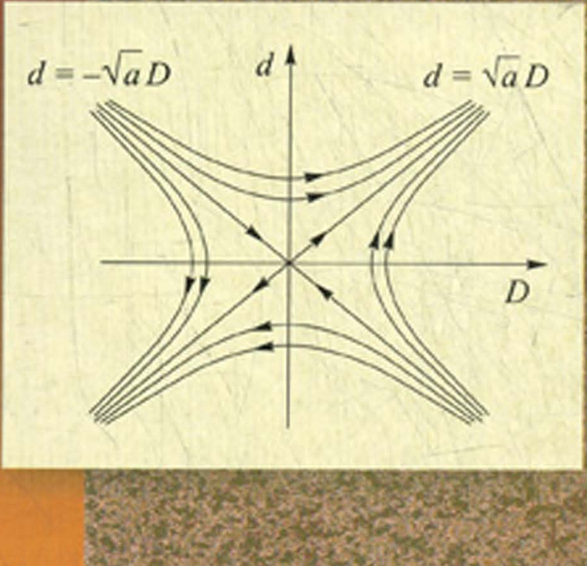
ВУЗ

студентам высших учебных заведений

С.А. МИНЮК Н.С. БЕРЁЗКИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ



С.А. МИНЮК Н.С. БЕРЁЗКИНА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
математических и экономических специальностей
учреждений, обеспечивающих получение
высшего образования

Минск
«Вышэйшая школа»
2007

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.6
М57

Р е ц е н з е н т ы: кафедра прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета; профессор кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета доктор физико-математических наук *А.В. Метельский*

Минюк, С. А.

М57 Дифференциальные уравнения и экономические модели : учеб. пособие / С. А. Минюк, Н. С. Берёзкина. – Минск : Выш. шк., 2007. – 141 с. : ил.

ISBN 978-985-06-1355-4.

Изложены необходимые основы математического аппарата теории дифференциальных, линейных разностных уравнений и систем и даны примеры его использования в современных экономических приложениях. Представлены решения большого количества типичных задач, дана подборка задач для самостоятельного решения.

Для студентов математических и экономических вузов. Может использоваться при изучении курса дифференциальных уравнений, а также служить дополнительным пособием при изучении курса «Экономико-математические модели и методы».

УДК 517.2(075.8)
ББК 22.161.6

ISBN 978-985-06-1355-4

Предисловие

Математика является не только мощным средством решения прикладных задач, но и элементом общей культуры. Современная математика характеризуется интенсивным проникновением в другие науки, что способствует качественному их развитию.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется разнообразными количественными характеристиками, а потому вобрала в себя большое число математических методов. В связи с этим математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного экономиста.

Для специалистов по экономике математика является инструментом анализа, организации, управления. Именно поэтому основное внимание при написании данного пособия уделялось повышению уровня фундаментальной математической подготовки студентов с усилением ее прикладной экономической направленности.

Исследование природных процессов и изучение закономерностей развития общества приводит к построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные уравнения. В данном пособии изложены необходимые основы математического аппарата теории дифференциальных уравнений и даны примеры его использования в современных экономических приложениях. Дифференциальными уравнениями моделируются проблемы инфляции, государственного долга, экономического роста, безработицы, взаимосвязей денежного и реального рынков и т.д. На наш взгляд, такой объем знаний актуален сегодня для лиц, получающих образование по специальностям, связанным с экономикой, в частности по специальности «Экономическая кибернетика».

Материал излагается без доказательств, поскольку основной упор сделан на приобретение навыков использования математического аппарата дифференциальных уравнений. Каждая глава сопровождается большим количеством примеров решения характерных задач с соответствующими экономическими приложениями (балансовые модели, предельный анализ, эластичность функций, модели экономической динамики и т.д.). Преследуется цель, с одной стороны, хотя бы частично помочь студентам вспомнить материал, который изучался в экономических курсах, и повторить его уже совершенно сознательно, а с другой − наполнить математические упражнения экономическим содержанием.

