стороне, называются *соседними*, а две стороны с общей вершиной – *смежными* (или *соседними*).

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости, границей которой является каждая прямая, содержащая его сторону (см. рис. 1, *б*). Выпуклый многоугольник содержит любой отрезок, соединяющий две его различные точки.

Многоугольник называется *невыпуклым*, если существует хотя бы одна полуплоскость, на границе которой лежит его сторона, и не все его точки принадлежат этой полуплоскости (см. рис. 1, *а*). Для невыпуклого многоугольника всегда найдется отрезок, соединяющий две его различные точки, который не содержится в нем.

Многоугольник с n вершинами, а значит, и с n сторонами называется *n-угольником*. Отрезок, соединяющий любые две не соседние вершины выпуклого многоугольника, называется его *диагональю*. Сумма длин всех сторон многоугольника называется его *периметром*. *Углом* выпуклого многоугольника при данной вершине называется угол, стороны которого исходят из этой вершины и содержат две его соседние стороны.

Если сторон – четыре, то многоугольник называют *четырехугольником*. Не соседние стороны AB и CD, BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ называются *противоположными* (рис. 2). В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и C, B и D называются противоположными, $\angle A$ и $\angle D$ – прилежащими к стороне AD.

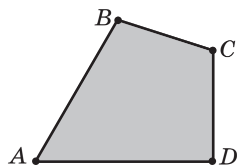


Рис. 2

Т е о р е м а. **Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)180°$.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим выпуклый n-угольник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ (рис. 3). Углы $A_nA_1A_2$, $A_1A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_nA_1$ являются углами этого многоугольника. Найдем их сумму. Для этого, соединив диагоналями вершину A_1 с другими вершинами, получим $(n-2)$ треугольника, сумма углов которых равна сумме углов n-угольника. Сумма углов каждого треугольника равна 180°, поэтому сумма углов многоугольника $A_1A_2...A_n$ равна $(n-2)180°$.

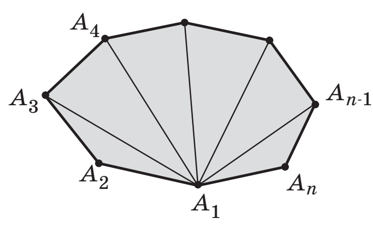


Рис. 3

Из этой теоремы следует, что **сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.**

Угол, смежный с углом выпуклого многоугольника, называют его *внешним углом* (рис. 4, *а*)

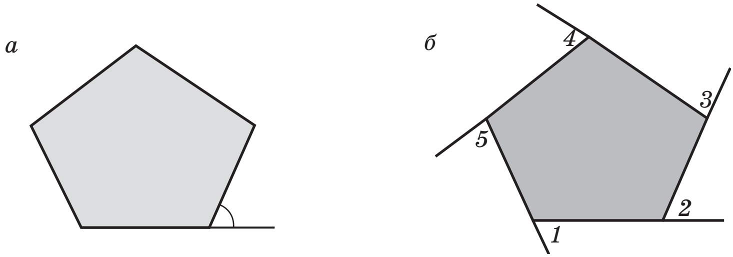


Рис. 4

Т е о р е м а. **Сумма внешних углов многоугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.**

Докажите это свойство самостоятельно, используя рис. 4, *б*.

Т е о р е м а. **В выпуклом многоугольнике длина каждой стороны меньше суммы длин остальных его сторон.**

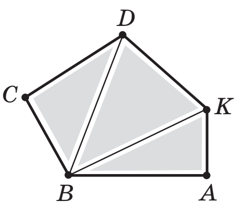


Рис. 5

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть дан выпуклый пятиугольник $ABCDK$, например, и AB – его сторона, не меньшая каждой из остальных (рис. 5). Проведем диагонали BK и BD пятиугольника. Тогда по неравенству треугольника

$$AB < AK + BK,$$
$$BK < KD + DB,$$
$$DB < DC + CB.$$

Сложив левые и правые части этих неравенств, получим $AB < AK + KD + DC + CB$. Следовательно, длина каждой стороны выпуклого пятиугольника меньше суммы длин остальных его сторон. Аналогично доказывается эта теорема для любого выпуклого n-угольника.

1. Объясните, какая фигура называется многоугольником.
2. Что такое вершины, стороны, диагонали и периметр многоугольника?
3. Какой многоугольник называется выпуклым? Объясните, какие углы называются углами выпуклого многоугольника.
4. Выведите формулу для вычисления суммы углов выпуклого n-угольника.
5. Чему равна сумма углов выпуклого четырехугольника?
6. Постройте выпуклый четырехугольник и покажите его диагонали, противоположные стороны и противоположные углы.

Упражнения

1. Выберите верные утверждения: а) сумма углов многоугольника не зависит от числа его сторон; б) сумма углов четырехугольника всегда постоянна; в) сумма углов пятиугольника равна 720°.

