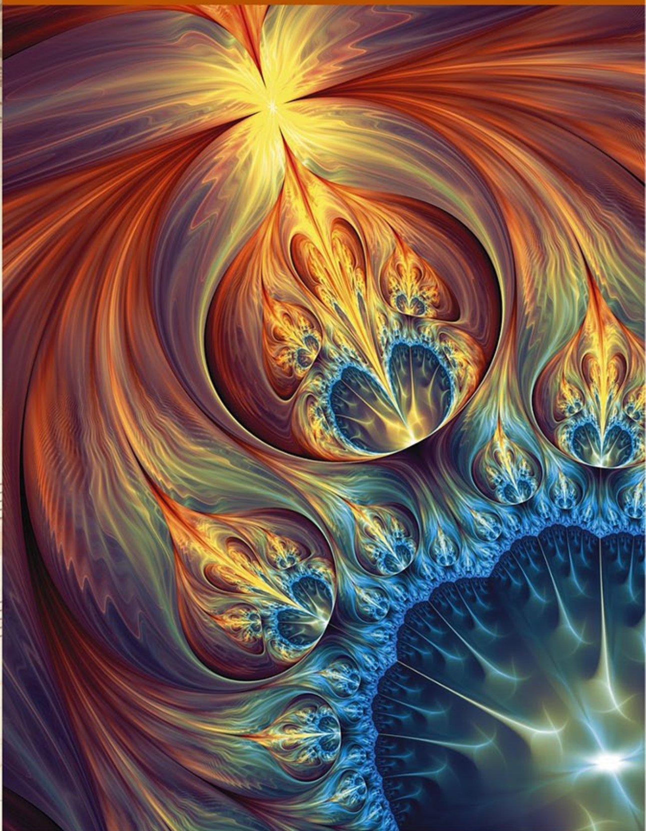
ФОРМУЛА КУЛЬТУРЫ

ФРАКТАЛЫ КАК ИСКУССТВО

СБОРНИК СТАТЕЙ



ББК 71.0
УДК 76.01 + 501
Ф 826

Ф 826 **Фракталы как искусство.** Сборник статей/ Пер. с англ., фр. Е. В. Николаевой. – СПб.: «Страта», 2015. – 224 с.

ISBN 978-5-906150-18-9

В сборник вошли статьи зарубежных математиков и художников-фракталистов, многие из которых хорошо известны в научных и художественных кругах. Проблематика книги связана с философскими и эстетическими смыслами фрактального искусства, представляющего собой особый художественный феномен конца XX – начала XXI вв. Подборка статьей представляет собой попытку посмотреть на цифровое фрактальное искусство с нескольких ракурсов: математического, технологического, эстетического и философского. Большинство текстов не носит специально-математического характера и относится, скорее, к сфере digital humanities (цифровых гуманитарных наук).

Многие статьи сборника впервые публикуются на русском языке.

Книга представляет интерес для специалистов в области эстетики, философии искусства, культурологии и искусствоведения, преподавателей и студентов художественных специальностей, широкого круга читателей.

ISBN 978-5-906150-18-9

Введение 6

Бенуа Мандельброт

Какова длина побережья Британии? Статистическое самоподобие и фрактальная размерность. 8

Майкл Барнсли, Луиза Барнсли

Фрактальные трансформации 16

Бенуа Мандельброт

Фракталы и искусство во имя науки 36

Харалампос Сайтис

Фрактальное искусство: Ближе к небесам?. 48

Ральф Абрахам

Хаос и фракталы Парижа 62

Любица М. Коцич

Художественные элементы фрактальных конструкций. 72

Ричард Тэйлор, Адам П. Миколич, Дэвид Джонас

Фрактальный анализ живописи Поллока 88

Ричард Тэйлор, Адам П. Миколич, Дэвид Джонас

Фрактальный экспрессионизм. Может ли наука помочь в понимании искусства?. 92

Джуди С. Розато

Фрактальное искусство. 102

Манифест группы «Искусство и сложность»

(Manifeste du Fractaliste) 122

Карлос Гинзбург

Фрактальное искусство. 124

Сюзан Конде

Фрактальный художник 130

Шарль Васало

Фрактальное искусство? 138

Кен Келлер

Современная эволюция фрактального искусства: Традиционное и репрезентативное фрактальное искусство 150

