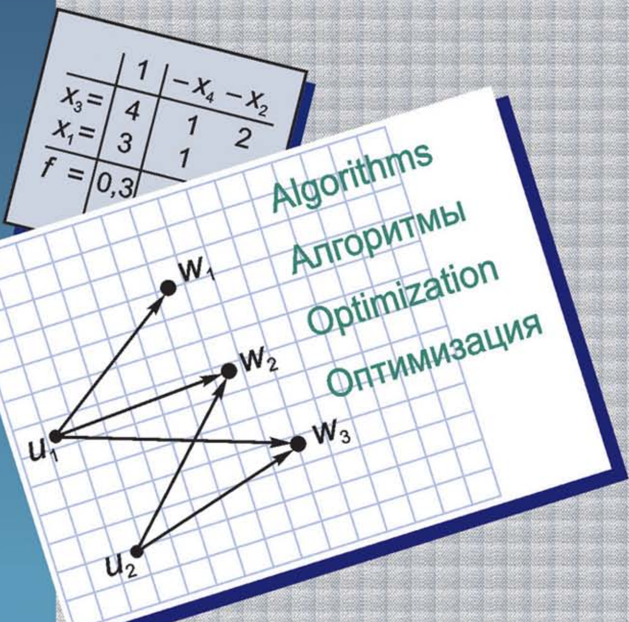
ВУЗ

студентам высших учебных заведений

А.А. ЧЕРНЯК   Ж.А. ЧЕРНЯК
Ю.М. МЕТЕЛЬСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Алгоритмический подход



А.А. ЧЕРНЯК Ж.А. ЧЕРНЯК
Ю.М. МЕТЕЛЬСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Алгоритмический подход

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
экономических специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования

Минск
«Вышэйшая школа»
2007

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.18я73
Ч-49

Р е ц е н з е н т ы: кафедра прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета; старший научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси доктор физико-математических наук, профессор *В.И. Берник*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Черняк, А. А.
Ч-49 Математическое программирование. Алгоритмический подход : учеб. пособие / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. М. Метельский. – Минск : Выш. шк., 2006. – 352 с. : ил.
ISBN 978-985-06-1356-1.

Рассматриваются линейное, дискретное, выпуклое, нелинейное и динамическое программирование, транспортные и потоковые задачи, оптимизационные задачи на графах и матроидах, теория полиномиальной сводимости и NP-полноты.

Для студентов экономических и инженерно-технических специальностей вузов. Будет полезно также магистрантам, аспирантам и преподавателям вузов.

УДК 519.85(075.8)
ББК 22.18я73

Учебное издание

Черняк Аркадий Александрович
Черняк Жанна Альбертовна
Метельский Юрий Михайлович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
Алгоритмический подход

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*. Художественный редактор *В.А. Ярошевич*. Технический редактор *Н.А. Лебедевич.* Корректор *В.И. Аверкина*. Компьютерная верстка *Н.В. Шабуни.*

Подписано в печать 20.06.2007. Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2. Офсетная печать. Гарнитура «Nimbus». Усл. печ. л. 18.48. Уч.-изд. л. 16,04. Тираж 2200 экз. Заказ 1573.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”». ЛИ 02330/0131768 от 06.03.2006. 220048, Минск, проспект Победителей, 11. www.vshph.com

Республиканское унитарное предприятие «Типография “Победа”». 222310, Молодечно, ул. Тавлая, 11.

ISBN 978-985-06-1356-1

© Черняк, А.А., Черняк, Ж.А., Метельский Ю.М., 2007
© Издательство «Вышэйшая школа», 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Существующие учебники по математическому программированию можно условно разделить на три группы. Книги первой группы, написанные для студентов инженерно-экономических специальностей, характеризуются стандартным подбором и традиционным изложением материала. Они отражают приверженность их авторов к тем канонам в преподавании, которые были заложены еще в 70–80-х годах XX в. такими известными белорусскими математиками-педагогами, как А.В. Кузнецов, В.А. Сакович и др. Вторую группу составляют книги, ориентированные на применение компьютерных пакетов. Они учитывают современный прогресс в информационных технологиях, однако по актуальности и глубине излагаемой в них теории уступают книгам первой группы. К третьей группе можно отнести книги, предназначенные для студентов математических факультетов университетов. Эти книги в силу своей специфики имеют высокий уровень абстракции и являются узкопрофильными (например, по «выпуклому программированию», «дискретной оптимизации» и т.д.).