Поскольку условия многих задач сформулированы так, как они формулируются в курсах микро- или макроэкономического моделирования, это может вызвать некоторые затруднения на занятиях по дифференциальным уравнениям. В связи с этим при описании постановки задачи приводятся основные необходимые определения и формулы, что позволяет свести условие экономической задачи к условию математического утверждения. Таким образом, постановка экономических задач не должна вызывать у большинства студентов затруднений. Если же в задачах встречаются понятия, с которыми студенты не сталкивались при изучении экономических курсов, то эти задачи лучше использовать в качестве домашних заданий, чтобы не отвлекаться на введение новых экономических понятий на занятиях по курсу дифференциальных уравнений.

В конце каждой главы даются задания для самостоятельной работы, выполняя которые студент получает практические навыки решения задач по данной теме. К заданиям, требующим дополнительной информации или экономической трактовки, приводятся необходимые указания и ответы.

Поскольку преподаватели курса «Дифференциальные уравнения» ограничены при подборе задач недостаточной экономической подготовленностью студентов к моменту изучения этого курса, а данное пособие содержит экономические задачи, рассчитанные на овладение необходимыми математическими знаниями, оно может быть использовано преподавателями для индивидуальной работы со студентами, при комплектовании контрольных заданий.

Предлагаемое учебное пособие будет весьма полезно при проведении практических и лабораторных занятий на математических факультетах для студентов специальности «Экономическая кибернетика», а также может успешно использоваться при изучении высшей математики и ее экономических приложений в вузах, осуществляющих экономическое образование с широким спектром требований.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам книги − коллективу кафедры прикладной математики и экономической кибернетики Белорусского государственного экономического университета и профессору кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета доктору физико-математических наук А.В. Метельскому − за ценные замечания, способствовавшие ее улучшению.

Все отзывы и предложения просим направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Победителей, 11, издательство «Вышэйшая школа».

Авторы

1 ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия. Составление дифференциальных уравнений

Дифференциальным уравнением называется равенство, которое связывает независимые переменные, их функцию и производные этой функции.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в уравнение.

Дифференциальные уравнения, в которых неизвестная функция зависит только от одной независимой переменной, называют *обыкновенными дифференциальными уравнениями*.

Будем рассматривать дифференциальное уравнение первого порядка, т.е. уравнение вида $F(t, x, \dot{x}) = 0$, или разрешенное относительно $\dot{x}$:

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

где t – аргумент; $x(t)$ – искомая функция; F – заданная функция переменных $t, x, \dot{x}$ $\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right)$; f – заданная функция переменных t, x.

Уравнение

$$P(t, x)dx + Q(t, x)dt = 0, \tag{1.2}$$

где t и x имеют тот же смысл, что и выше; dx, dt – дифференциалы; $P(t, x)$, $Q(t, x)$ – заданные функции, называется *уравнением, записанным в дифференциалах.*

Решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция $x = x(t)$, определенная на некотором интервале I, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество на I, например $F\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) \equiv 0$ или $\dot{x}(t) \equiv f\big(t, x(t)\big)$. Процесс нахождения всех решений дифференциального уравнения называется *интегрированием*, а график решения $x = x(t)$, $t \in I$, – *интегральной кривой дифференциального уравнения*.

Отметим, что уравнения (1.1) и (1.2) равносильны (т.е. имеют одинаковые решения) в области, где $P(t, x) \neq 0$. По этой причине в дальнейшем при переходе от уравнения (1.1) к уравнению (1.2) из множества решений уравнения (1.2) будем исключать те, на которых $P(t,x)=0$, и наоборот, при переходе от уравнение (1.2) к уравнению (1.1) к решениям уравнения (1.1) будем добавлять решения, на которых $P(t,x)=0$.

Задачей Коши или *начальной задачей* называют задачу нахождения решения $x=x(t)$, $t\in I$, уравнения (1.1), удовлетворяющего условию

$$x(t_0)=x_0, \tag{1.3}$$

где $t_0\in I$.

Имеет место *теорема Коши*: если правая часть уравнения (1.1) непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в области D, то решение уравнения (1.1) с начальным условием (1.3) $\left((t_0;x_0)\in D\right)$ существует и единственно, т.е. через точку $(t_0;x_0)\in D$ проходит единственная интегральная кривая.

Далее для сокращения записи при определении кривой в области D отношение $t\in I$ опускаем и будем рассматривать уравнение (1.1).

Решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется *особым*. Особым решением является огибающая семейства интегральных кривых (если она существует).