Керри Митчелл

Манифест фрактального искусства 154

Элис Келли

Фракталы как искусство 158

Дэмиен М. Джоунс

О фракталах и искусстве 168

Жанет Парк

Фрактальное искусство: сравнение стилей. 178

Скотт Дрэйвз, Ралф Абрахам, Пабло Виотти, Фредерик Дэйвид Абрахам, Джулиан Клинтон Спротт

Эстетика и фрактальная размерность «электроовец» 194

Елена Николаева

Фрактальное искусство: эстетика бесконечности и гармония хаоса 204

Сергей Деменок

Послесловие 216

Бенуа Мандельброт

КАКОВА ДЛИНА ПОБЕРЕЖЬЯ БРИТАНИИ? СТАТИСТИЧЕСКОЕ САМОПОДОБИЕ И ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ

Бенуа Мандельброт (Benoît B. Mandelbrot) (1924—2010) — известный франко-американский математик, основатель нового раздела математики — фрактальной геометрии. Автор книги «Фрактальная геометрия природы» и других научных работ, в том числе по фрактальному анализу биржевых рынков. Его именем названо множество, которое он исследовал.

Береговые линии представляют собой пример в высшей степени сложных кривых, таких, что каждый из их участков может — в статистическом смысле — быть рассмотрен как образ целого в уменьшенном масштабе. Это свойство будем называть «статистическим самоподобием». Говорить о длине таких фигур обычно бессмысленно. Так, «левый берег реки Вислы, измеренный с повышенной точностью, дал бы длины в десятки, сотни и даже тысячи раз больше длины, снятой со школьной карты»[1]. В более общем виде географические линии можно рассматривать как суперпозиции элементов широкого диапазона размеров; чем более мелкие элементы принимаются во внимание, тем более возрастает измеренная общая длина, и обычно нет ясного разделения между областью приложения географии и деталями, с которыми географии нет необходимости иметь дело.

Таким образом, нужны величины иные, чем длина, чтобы выявлять различия между разными степенями сложности у географических кривых. Когда кривая самоподобна, она характеризуется степенью подобия, D, которая обладает многими свойствами размерности, хотя обычно это дробная величина, больше 1 — размерности, приписываемой кривым. В свете этого мы заново рассмотрим некоторые наблюдения Ричардсона[2]. Я предполагаю интерпретировать их, приняв, например, что размерность западного побережья Великобритании D = 1,25. Это показывает,

1 См.: H. Steinhaus, Colloquium Math. 3, 1 (1954), где приводятся более ранние источники.

2 L. F. Richardson in: General Systems Year-book 6, 139 (1961).

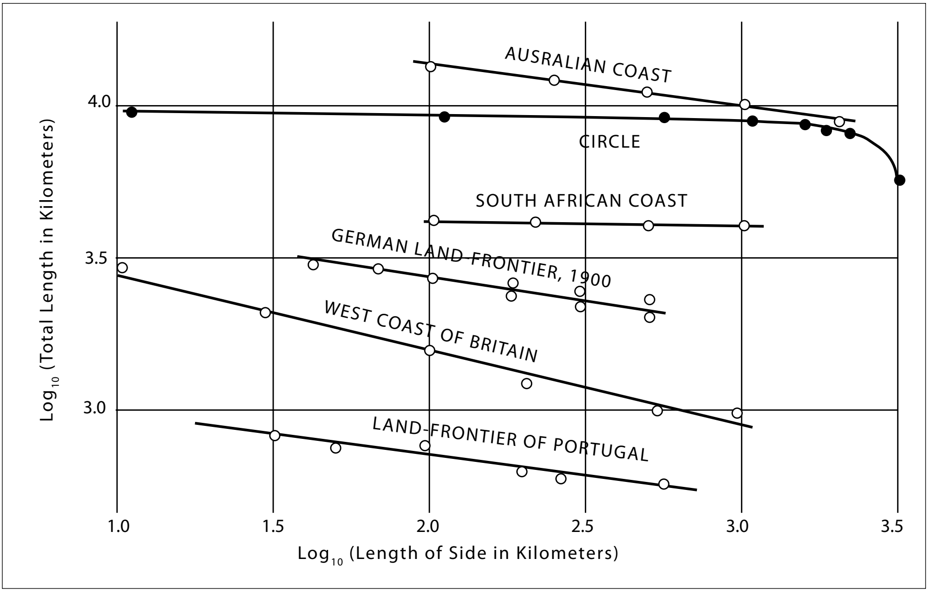


Рис. 1. Данные Ричарсона по измерениям географических кривых методом многоугольников, которые имеют равные стороны и вершины, расположенные на кривой. Для круга общая длина стремится к некоторому пределу по мере того, как длина сторон приближается к нулю. Во всех других случаях она возрастает по мере того, как сторона становится короче, при этом уклон графика с логарифмическим масштабом на обеих осях по абсолютной величине равен D — 1 [1]

1 Richardson L. F. Op. cit.

что еще недавно эзотерическое понятие «случайной фигуры фрактальной размерности» имеет простое и конкретное применение и большую практическую значимость.