Остановимся на характерных особенностях книги, предлагаемой вниманию читателя. Во-первых, учитывая и уважая возможности потенциальных читателей, авторы варьируют степень подробности и глубину изучения предмета. В каждой главе материал излагается на двух уровня, которые можно условно назвать «беллетризованным» и «академическим». В зависимости от содержания главы либо эти два уровня перемежаются друг с другом (параллельное изложение), либо первый предваряет второй (последовательное изложение). Первый уровень готовит читателя к последующему, математически строгому, изложению и потому не отягощен терминологией, насыщен наглядными примерами и не требует для понимания значительных математических усилий. Второй уровень предполагает глубокое постижение теории и содержит доказательства утверждений, которые вынесены в отдельные главы.

В то же время, сохраняя традиционные разделы, оговоренные рамками государственных образовательных стандартов, авторы постарались придать книге современное звучание, адаптировав ряд ключевых результатов последних десятилетий (многие из которых были отражены только в специализированных научных изданиях) для студентов инженерно-экономических специальностей вузов. Среди них: фундаментальный алгоритм полиномиального решения задач линейной оптимизации, принципиально отличающийся от симплексных процедур не только своей эффективностью, но и самой природой используемого подхода; регуляризация неустойчивых задач оптимизации, позволяющая преодолевать разрыв между реальными явлениями и их математическими моделями; введение в теорию полиномиальной сводимости и NP-полноты (эти понятия стали символом трудностей, с которыми сталкиваются разработчики алгоритмов по мере увеличения размерности и усложнения структуры оптимизационных задач).

Во-вторых, в книге содержатся строгие доказательства достаточно сложных теорем математического программирования, а в изложении ряда разделов, уже ставших традиционными, предложены новые подходы. Так, преодолено разделение общей задачи линейного программирования на вырожденный и невырожденный случаи; приведена простая реализация симплекс-метода во избежание «зацикливания», параллельно решающая проблему нахождения начального базисного плана; дана обобщенная сетевая модель, включающая в качестве частных случаев различные оптимизационные задачи, связанные с потоковыми алгоритмами; транспортные задачи и задачи динамического программирования решаются с помощью методов теории графов, обеспечивающих наглядность в обосновании сопутствующих алгоритмов; компактно изложены теория Куна – Таккера и метод возможных направлений – традиционно сложные для усвоения разделы нелинейного программирования.

В-третьих, данная книга реализует главный принцип, отраженный в ее названии: критерием значимости любого результата является его алгоритмическая эффективность, а описание самих алгоритмов должно представлять собой оптимальную теоретическую основу для будущих программных реализаций. При этом авторы полностью отказались от многочисленных адаптаций к «ручному» счету трудоемких вычислительных процедур благодаря существованию компьютерных пакетов, успешно справляющихся с проблемами подобного рода.

В пособии активно используются сведения из общего курса высшей математики. Во всех подобных случаях авторы делают ссылки на один из современных учебников, оставляя тем не менее за читателем право выбора подходящего учебного пособия.

Все отзывы, замечания и предложения просьба направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Победителей, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

1

МНОГОГРАННИКИ И ПОЛИЭДРЫ

Рассмотрим две точки $B=(0;1)$ и $D=(3;0)$ на координатной плоскости x_1Ox_2 (рис. 1.1). Любая точка *N* отрезка *BD* может быть представлена в виде $N=\lambda B+(1-\lambda)D$, где λ – некоторое число между нулем и единицей. Так как $\lambda+(1-\lambda)=1$, то, обозначив через λ_1 и λ_2 коэффициенты λ и $1-\lambda$ в сумме $N=\lambda B+(1-\lambda)D$, получим: $N=\lambda_1 B+\lambda_2 D$, где $\lambda_1+\lambda_2=1$, $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$. Такое представление точки *N* называется выпуклой линейной комбинацией точек *B* и *D*. При этом говорят, что отрезок *BD* порождается точками *B* и *D*.