Общим решением уравнения (1.1) называется функция $x=\varphi(t,C)$, зависящая от одной произвольной постоянной C и такая, что выполняются следующие условия:

1) она удовлетворяет уравнению (1.1) при любых допустимых значениях постоянной C;

2) каково бы ни было начальное условие (1.3), можно подобрать такое значение C_0 постоянной C, что решение $x=\varphi(t,C_0)$ будет удовлетворять начальному условию (1.3). При этом предполагается, что точка $(t_0;x_0)$ принадлежит области D, в которой выполняются условия существования и единственности решения задачи Коши (1.1), (1.3).

Общим интегралом дифференциального уравнения называется соотношение вида $\Phi(t,x,C)=0$, неявно определяющее общее решение.

При конкретном значении C, включая $\pm\infty$, из общего решения выделяется *частное решение*, а общий интеграл становится *частным интегралом*.

Вопрос о единственности решения задачи Коши представляет интерес как для самой теории дифференциальных уравнений, так и для различных ее приложений. Зная, что решение задачи Коши единственное, можно утверждать, что получен единственный закон, описывающий исследуемое явление, причем данный закон определяется только дифференциальным уравнением, соответствующим этому явлению, и конкретными начальными данными.

Пример 1.1. При производстве товаров производитель несет определенные издержки. Издержки, понесенные при производстве всей продукции, обозначаются как общие или суммарные издержки (U). Их можно распределить на такие, которые непосредственно не зависят от соответствующего объема выпущенной продукции, так называемые постоянные издержки $(U_{\text{пс}})$, и зависящие от данного объема $-$ переменные издержки $(U_{\text{пр}})$. Типичным примером постоянных издержек являются расходы на здания и машины, а переменных – расходы на сырье и материалы. Для предпринимателя решающими являются те издержки, которые приводят к производству дополнительного количества товара, что связано с максимизацией прибыли. Эти издержки называются предельными издержками $(U_{\text{п}})$. Для получения предельных издержек дифференцируют общие издержки по объему продукции, т.е. берут $\frac{dU}{dx} = U(x)$ (см. [19, с. 19]). При этом следует обратить внимание на то, что предельные издержки определяются из дополнительной суммы издержек и дополнительного количества продукции. Пользуясь данной информацией, установить по данной функции предельных издержек $U_{\text{п}} = 10 - 4x + x^2$ функцию общих издержек при условии, что постоянные издержки $U_{\text{пс}} = 33\frac{1}{3}$.

Р е ш е н и е. Поскольку предельные издержки являются не чем иным, как производной функции общих издержек, а постоянные издержки определяются как $U(0) = C$, то для нахождения общих издержек приходим к решению задачи Коши для простейшего дифференциального уравнения вида $\dot{x} = f(t)$ (см. (1.1)):

$$\frac{dU}{dx} = U(x), \quad U(0) = C.$$

Эта задача для заданной функции предельных издержек запишется следующим образом:

$$\frac{dU}{dx} = 10 - 4x + x^2, \quad U(0) = 33\frac{1}{3}.$$

Интегрируя, находим:

$$U = \int (10 - 4x + x^2)dx = 10x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C,$$

где C – постоянная интегрирования.

С учетом начального условия $U(0) = 33\frac{1}{3}$ окончательно получаем, что функция общих издержек задается формулой

$$U = 10x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 33\frac{1}{3}.$$

Пример 1.2. Составить математическую модель естественного роста выпуска продукции.

Решение. Пусть некоторая продукция продается по фиксированной цене P, а $Q(t)$ – количество этой продукции, реализованной на момент времени t. Тогда $PQ(t)$ – доход от реализации, полученный на этот момент.

Предположим, что часть указанного дохода расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции, т.е.

$$I(t) = mPQ(t), \tag{1.4}$$

где m – норма инвестиции – постоянное число, причем $0 < m < 1$.

Если исходить из предположения о ненасыщаемости рынка (или о полной реализации продукции), то в результате расширения производства будет получен прирост дохода, часть которого будет использована для расширения выпуска продукции. Это приведет к росту скорости выпуска (акселерации), причем скорость выпуска пропорциональна увеличению инвестиций, т.е.

$$Q' = lI, \tag{1.5}$$

где $1/l$ – норма акселерации (экономический показатель, характеризующий связь между приростом конечной продукции и объемом инвестиций).