Методы самоподобия являются действенным инструментом в изучении феномена случайности, включая геостатистику, а также экономику[3] и физику[4]. Фактически многие шумы имеют размерности D между 0 и 1, так что ученому следует рассматривать раз-

3 Mandelbrot B., Business J. 36, 394 (1963), или в: The Randomn Character of Stock Market Prices, P. H. Cootner, Ed. (M. I. T. Press, Cambridge, Mass, 1964), p. 297.

4 Mandelbrot B., IEEE Inst. Elect. Electron. Eng. Trans. Commun. Technol. 13, 71 (1965) и IEEE Inst. Elect. Electron. Eng. Trans. Inform. Theory 13 (1967). Очень похожие рассуждения относятся к турбулентности, где типичные размеры «топографических элементов» (т. е. водоворотов) имеют очень широкий разброс, на что было впервые указано самим Ричардсоном в 1920-х гг.

мерность как непрерывную величину, изменяющуюся в диапазоне от 0 до бесконечности.

Возвращаясь к заявлению, сделанному в первом параграфе, давайте сделаем обзор методов, используемых при попытках измерить длину побережья. Поскольку географу не интересны мелкие детали, он может выбрать положительный масштабный параметр G в качестве нижнего предела для длины географически значимых элементов. Тогда, чтобы оценить длину берега между двумя точками A и B, он может провести по суше кратчайшую кривую, соединяющую A и B, оставаясь при этом в пределах расстояния G от моря. Или он может нарисовать кратчайшую линию, составленную из прямых отрезков длины, не больше, чем G, чьи вершины являются точками береговой линии, которая включает A и B. Есть много других возможных способов определения. На практике, конечно, нужно ограничиваться приближением к кратчайшим траекториям. Предположим, что измерения сделаны циркулем по карте таким образом, чтобы сосчитать количество равных шагов длины G незамкнутого многоугольника, чьи углы лежат на кривой. Если G достаточно мало, не имеет значения, начинаются измерения из точки A или B. Так будет получена оценка длины, которую назовем L (G).

К сожалению, географы не могут договориться насчет величины G, в то время как L (G) сильно зависит от G. Следовательно, необходимо знать L (G) для нескольких значений G. Еще лучше было бы иметь аналитическую формулу, связывающую L (G) с G. Такая формула, всецело эмпирического характера, была предложена Льюисом Ф. Ричардсоном, но, к сожалению, она не привлекла к себе внимания. Формула такова: $L(G)=M\,G^{1-D}$, где M — положительная константа и D — константа не меньше единицы. Эта D, «характеристика границы, предположительно имеет некоторую положительную корреляцию с непосредственным визуальным восприятием изломанности границы. Для одного предельного случая D = 1,00 для границы, которая выглядит как прямая на карте. Для другого предельного случая было выбрано западное побережье Британии, потому что оно, похоже, одно из самых изрезанных в мире; найденное значение D = 1,25. Три другие границы, которые, судя по их виду на карте, были близки к средним в мире по изрезанности, дали D = 1,15 для сухопутной границы Германии в 1899 году; D = 1,14 для сухопутной границы между Испанией и Португалией и D = 1,13 для австралийского побережья. Берег, выглядящий одним из самых ровных в атласе, был выбран на юге Африки, и для него $D = 1{,}02$» [5].

Эмпирические находки Ричардсона находятся в сильном контрасте с обычным поведением гладких кривых, которые наделены хорошо определяемой длиной и которых называют «спрямляемыми». Теперь снова процитируем Штейнхауса: «Утверждение, что стоило бы назвать большинство дуг, встречающихся в природе, неспрямляемыми, практически полностью отвечает реальности. Это утверждение противоположно мнению о том, что неспрямляемые дуги являются изобретением математиков и что природные дуги спрямляемы: но верно как раз обратное» [6].