Пусть $A=(0;0)$. Возьмем произвольную точку *K* треугольника *ABD*. Продолжим отрезок *AK* до пересечения с *BD* в точке *M*. Поскольку точка *M* принадлежит отрезку *BD*, то $M=\mu_1 B+\mu_2 D$, где $\mu_1+\mu_2=1$, $\mu_1\geq 0$, $\mu_2\geq 0$. Аналогичное представление возможно и для точки *K*, принадлежащей отрезку *AM*: $K=\beta_1 A+\beta_2 M$, где $\beta_1+\beta_2=1$, $\beta_1\geq 0$, $\beta_2\geq 0$. Отсюда $K=\beta_1 A+\beta_2(\mu_1 B+\mu_2 D)=$

$=\beta_1+(\mu_1+\mu_2)=\beta_1+\beta_2=$

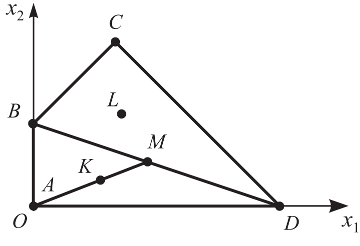


Рис. 1.1. Многогранник *ABCD*

Поскольку $\beta_1+\beta_2\mu_1+$ $+\beta_2\mu_2=\beta_1+\beta_2(\mu_1+\mu_2)=\beta_1+\beta_2=1$, то, обозначив коэффициенты β_1, $\beta_2\mu_1$, $\beta_2\mu_2$ соответственно через λ_1, λ_2, λ_3, получим: $K=\lambda_1 A+\lambda_2 B+\lambda_3 D$, где $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$, $\lambda_3\geq 0$. Такое представление точки *K* называется выпуклой линейной комбинацией точек *A*, *B*, *D*. При этом говорят, что треугольник *ABD* порождается точками *A*, *B*, *D*.

Если теперь рассмотреть четырехугольник *ABCD*, где $C=(1;2)$, то любая его точка *L* будет выпуклой линейной комбинацией четырех точек: *A*, *B*, *C*, *D*. Действительно, *ABCD* можно разбить на два треугольника, и точка *L* окажется в одном из них, например в треугольнике *BCD*. Но тогда, как показано выше, $L=\lambda_1 B+\lambda_2 C+\lambda_3 D$, где $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, $\lambda_1\geq 0$, $\lambda_2\geq 0$, $\lambda_3\geq 0$. Отсюда $L=\lambda_1 B+\lambda_2 C+\lambda_3 D+\lambda_4 A$, где $\lambda_4=0$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=1$. Таким образом, четырехугольник *ABCD* порождается точками *A*, *B*, *C*, *D*.

Итак, четырехугольник *ABCD* состоит из всех выпуклых линейных комбинаций точек *A*, *B*, *C*, *D*. Подобные структуры называются многогранниками. Очевидно, что многогранниками являются также рассмотренные ранее отрезок *BD* и треугольник *ABD*.

Рассмотрим теперь *n*-мерные точки в *n*-мерном точечном пространстве Af^n, определенном в работе [11, гл. 1].

Пусть дана конечная система точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$ пространства Af^n. Говорят, что точка $A\in Af^n$ есть *выпуклая линейная комбинация* точек из *T*, если $A=\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k$, где $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$, $\lambda_i\geq 0$, $i=1,\ldots,k$.

Многогранником, порожденным конечной системой точек *T* из Af^n, называется множество всех выпуклых линейных комбинаций точек из *T*. Очевидно, что множество, состоящее из одной точки *A*, является многогранником: $A=1\cdot A$.

Вернемся теперь к четырехугольнику *ABCD* (рис. 1.1). Он является выпуклым многоугольником: какие бы две его точки ни взять, соединяющий их отрезок будет целиком содержаться в $ABCD$. В то же время четырехугольник на рис. 1.2 выпуклым не является.

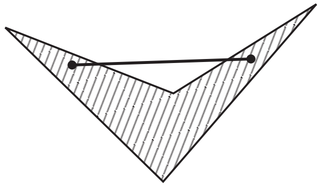


Рис. 1.2. Невыпуклый четырехугольник

Точки A, B, C, D обладают уникальным для выпуклого четырехугольника $ABCD$ свойством: при удалении любой из них оставшаяся часть сохраняет выпуклость. Именно в силу этого свойства точки A, B, C, D называются вершинами множества $ABCD$. Никакие другие точки четырехугольника $ABCD$ подобным свойством не обладают и поэтому не могут называться его вершинами.