Подставив в формулу (1.5) значение I из выражения (1.4), получим:

$$Q' = kQ, \ k = lmP. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) является дифференциальным уравнением первого порядка, решение которого будет получено в § 1.2.

Пример 1.3. Составить уравнение макроэкономической динамики системы «цены – инфляция» и дать его экономическую интерпретацию.

Р е ш е н и е. В качестве измерителя уровня цен будем использовать логарифм индекса цен p (см. [16, с. 155]), иначе говоря, логуровень цен или логцены.

Состояние экономики на макроуровне характеризуется величиной избыточного спроса $y(p)$. Полагая, что начальное состояние является точкой макроэкономического равновесия, будем иметь: $y(0)=0$.

Сокращение спроса может произойти вследствие инфляции, которая, повышая уровень цен, уменьшает потребность в реальных денежных балансах. Инфляция «охлаждает» экономику и восстанавливает макроэкономическое равновесие. В состоянии депрессии уровень логцен ниже их равновесного уровня: спрос меньше предложения. Снижение цен (дефляция), увеличивая потребность в реальных деньгах, стимулирует спрос (и дестимулирует производство), снова играя роль стабилизирующей силы. Когда спрос равен предложению, экономика, не имея внутренних (собственных) стимулов к развитию, находится в состоянии покоя, т.е. в равновесном состоянии.

Все ситуации, охарактеризованные выше, моделируются дифференциальным уравнением, связывающим состояние макроэкономической системы (уровень логцен) с его изменениями (инфляцией или дефляцией):

$$\dot{p}=y(p), \tag{1.7}$$

где $y(p)$ – монотонно убывающая функция избыточного спроса.

Если в уравнении (1.7) сделать самое простое предположение о функции $y(p)$ – считать ее линейной убывающей функцией уровня логцен и допустить, что инфляция (дефляция) пропорциональна величине рассогласования спроса и предложения для каждого значения цен, простейшую модель инфляции можно записать так:

$$\dot{p}=-kp,\ \ k>0. \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) означает, что при ценах ниже равновесных ($p<0$) экономика находится в состоянии бума, т.е. $y(p)=-kp>0,$ поскольку низкие цены стимулируют спрос. Когда же избыточный спрос положительный, то для восстановления макроэкономического равновесия цены должны вырасти, что уменьшит спрос и увеличит предложение, а это может иметь место в условиях инфляции $(\dot{p} > 0)$. Наоборот, для цен, превышающих равновесный уровень, спрос меньше предложения, следовательно, цены должны снизиться, чтобы равновесие восстановилось.

1.2. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка

В зависимости от вида и свойств функций $f(t,x)$, $P(t,x), Q(t,x)$ можно провести некоторую классификацию уравнений вида (1.1), (1.2), выделив типы уравнений, интегрируемых в квадратурах (с помощью интегралов), и указать методы их решения.

Далее всюду будем полагать, что функции $f(t,x)$, $P(t,x)$, $Q(t,x)$ непрерывны в некоторой области изменения переменных t, x.

1. ***Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.*** Уравнение (1.2) называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если каждую из функций двух переменных $P(t,x), Q(t,x)$ можно представить с помощью алгебраических преобразований в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной переменной:

$$P(t,x) = f_1(t) f_2(x), \quad Q(t,x) = \varphi_1(t)\varphi_2(x).$$

Следовательно, уравнение с разделяющимися переменными может быть записано так:

$$f_1(t) f_2(x) dt + \varphi_1(t)\varphi_2(x) dx = 0. \qquad (1.9)$$

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (1.9), следует сначала разделить обе его части на произведение $f_2(x)\varphi_1(t)$ $\left(f_2(x)\varphi_1(t) \neq 0\right)$. Тогда это уравнение примет вид

$$\frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} dt + \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} dx = 0\,. \qquad (1.10)$$

Уравнение (1.10) называют *уравнением с разделенными переменными*. Предположение о непрерывности функций обеспечивает существование интегралов:

$$\int \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} dt + \int \frac{\varphi_2(x)}{f_2(x)} dx = C. \qquad (1.11)$$

При делении могли быть утеряны решения алгебраических уравнений $f_2(x)=0$ и $\varphi_1(t)=0$. Поэтому для получения всех решений уравнения (1.9) следует к семейству интегральных кривых (1.11) присоединить нули системы $\begin{cases} f_2(x)=0, \\ \varphi_1(t)=0, \end{cases}$ если такие имеются.