Я интерпретирую соотношение Ричардсона как противоположное мнению о том, что кривые, размерность которых больше единицы, являются изобретением математиков. Для этого необходимо проанализировать элементарные характеристики концепта размерности и показать, как это приводит к рассмотрению дробных размерностей.

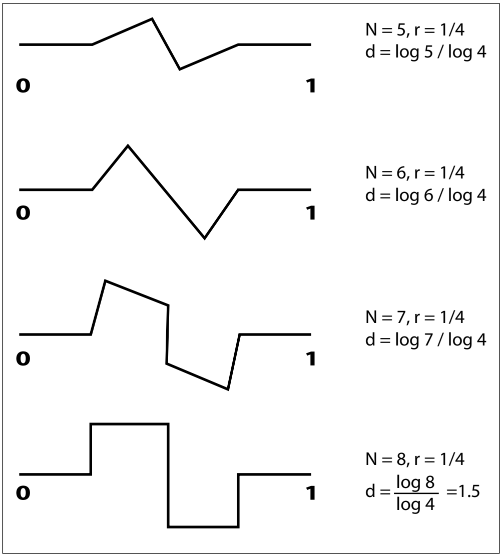
Для начала — прямая линия имеет размерность, равную единице. Следовательно, для любого положительного целого числа N отрезок $(0 \leq x < X)$ может быть точно разбит на N неперекрывающихся отрезков в форме $[(n-1)X/N \leq x < nX/N]$, где n изменяется от 1 до N. Каждая из этих частей редуцируема из целого с отношением подобия $r(N) = 1/N$. Аналогично, плоскость имеет размерность, равную двум. Следовательно, для каждого квадрата простого числа N прямоугольник $(0 \leq x < X;\ 0 \leq y < Y)$ можно разбить на N неперекрывающихся прямоугольников в форме $[(k-1)\,X/\sqrt{N} \leq x < kX/\sqrt{N};\ (h-1)\,Y/\sqrt{N} \leq y < hY/\sqrt{N}]$, где k и h изменяются от 1 до $\sqrt{N}$. Каждая из этих частей редуцируема из целого с отношением подобия $r(\sqrt{N}) = 1/\sqrt{N}$. В более общем виде, если $N^{1/D}$ является положительным целым числом, то D-размерный прямоугольный параллелепипед может быть разбит на N параллелепипедов, выводимых из целого с отношением подобия $r(N) = 1/N^{1\text{-}D}$. Таким образом, размерность D характеризуется отношением $D = -\log N/\log r(N)$.

Это последнее свойство величины D означает, что оно может быть также определено для более общих фигур, которые могут быть точно разбиты на N частей, таких что каждая из частей выводима из целого с отношением подобия $r(N)$ или с подобием вращения

5 Richardson L. F. Op. cit.

6 Steinhaus H. Op. cit.

Рис. 2. Неспрямляемые самоподобные кривые могут быть получены следующим образом. Шаг 1: Выберите любой из рисунков вверху. Шаг 2: Замените каждое из его *N* звеньев ломаной, полученной из исходного рисунка с отношением подобия 1/4. Получится ломаная, составленная из N^2 звеньев длиной $(1/4)^2$. Шаг 3: Замените каждое из звеньев ломаной, полученной из исходного рисунка с отношением подобия $(1/4)^2$. Желаемая самоподобная кривая есть результат бесконечной последовательности этих шагов



и даже симметрии. Если такие фигуры существуют, о них можно сказать, что они имеют своей размерностью D = — log N/log r (N)[7]. Чтобы показать, что такие фигуры существуют, достаточно продемонстрировать несколько очевидных вариантов непрерывной недифференцируемой привой Коха. Каждая из этих кривых строится как предел. На шаге 0 рисуется отрезок (0,1). На шаге 1 рисуется любая из ломаных с рис. 2, каждая составленная из N участков, помещающихся в отрезок (0, ¼). На шаге 2 каждый из N отрезков, использованных на шаге 1, замещается ломаной, полученной уменьшением ломаной шага 1 в отношении r (N)= ¼. В итоге получится N^2 отрезков длиной 1/16.