В общем случае n-мерного пространства Af^n многогранник, порожденный системой из двух точек, называется *отрезком*. Множество точек, содержащее вместе с любыми двумя своими точками и отрезок, их соединяющий, называется *выпуклым*. *Вершиной* выпуклого множества $\mathfrak{F}$ называется точка, удаление которой из $\mathfrak{F}$ приводит к пустому или выпуклому множеству. Таким образом, одноточечное множество $\mathfrak{F}=\{A\}$ всегда выпукло и A – вершина $\mathfrak{F}$.

Следующая теорема утверждает, что вершины многогранника могут быть только среди точек, его порождающих.

Теорема 1.1. *Пусть многогранник $\mathfrak{M}$ порожден системой точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Тогда любая его вершина принадлежит T.* (Доказательство дано в задаче Т1.1.)

Теорема 1.2. *Любой многогранник $\mathfrak{M}$ порождается множеством своих вершин.* (Доказательство дано в задаче Т1.4.)

Таким образом, наиболее «экономной» системой точек, порождающей многогранник, является множество его вершин. Из теорем 1.1, 1.2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Любой многогранник имеет по меньшей мере одну вершину, и число его вершин всегда конечно.*

Существуют выпуклые множества с бесконечным числом вершин. Так, любая точка границы круга является его вершиной. Кроме того, каждая точка круга есть выпуклая линейная комбинация некоторых его вершин (например, концов диаметра, проведенного через эту точку), и каждая выпуклая ком-

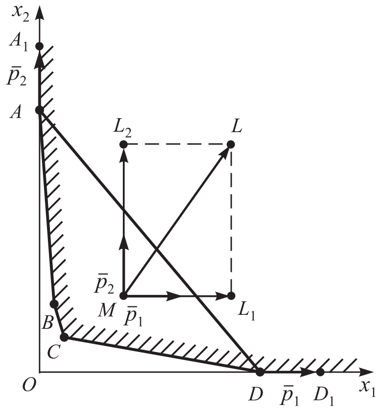


Рис. 1.3. Многогранная область

бинация его вершин $A_1,\ldots,A_n$ содержится в круге (многогранник $A_1\ldots A_n$ является вписанным n-угольником и поэтому целиком содержится в круге). Другими словами, круг также совпадает с множеством всех выпуклых линейных комбинаций своих вершин.

Многогранник является ограниченным выпуклым множеством с конечным числом вершин. Однако существуют неограниченные выпуклые множества с конечным числом вершин, включающие и многогранники, порожденные их вершинами. Рассмотрим изображенную на рис. 1.3 область, ограниченную лучами Dx_1, Ax_2 координатных осей Ox_1, Ox_2 и ломаной *ABCD*. Ее вершинами являются точки $A=(0;25)$, $B=(20/7;75/7)$, $C=(3;8)$, $D=(20;0)$, и она содержит многогранник *ABCD*.

Зафиксируем теперь два вектора: $\bar{p}_1=\overline{DD_1}=(1;0)$, $\bar{p}_2=\overline{AA_1}=(0;1)$. Возьмем произвольную точку L, принадлежащую области x_2ABCDx_1. Очевидно, что $L=M+\overline{ML}$, где M – некоторая точка многогранника *ABCD*. В свою очередь, вектор $\overline{ML}$ разложим (по правилу параллелограмма) в сумму векторов $\overline{ML_1}+\overline{ML_2}=\alpha_1\bar{p}_1+\alpha_2\bar{p}_2$, где α_1,α_2 – неотрицательные числа. Эта сумма называется неотрицательной линейной комбинацией векторов $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$. Таким образом, область x_2ABCDx_1 – это выпуклое множество с конечным числом вершин, состоящее из всех сумм вида $M+\bar{p}$, где M – выпуклая линейная комбинация вершин; $\bar{p}$ – неотрицательная линейная комбинация фиксированной системы векторов $\{\overline{p}_1, \overline{p}_2\}$. Подобные структуры называются многогранными областями.