Частными случаями уравнения с разделяющимися переменными являются уравнения вида

$$\dot{x}=f(t), \tag{1.12}$$

$$\dot{x}=f(x). \tag{1.13}$$

Рассмотренный пример 1.1. является примером уравнения (1.12), а уравнения (1.6), (1.8) – примером уравнения (1.13).

2. ***Однородные уравнения.*** Если в уравнении (1.2) $P(t,x)$, $Q(t,x)$ являются однородными функциями одной и той же степени (одного порядка), то уравнение (1.2) называется *однородным*. Напомним, что функция $f(x,y)$ называется однородной функцией степени (порядка) m, если при любом значении k выполняется условие

$$f(kx,ky)=k^m f(x,y).$$

Путем замены $x=zt$ (тогда $dx=tdz+zdt$), где z – новая искомая функция, однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

К однородному уравнению приводится уравнение вида

$$\dot{x}=f\left(\frac{a_1t+b_1x+d_1}{a_2t+b_2x+d_2}\right),\ a_i=\text{const},\ b_i=\text{const},\ i=1,2, \tag{1.14}$$

если $a_1b_2\neq b_1a_2$. Для этого достаточно положить $t=u+\alpha$, $x=\upsilon+\beta$ и подобрать α,β таким образом, чтобы правая часть уравнения (1.14) приобрела вид $f\left(\dfrac{a_1u+b_1\upsilon}{a_2u+b_2\upsilon}\right)$, т.е. подчинить α и β следующей системе:

$$\begin{cases} a_1\alpha+b_1\beta+d_1=0, \\ a_2\alpha+b_2\beta+d_2=0. \end{cases}$$

Если же $a_1b_2=a_2b_1$, то $a_1t+b_1x=k(a_2t+b_2x)$ при $a_2\neq 0$ и $b_2\neq 0$ ($k=\text{const}$). В этом случае уравнение (1.14) приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z = a_2 t + b_2 x$; при $a_2 = b_2 = 0$ делаем замену $z = a_1 t + b_1 x$.

3. ***Линейные уравнения.*** Уравнение вида

$$\dot{x} = a(t)x + g(t) \tag{1.15}$$

называется *линейным уравнением первого порядка*. Здесь функции $a(t)$ и $g(t)$ определены и непрерывны на некотором интервале.

Одним из способов решения уравнения (1.15) является *метод вариации произвольной постоянной*. Суть этого метода заключается в следующем.

Сначала ищется решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.15):

$$\dot{x} = a(t)x. \tag{1.16}$$

Затем в общем решении уравнения (1.16) произвольную постоянную C считают некоторой дифференцируемой функцией от t: $C = C(t)$. Эту функцию находят из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, которое получается в результате подстановки общего решения уравнения (1.16) в уравнение (1.15).

Общее решение линейного уравнения можно получить также *методом подстановки* в виде произведения функций $u(t)$ и $\upsilon(t)$, т.е. полагая $x = u\upsilon$.

4. ***Уравнение Бернулли.*** Уравнение Бернулли имеет вид

$$\dot{x} = f(t)x + g(t)x^n, \qquad n \neq 1,\ n \neq 0, \tag{1.17}$$

где $f(t)$, $g(t)$ – функции, непрерывные на некотором интервале.

Делением обеих частей уравнения (1.17) на x^n и заменой неизвестной функции $x^{1-n} = z$ уравнение Бернулли всегда приводится к уравнению, линейному относительно z.

При делении на x^n может быть утеряно решение, если $n > 0$. Это решение является частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$.

При интегрировании конкретных уравнений Бернулли их не надо предварительно преобразовывать в линейные, а следует сразу применять метод вариации произвольной постоянной или метод подстановки (см. [3, с. 43 – 47]).