Каждое повторение одного и того же процесса добавляет новые детали; по мере того, как число шагов возрастает до бесконечности, наши ломаные кривые стремятся к непрерывным предельным линиям, и, при внимательном рассмотрении, становится очевидным, что эти предельные линии являются самоподобными, поскольку они точно разбиваемы на N частей, выводимых

7 Понятие «размерность» является неясным и очень сложным, и далеко не исчерпывается простыми рассуждениями того рода, что были использованы в этой статье. Разные определения часто приносят разные результаты, эта область изобилует парадоксами. Тем не менее, размерность Хаусдорфа-Безиковича при вычислении для стохастических самоподобных фигур дает уже то же значение, что и размерность подобия.

из целого с отношением подобия r (N) = ¼ при каждом переходе. Таким образом, для данного N можно сказать, что предельная линия имеет размерность D = — log N/log r (N) = log N/log 4. Поскольку N больше 4 в наших примерах, соответствующие размерности все превышают единицу. Давайте теперь рассмотрим длину: на шаге *s*, наше приближение состоит из N^S отрезков длиной $G = (1/4)^S$, так что $L = (N/4)^S = G^{1-D}$. Таким образом, длина предельной кривой бесконечна, даже если она «линия». (Заметим, что это не исключает возможности для кривой на плоскости иметь размерность, равную 2. Примером служит кривая Пеано, которая заполняет собой квадрат.)

Практическое применение такого понятия размерности требует дальнейшего рассмотрения, потому что самоподобные фигуры редко встречаются в природе (одно из исключений — кристаллы). Однако статистическая форма самоподобия встречается часто, концепция размерности может быть обобщена далее. Скажем, (замкнутая) плоская фигура, выбранная случайно, предполагает несколько определений. Во-первых, можно выбрать семейство возможных фигур, обычно обозначаемое Ω. Когда это семейство содержит конечное число членов, правило случайного выбора задается приписыванием каждой из возможных фигур точно определенной вероятности того, что она будет выбрана. Однако Ω в общем случае бесконечно и каждая фигура имеет нулевую вероятность быть выбранной. Но положительные вероятности могут быть заданы для должным образом определенных «событий» (например, событие, что выбранная фигура мало отличается — в некотором заданном смысле — от некоторой заданной фигуры).

Для того, чтобы семейство Ω, вместе с определением событий и их вероятностей, было самоподобным, необходимы два условия. Во-первых, каждая из возможных фигур должна быть конструируема путем выстраивания некоторого ряда из N фигур, каждая из которых выводима из возможной фигуры с отношением подобия r; во-вторых, вероятности должны быть заданы таким образом, что получается одно и то же значение, выбирается ли общая фигура как единичная или в виде ряда. (Значение N может быть или произвольно, или выбрано из некоторой заданной последовательности, такой, как квадраты простых чисел, относящиеся к неслучайным прямоугольникам, или целые порядки 4, 5, 6 или 7, наблюдаемые в кривых, построенных как на рис. 2.) В случае, если значение r задано выбором N, можно считать — log N/log r размерностью подобия. Чаще, однако, для данного r N будет принимать различные значения для разных фигур семейства Ω. При рассмотрении точек, расположенных «достаточно далеко» друг от друга, детали «достаточно мелкого» масштаба могут стать асимптотически независимыми, так что — log N/log r практически непременно стремится к некоторому пределу, в то время как r стремится к нулю. В этом случае этот предел можно рассматривать как размерность подобия. При более общих условиях длина аппроксимационных многоугольников будет асимптотически вести себя как $L(G) \sim G^{1-D}$.

Задать математические условия для существования размерности подобия — еще не значит полностью решить проблему. Фактически даже идея о том, что географическая кривая является стохастической, вызывает ряд концептуальных проблем, знакомым по другим приложениям стохастичности. Таким образом, возвращаясь к эмпирическому закону Ричардсона, единственное, что можно сказать с совершенной уверенностью, — что он согласуется с идеей о том, что географические кривые являются стохастически самоподобными фигурами дробной размерности D. Ученым-эмпирикам, вынужденным довольствоваться не слишком совершенными умозаключениями, я предлагаю более достоверную интерпретацию, приведенную в начале доклада.

Майкл Барнсли, Луиза Барнсли

ФРАКТАЛЬНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ

Майкл Барнсли (Michael Fielding Barnsley) — британский математик, автор нескольких патентов по фрактальному сжатию изображений на основе технологии IFS (системы итерируемых функций). Одна из его наиболее известных книг — «Fractals everywhere» (1988). Ныне профессор математики в Австралийском национальном университете.