Рассмотрим общий случай n-мерных пространств. Пусть дана конечная система векторов $V = \{\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_r\}$ n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ [11, гл. 31]. Говорят, что вектор $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ есть *неотрицательная линейная комбинация* векторов из V, если $\overline{p} = \alpha_1 \overline{p}_1 + \ldots + \alpha_r \overline{p}_r$, $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, r$. *Многогранной областью*, порожденной конечной системой точек T из Af^n и конечной системой векторов V из $\mathbb{R}^n$, называется множество всех точек, которые представимы в виде $M + \overline{p}$, где M – выпуклая линейная комбинация точек из T; $\overline{p}$ – неотрицательная линейная комбинация векторов из V. Из этих определений ясно, что любой многогранник – это многогранная область, порожденная конечной системой точек T и нулевым вектором $\overline{0}$.

Утверждение 1.1. *Ограниченные многогранные области, и только они, являются многогранниками.* (Доказательство дано в задаче Т1.5.)

Утверждение 1.2. *Многогранная область является выпуклым множеством.* (Доказательство дано в задаче Т1.6.)

Рассмотрим теперь четырехугольник, изображенный на рис. 1.1, с иной точки зрения. Вспомним, что любая прямая $ax_1 + bx_2 = c$ делит координатную плоскость x_1Ox_2 на две полуплоскости, множества точек которых задаются неравенствами $ax_1 + bx_2 \leq c$ и $ax_1 + bx_2 \geq c$ соответственно. Отрезки AB, BC, CD, AD принадлежат прямым $x_1 = 0$, $x_2 - x_1 = 1$, $x_1 + x_2 = 3$, $x_2 = 0$ соответственно. Поэтому неравенства $x_1 \geq 0$, $x_2 - x_1 \leq 1$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $x_2 \geq 0$ задают полуплоскости, отмеченные на рис. 1.4 зубцами. Следовательно, пересечение этих полуплоскостей (а им как раз и является четырехугольник $ABCD$) совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \le 1, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

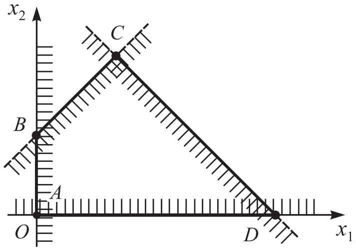


Рис. 1.4. Множество решений системы (1.1)

Аналогична структура и многогранной области, изображенной на рис. 1.3: она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 25, \\ 19x_1 + x_2 \ge 65, \\ 8x_1 + 17x_2 \ge 160, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \end{cases} \qquad (1.2)$$

поскольку лучи Ax_2, Dx_1 и отрезки *AB*, *BC*, *CD* принадлежат прямым $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $5x_1 + x_2 = 25$, $19x_1 + x_2 = 65$, $8x_1 + 17x_2 = 160$ соответственно. Оказывается, что совпадение с множествами решений систем линейных неравенств является характеристическим свойством многогранных областей (см. теорему 1.3).

Известно (см. [11, гл. 39]), что линейное уравнение $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, в котором не все коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ равны нулю, определяет гиперплоскость пространства Af^n. Множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ из Af^n, удовлетворяющих неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \ge b$, называется *полупространством* в Af^n. Пересечение конечного числа полупространств в Af^n называется *полиэдром*.

Следующая теорема, которая приводится без доказательства, является фундаментальным утверждением теории полиэдров.

Теорема 1.3. *Многогранная область — это полиэдр, и каждый полиэдр — это многогранная область. Многогранник — это ограниченный полиэдр, и каждый ограниченный полиэдр — многогранник.*

Теорема 1.3 раскрывает геометрию множества решений системы линейных неравенств. Следующая теорема при более общих предположениях означает, что любую точку вне заданного выпуклого множества можно отделить от этого множества гиперплоскостью.

Теорема 1.4. *Пусть даны произвольное выпуклое замкнутое множество* $\mathfrak{N} \subseteq Af^n$ *и точка* $V \in Af^n$, *не являющаяся его внутренней точкой. Тогда существует такая гиперплоскость* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n=\lambda$, *содержащая точку* V, *что* $a_1x_1+\ldots+a_nx_n \le \lambda$ *для любой точки* $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathfrak{N}$. (Доказательство дано в задаче Т1.16.)

Гиперплоскость, о которой идет речь в теореме 1.4, называется *опорной* для множества $\mathfrak{N}$ в точке V.

Теоретические задачи

Т1.1. Доказать теорему 1.1.