5. ***Уравнения в полных дифференциалах.*** Уравнение (1.2) называется *уравнением в полных дифференциалах*, если его

левая часть $P(t,x)dx+Q(t,x)dt$ является полным дифференциалом некоторой функции, т.е. существует такая функция $u=u(t,x)$, что выполняется равенство

$$du=P(t,x)dx+Q(t,x)dt.$$

Если функции $P, Q, \dfrac{\partial P}{\partial t}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой односвязной области $D\subset{}^{2}$, то условие

$$\frac{\partial P}{\partial t}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (1.18)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы выражение $Pdx+Qdt$ было полным дифференциалом функции u.

Решение уравнения (1.2) при выполнении условия (1.18) сводится к известной задаче нахождения функции $u(t,x)$ по ее полному дифференциалу. Один из методов решения этой задачи заключается в следующем.

Записываем систему равенств:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(t,x),\ \frac{\partial u}{\partial t}=Q(t,x). \qquad (1.19)$$

Проинтегрировав первое из равенств (1.19) по x при фиксированном t и заметив, что произвольная постоянная в этом случае может зависеть от t, будем иметь:

$$u(t,x)=\int P(t,x)dx+\varphi(t). \qquad (1.20)$$

Из равенства

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int P(t,x)dx\right)+\dot{\varphi}(t)=Q(t,x)$$

находим функцию $\varphi(t)$, после подстановки которой в (1.20) получаем функцию $u(t,x)$.

Очевидно, что решение уравнения в полных дифференциалах записывается в виде $u(t,x)=C$.

Пример 1.4. Найти: а) решение дифференциального уравнения (1.6), представляющего собой модель естественного роста выпуска продукции, при условии, что в начальный момент времени $t=t_0$ зафиксирован (задан) объем выпуска продукции Q_0; б) общее решение модели простейшей инфляции (1.8); в) функцию $Q=Q(t)$, характеризующую объем реализованной продукции, если известно, что кривая спроса

$P(Q)$ задается уравнением $P(Q) = 2 - Q$, норма акселерации $1/l = 1/2$, норма инвестиций $m = 0,5$, $Q(0) = 0,5$ (см. уравнение (1.6)).

Р е ш е н и е. а) Проинтегрируем уравнение (1.6), как уравнение с разделяющимися переменными вида (1.13). Записав уравнение (1.6) в виде $\frac{dQ}{dt} = kQ$ и разделив обе его части на Q, после умножения на dt будем иметь: $\frac{dQ}{Q} = kdt$. После интегрирования получим общее решение:

$$Q = Ce^{kt}, \tag{1.21}$$

где C – произвольная постоянная.

После подстановки заданного начального условия $Q(t_0) = Q_0$ в общее решение (1.21) получим: $Q_0 = Ce^{kt_0}$, откуда $C = Q_0 e^{-kt_0}$.

Таким образом, частное решение уравнения (1.6) – это решение поставленной задачи Коши для данного уравнения:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)}.$$

б) Так же, как и для уравнения (1.6), найдем общее решение уравнения $\dot{p} = -kp$. Оно будет иметь вид

$$p(t) = p_0 e^{-kt}. \tag{1.22}$$

Функция (1.22) при $t \to \infty$ стремится к нулю.

Таким образом, для любого начального уровня цен $p(0) = p_0$ система, представленная уравнением (1.8), за достаточно длительный период времен восстанавливает нарушенное равновесие между спросом и предложением.

в) Подставив значения m, l, P в уравнение (1.6), будем иметь: $Q' = (2 - Q)Q$. Это уравнение с разделяющимися переменными, разделив которые получим:

$$\frac{dQ}{(2-Q)Q} = dt.$$

Выполнив почленное интегрирование, будем иметь:

$$\ln\left|\frac{Q-2}{Q}\right| = -2t + \ln|C|,$$

Оглавление

Учебное издание

Минюк Степан Андреевич
Берёзкина Наталия Серафимовна

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
И ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *В.И. Аверкина*
Компьютерная верстка *И.С. Оликсевич*

Подписано в печать 15.06.2007. Формат 84×108/32. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Офсетная печать. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 6,81. Тираж 2000 экз. Заказ

Республиканское унитарное предприятие «Издательство "Вышэйшая школа"». ЛИ № 02330/0131768 от 06.03.2006. 220048, Минск, проспект Победителей, 11. www.vshph.com

Открытое акционерное общество «Барановичская укрупненная типография». 225409, Барановичи, ул. Советская, 80.