2. Могут ли быть все углы выпуклого четырехугольника тупыми? Ответ объясните.

3. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам: а) 2 : 4 : 5 : 7; б) 3 : 7 : 4 : 6. Найдите наибольший и наименьший углы этого многоугольника.

4. а) Внутри выпуклого четырехугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до его вершин наименьшая.

б) Можно ли одним перегибанием сложить выпуклый четырехугольник, вырезанный из бумаги, так, чтобы периметр полученной фигуры был больше, чем периметр этого четырехугольника? Ответ объясните.

2. Виды четырехугольников. Параллелограмм и его свойства

Выпуклый четырехугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом** (рис. 6, *а*).

а *б* *в* *г* *д*

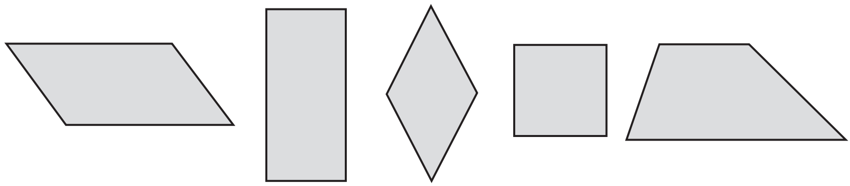


Рис. 6

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется **прямоугольником** (рис. 6, *б*).

Параллелограмм, в котором все стороны равны, называется **ромбом** (рис. 6, *в*).

Прямоугольник, в котором все стороны равны, называется **квадратом** (рис. 6, *г*).

Выпуклый четырехугольник, в котором только две противоположные стороны параллельны, называется **трапецией** (рис. 6, *д*). Параллельные стороны трапеции называются ее *основаниями*, а две другие стороны – *боковыми сторонами*.

Трапеция называется *равнобедренной*, если ее боковые стороны равны (рис. 7, *а*). Трапеция, имеющая прямой угол, называется *прямоугольной* (рис. 7, *б*).

а *б*

Рис. 7

Теорема (*свойство углов и сторон параллелограмма*). **В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 8). Диагональ AC разделяет его на два треугольника: ABC и ADC. Эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам (AC – общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении секущей AC параллельных прямых AB и CD, AD и BC соответственно). Поэтому $AB = CD$, $AD = BC$ и $\angle B = \angle D$. Получаем $\angle A = \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = \angle C$, что и требовалось доказать.

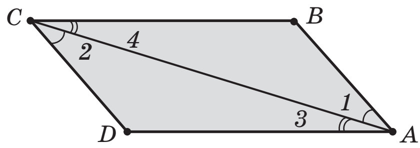


Рис. 8

Т е о р е м а (*свойство диагоналей параллелограмма*). **Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, а его диагонали пересекаются в точке O (рис. 9). Тогда $AB = CD$ (как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми); $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и соответствующих секущих). Тогда $\Delta AOB = \Delta COD$ (по второму признаку равенства треугольников). В равных треугольниках соответственные стороны равны, поэтому $AO = OC$, $BO = OD$, что и требовалось доказать.

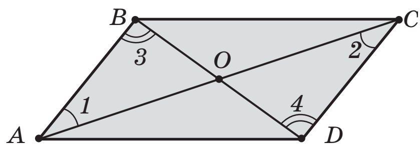


Рис. 9

1. Что называется параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом?
2. Что называется трапецией?
3. Какая трапеция называется равнобедренной, прямоугольной?
4. Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
5. Докажите, что диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Упражнения

5. В прямоугольнике $ABCE$ проведена диагональ AC. Известно, что $\angle CAB = 8 \cdot \angle ACB$. Найдите $\angle CAB$.

6. По данным на рис. 10, *а*, *б* найдите: а) углы параллелограмма $RFQP$; б) углы параллелограмма $ABCD$ и докажите, что он является ромбом.

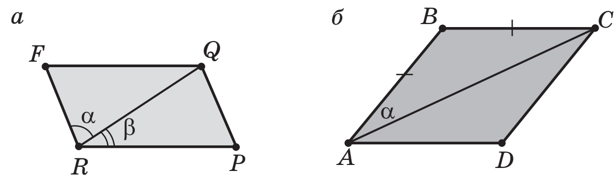


Рис. 10

7. Биссектрисы углов при основании трапеции пересекаются в точке другого основания. Докажите, что это основание трапеции равно сумме ее боковых сторон.

8. а) Сумма двух противоположных углов параллелограмма равна 94°. Найдите углы параллелограмма.
б) Найдите углы параллелограмма, если разность двух из них равна 70°.

9. В параллелограмме $ABCD$ $BC : AB = 1 : 2$. Середина M стороны AB соединена отрезками с вершинами C и D. Докажите, что $\angle CMD$ равен 90°.

10. $ABCD$ – параллелограмм, отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 лежат на биссектрисах его углов (рис. 11). Установите вид четырехугольника $MNKL$.