$\triangleright$* Возьмем произвольную точку $M\in\mathfrak{M}$. Тогда

$$M=\lambda_1A_1+\ldots+\lambda_kA_k,\ \ \lambda_i\ge 0,\ \ i=1,\ldots,k,\ \ \lambda_1+\ldots+\lambda_k=1.$$

Предположим вначале, что среди коэффициентов $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ найдется хотя бы один, например λ_1, не равный 0 и 1. Тогда

$$M=\lambda_1A_1+(1-\lambda_1)B,$$

где $B=\dfrac{\lambda_2}{1-\lambda_1}A_2+\ldots+\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_1}A_k$.

Так как

$$\frac{\lambda_2}{1-\lambda_1}+\ldots+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_1}=\frac{\lambda_2+\ldots+\lambda_k}{1-\lambda_1}=\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_1}=1,$$

то точка B есть выпуклая линейная комбинация точек из T, т.е. $B\in\mathfrak{M}$. Таким образом, точка M принадлежит отрезку, соединяющему две другие точки многогранника $\mathfrak{M}$ – точки A_1 и B. Поэтому M не может быть вершиной по определению.

Если среди коэффициентов $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ нет отличных от 0 и 1, то ввиду $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=1$ только один из них, например λ_i, равен 1,

* Знак $\triangleright$ обозначает начало доказательства либо решения.

остальные – нули. Отсюда $M=\lambda_i A_i=A_i$. Это означает, что вершины многогранника $\mathfrak{M}$ могут находиться только среди точек порождающего множества T. Теорема доказана.

Т1.2. Доказать следующее утверждение: точка выпуклого множества $\mathfrak{I}$ не является его вершиной, если и только если она является внутренней точкой некоторого отрезка, принадлежащего $\mathfrak{I}$.

Указание. Воспользоваться определением вершины множества $\mathfrak{I}$.

Т1.3. Пусть многогранник $\mathfrak{M}$ порожден системой точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Известно, что точка A_k есть выпуклая линейная комбинация точек $A_1,\ldots,A_{k-1}$. Доказать, что любая точка из $\mathfrak{M}$ есть выпуклая линейная комбинация точек $A_1,\ldots,A_{k-1}$.

$\triangleright$ Пусть M – произвольная точка многогранника $\mathfrak{M}$. Тогда

$$\begin{cases} M=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i A_i,\ \lambda_1+\ldots+\lambda_k=1,\ \lambda_i\geq 0,\ i=1,\ldots,k, \\ A_k=\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i A_i,\ \mu_1+\ldots+\mu_{k-1}=1,\ \mu_i\geq 0,\ i=1,\ldots,k-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i A_i+\lambda_k\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i A_i=\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i+\lambda_k\mu_i)A_i,$$

причем

$$\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i+\lambda_k\mu_i)=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i+\lambda_k\sum_{i=1}^{k-1}\mu_i=\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i+\lambda_k=1.$$

Это означает, что M – выпуклая линейная комбинация точек $A_1,\ldots,A_{k-1}$.

Т1.4. Доказать теорему 1.2.

$\triangleright$ Воспользуемся индукцией по числу точек в системе T, порождающей многогранник $\mathfrak{M}$. Если T состоит из единственной точки A, то множество всех выпуклых линейных комбинаций этой точки состоит из одной точки A и, следовательно, $\mathfrak{M}$ состоит из одной точки A, которая и является его вершиной по определению. Теорема в этом случае доказана.

Предположим, что утверждение теоремы верно для всех многогранников, порожденных системами, содержащими менее k точек. Рассмотрим многогранник $\mathfrak{M}$, порожденный системой точек

$T=\{A_1,\ldots,A_k\}$. Если все точки из T – вершины в $\mathfrak{M}$, то теорема доказана.

Предположим теперь, что среди точек T есть по меньшей мере одна, например A_k, не являющаяся вершиной в $\mathfrak{M}$. Тогда A_k – внутренняя точка некоторого отрезка BC в $\mathfrak{M}$ (см. задачу Т1.2): $A_k=\alpha B+(1-\alpha)C$, $0<\alpha<1$, где $B=\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k$, $C=\mu_1 A_1+\ldots+\mu_k A_k$, $\lambda_i\geq 0$, $\mu_i\geq 0$, $i=1,\ldots,k$, $\lambda_1+\ldots+\lambda_k=\mu_1+\ldots+\mu_k=1$, $\lambda_k\neq 1$, $\mu_k\neq 1$. Отсюда

$$A_k=\alpha(\lambda_1 A_1+\ldots+\lambda_k A_k)+(1-\alpha)(\mu_1 A_1+\ldots+\mu_k A_k)=$$

$$=(\alpha\lambda_1+(1-\alpha)\mu_1)A_1+\ldots+(\alpha\lambda_k+(1-\alpha)\mu_k)A_k.$$

Так как $\alpha\lambda_k+(1-\alpha)\mu_k<\alpha+(1-\alpha)=1$, то $\beta=1-(\alpha\lambda_k+(1-\alpha)\mu_k)\neq 0$. Следовательно,

$$A_k=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha\lambda_i+(1-\alpha)\mu_i}{\beta}A_i,$$

причем

$$\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha\lambda_i+(1-\alpha)\mu_i}{\beta}=\frac{\alpha(\lambda_1+\ldots+\lambda_{k-1})+(1-\alpha)(\mu_1+\ldots+\mu_{k-1})}{\beta}=$$

$$=\frac{\alpha(1-\lambda_k)+(1-\alpha)(1-\mu_k)}{\beta}=\frac{\beta}{\beta}=1.$$

Это означает, что точка A_k есть выпуклая линейная комбинация точек из $T'=\{A_1,\ldots,A_{k-1}\}$. Но тогда любая точка из $\mathfrak{M}$ есть выпуклая линейная комбинация точек из T' (см. задачу Т1.3), т.е. $\mathfrak{M}$ порождается системой точек T'. Остальное следует из индуктивного предположения.

Т1.5. Доказать утверждение 1.1.

▷ Прежде всего докажем, что для любых двух векторов $\bar{a},\bar{b}\in\mathbb{R}^n$ верно соотношение $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|\leq\left|\bar{a}\right|+\left|\bar{b}\right|$ (это неравенство с очевидностью распространяется на любую конечную сумму векторов). Итак,

$$\left|\bar{a}+\bar{b}\right|^2=\left(\bar{a}+\bar{b}\right)^2=\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2\leq\left|\bar{a}^2\right|+2\left|\bar{a}\cdot\bar{b}\right|+\left|\bar{b}^2\right|=$$

$$=|\bar{a}|^2+2|\bar{a}\cdot\bar{b}|+|\bar{b}|^2\leq|\bar{a}|^2+2|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|+|\bar{b}|^2=\left(|\bar{a}|+|\bar{b}|\right)^2,$$

причем последнее неравенство вытекает из неравенства $|\bar{a}\cdot\bar{b}|\leq|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$ (см. [11, гл. 31]). Обозначим через $O=(0;\ldots;0)$ нулевую точку в Af^n. Заметим, что $A=A-O=\overline{OA}$. Поэтому любую точку A из Af^n можно отождествить с вектором $\overline{OA}$. Рассмотрим произвольный многогранник $\mathfrak{M}$ с множеством вершин $S=\{B_1,\ldots,B_k\}$. Выберем в S вершину B_m такую, что длина вектора $\overline{OB_m}$ наибольшая. Рассмотрим произвольную точку C из $\mathfrak{M}$. Тогда

$$C=\lambda_1 B_1+\ldots+\lambda_k B_k,\ \ \lambda_i\geq 0,\ \ i=1,\ldots,k,\ \ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1,$$

откуда $\overline{OC}=\lambda_1\overline{OB_1}+\ldots+\lambda_k\overline{OB_k}$. Следовательно,

$$\left|\overline{OC}\right|=\left|\lambda_1\overline{OB_1}+\ldots+\lambda_k\overline{OB_k}\right|\leq\lambda_1\left|\overline{OB_1}\right|+\ldots+\lambda_k\left|\overline{OB_k}\right|\leq$$

$$\leq\lambda_1\left|\overline{OB_m}\right|+\ldots+\lambda_k\left|\overline{OB_m}\right|=(\lambda_1+\ldots+\lambda_k)\left|\overline{OB_m}\right|=\left|\overline{OB_m}\right|,$$

т.е. расстояние между точками O и C ограничено величиной $\left|\overline{OB_m}\right|$.

Итак, доказано, что любой многогранник является ограниченной многогранной областью.