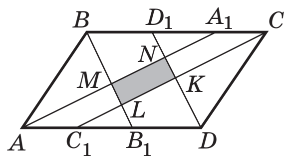


Рис. 11

3. Применение свойств параллелограмма при решении задач

Фигура называется симметричной относительно точки O (или центрально-симметричной), **если для каждой точки**

фигуры симметричная ей точка относительно точки *O* также принадлежит этой фигуре. Точка *O* называется *центром симметрии фигуры.*

На рис. 12, *а–в* приведены примеры центрально-симметричных фигур. Параллелограмм – центрально-симметричная фигура, его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (см. рис. 12, *в*). Докажите это самостоятельно.

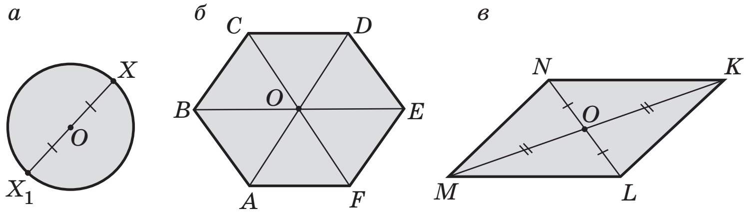


Рис. 12

З а д а ч а. Найти периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

Р е ш е н и е. Так как в условии задачи не указано, биссектриса какого угла проведена, то возможны два случая (рис. 13, *а*, *б*).

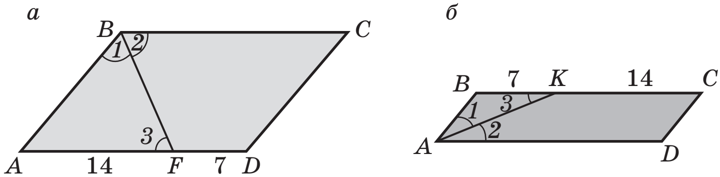


Рис. 13

1. Пусть проведена биссектриса BF, $AF = 14$ см, $FD = 7$ см (рис. 13, *а*). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ (так как BF – биссектриса), $\angle 2 = \angle 3$ (как накрест лежащие углы при $BC \parallel AD$ и секущей BF). Получили, что в ΔABF два угла равны ($\angle 1 = \angle 3$), значит он равнобедренный. Следовательно, $AB = AF = 14$ см. В парал-

лелограмме $AB = CD = 14$ см, $BC = AD = 14 + 7 = 21$ (см). Тогда $P_{ABCD} = 2(14 + 21) = 70$ (см).

2. Если проведена биссектриса AK и $BK = 7$ см, $KC = 14$ см (см. рис. 13, *б*), то, рассуждая аналогично, получим в ΔABK $AB = BK = 7$ см. Тогда в параллелограмме $AB = CD = 7$ см, а $P_{ABCD} = 2(7 + 21) = 56$ (см).

Ответ: 56 см или 70 см.

1. Приведите примеры центрально-симметричных фигур.

Упражнения

11. По данным на рис. 14, *а–в* найдите: а) периметр параллелограмма $ABCD$; б) углы параллелограмма $EKMP$; в) углы и периметр параллелограмма $QRST$.

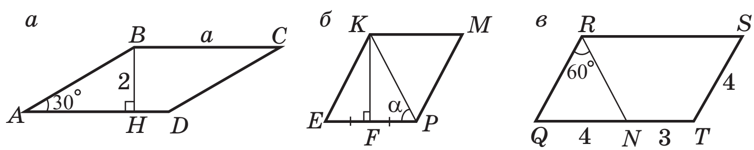


Рис. 14

12. а) В параллелограмме $ABCM$ $AB = 6$ см, диагонали $AC = 5$ см, $BM = 9$ см. Найдите $P_{\Delta AOB}$, где O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.
б) Докажите, что отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей параллелограмма, концы которого принадлежат его противоположным сторонам, делится этой точкой пополам.

13. Найдите углы параллелограмма, если: а) один из углов параллелограмма в 3 раза больше другого его угла; б) один из его углов составляет 25% другого угла параллелограмма.

14. Биссектриса одного из углов параллелограмма делит его сторону на отрезки 3 см и 4 см. Найдите периметр параллелограмма.

Содержание

Учебное издание

Солтан Геннадий Николаевич
Солтан Алла Евгеньевна

ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

8 класс

Пособие для учащихся
учреждений общего среднего образования

Редактор *Т.В. Кульнис*
Художественный редактор *Т.В. Шабунько*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *Т.В. Кульнис*
Компьютерная верстка *Ю.Н. Трусевич*

Подписано в печать 22.01.2014. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «SchoolBookNewC». Офсетная печать. Усл. печ. л. 6,51. Уч.-изд. л. 4,69. Тираж 1000 экз. Заказ 100.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.
Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.
e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Открытое акционерное общество «Типография “Победа”».
ЛП № 02330/429 от 28.01.2013. Ул. Тавлая, 11, 222310, Молодечно.