Покажем теперь, что любая ограниченная многогранная область $\mathfrak{L}$ (порожденная системами точек T и векторов V) является многогранником. Выберем произвольную точку A из T и произвольный ненулевой вектор $\bar{p}$ из V. Тогда для любого $t\geq 0$ имеем $A+t\bar{p}\in\mathfrak{L}$. Если i-я координата вектора $\bar{p}$ отлична от нуля, то всегда можно выбрать такое $t_1\geq 0$, что модуль i-й координаты вектора $\overline{OA}+t_1\bar{p}$ будет больше любого заданного числа r, т.е. $\left|\overline{OA}+t_1\bar{p}\right|>r$. Последнее означает неограниченность множества $\mathfrak{L}$. Получено противоречие. Таким образом, система V может состоять только из нулевого вектора, и в этом случае $\mathfrak{L}$ – многогранник.

Т1.6. Доказать утверждение 1.2.

$\triangleright$ Пусть многогранная область $\mathfrak{L}$ порождена системами точек $T=\{A_1,\ldots,A_k\}$ и векторов $V=\{\overline{p}_1,\ldots,\overline{p}_r\}$. Возьмем две точки M и N в $\mathfrak{L}$ и покажем, что точка $\gamma M+(1-\gamma)N$ также принадлежит $\mathfrak{L}$ для любого $\gamma\in[0;1]$.

Поскольку точка M принадлежит $\mathfrak{L}$, то $M=M'+\overline{p}$, где M' – выпуклая линейная комбинация точек из T, а $\overline{p}$ – неотрицательная линейная комбинация векторов из V, т.е. $M'=x_1A_1+\ldots+x_kA_k$,

$x_i\geq 0,\ \ i=1,\ldots,k,\ \ \sum\limits_{i=1}^{k}x_i=1$, и $\overline{p}=\alpha_1\overline{p}_1+\ldots+\alpha_r\overline{p}_r,\ \ \alpha_i\geq 0,\ \ i=1,\ldots,r.$

Аналогично $N=N'+\overline{q}$, где $N'=y_1A_1+\ldots+y_kA_k,\ \ y_i\geq 0,\ \ i=1,\ldots,k,$

$\sum\limits_{i=1}^{k}y_i=1$, и $\overline{q}=\beta_1\overline{p}_1+\ldots+\beta_r\overline{p}_r,\ \ \beta_i\geq 0,\ \ i=1,\ldots,r.$

Получаем:

$$\begin{aligned}
&\gamma M+(1-\gamma)N=\gamma(M'+\overline{p})+(1-\gamma)(N'+\overline{q})=\\
&=[\gamma M'+(1-\gamma)N']+[\gamma\overline{p}+(1-\gamma)\overline{q}]=\\
&=[\gamma(x_1A_1+\ldots+x_kA_k)+(1-\gamma)(y_1A_1+\ldots+y_kA_k)]+\\
&+[\gamma(\alpha_1\overline{p}_1+\ldots+\alpha_r\overline{p}_r)+(1-\gamma)(\beta_1\overline{p}_1+\ldots+\beta_r\overline{p}_r)]=\\
&=[(\gamma x_1+(1-\gamma)y_1)A_1+\ldots+(\gamma x_k+(1-\gamma)y_k)A_k]+\\
&+[(\gamma\alpha_1+(1-\gamma)\beta_1)\overline{p}_1+\ldots+(\gamma\alpha_r+(1-\gamma)\beta_r)\overline{p}_r].
\end{aligned}$$

Выражение в первых квадратных скобках является выпуклой линейной комбинацией точек из T:

$$\sum_{i=1}^{k}(\gamma x_i+(1-\gamma)y_i)=\gamma\sum_{i=1}^{k}x_i+(1-\gamma)\sum_{i=1}^{k}y_i=\gamma+(1-\gamma)=1,$$

а во вторых скобках – неотрицательной линейной комбинацией векторов из V. Следовательно, $\gamma M+(1-\gamma)N\in\mathfrak{L}$.

Т1.7. Доказать утверждение 1.2, используя теорему 1.3.

$\triangleright$ В силу теоремы 1.3 достаточно показать выпуклость произвольного полиэдра $\mathfrak{P}$, задаваемого системой линейных неравенств. Пусть

ОГЛАВЛЕНИЕ