1. УВЛЕКАТЕЛЬНАЯ ИГРА В ФУТБОЛ

1.1. Посмотрите на удар Дебби!

Представьте себе, что вы отличный футболист, в совершенстве контролирующий мяч и обладающий абсолютной стабильностью. Где бы ни находился мяч на футбольном поле, вы можете ударить по нему так, что он приземлится на середине между тем местом, где он был, и углом поля. И мяч останется лежать неподвижно именно там, куда он упал. И вы можете сделать так всегда.

Именно такие футболисты — Alf, Bert, Charlie и Debbie. Они играют на футбольном поле ABCD (рис. 1 и цветная вкладка). Debbie всегда бьет по мячу, когда она добирается до него первой. Она бьет по нему так, что он летит из точки X в середину между точками D и X. Посмотрите, как бьет Debbie!

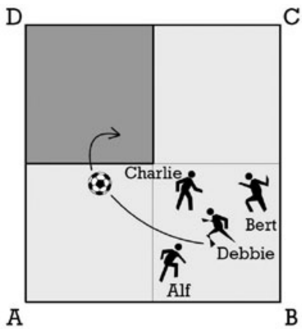


Рис. 1. Дебби только что отправила мяч на середину расстояния до точки D. Если мяч был в точке X, то он приземлится на середине отрезка XD

Alf действует так же, только он посылает мяч на середину расстояния до точки A. Bert бьет по мячу так, что тот попадает на середину расстояния до точки B. Вы можете догадаться, куда Charlie отправляет мяч, когда она добирается до него первой.

Кто бьет по мячу следующим — целиком дело случая. Нет никакой разницы, где на поле находятся игроки и кто ударил по мячу последним. Вы никогда не можете надежно предсказать, кто будет бить следующим. Последовательность игроков, ударивших по мячу, может быть задана случайной последовательностью их инициалов: DABACBADAABCDCBACAADDBAC....

Игра продолжается вечно.

Наблюдать за этой ужасной игрой в футбол то же самое, что наблюдать за четырьмя цыплятами во дворе фермы, гоняющимися за хлебной коркой. Тут нет командной игры, и никогда не забивается ни один гол. Но, по крайней мере, никто не ест мяч.

То, что в действительности происходит с мячом, это захватывающе. Почти наверняка он прыгает по полю вечно, подходя невероятно близко ко всем точкам на поле. Если вы отметите какой-нибудь небольшой круг на поле, рано или поздно мяч ударится о землю внутри этого круга. Некоторое время спустя он сделает это снова. И снова, и снова. Футбольный мяч оставит отметины на поле, подходя произвольно близко к каждой точке на нем. Мы говорим, что мяч «эргодически» путешествует по полю.

Alf, Bert, Charlie и Debbie представляют собой «трансформации» футбольного поля. Alf представляет трансформацию, которая переносит все поле в левую нижнюю четверть. Обозначим символом ■ футбольное поле. Тогда

Alf (■) = ***Четверть A Футбольного Поля***,

четверть в нижнем левом углу. Считаем, что Alf «забивает» все поле целиком в четверть поля.

Аналогичным образом, ***Bert*** (■) = ***Четверть B Футбольного Поля***, четверть в нижнем правом углу. Так же и ***Charlie*** (■) = ***Четверть C Футбольного Поля***, а ***Debbie*** (■) = ***Четверть D Футбольного Поля,*** четверть слева вверху.

Эти трансформации в фактически дают «уравнение» для футбольного поля:

■ = ***Alf*** (■) ∪ ***Bert*** (■) ∪ ***Charlie*** (■) ∪ ***Debbie*** (■).

Оно говорит, что поле ■ составлено из «четырех трансформированных копий его самого». Оно говорит, что поле является объединением четырех четвертей поля, прямо как Соединенное Королевство является объединением Англии, Северной Ирландии, Шотландии и Уэльса.

Для нас каждый игрок — это трансформация или функция, обеспечивающая единственно возможное соответствие между каждым положением на поле (откуда бьют по мячу) и другим положением (точкой, где мяч приземляется).

1.2. Чарли ушибает ногу

Какое все это имеет отношение к фракталам? Самое прямое, как мы увидим далее.

Предположим, Charlie получает удар по ноге и не может играть. Только Alf, Bert и Debbie теперь бьют по мячу. Последовательность ударов все так же случайна, например, начинающаяся в таком порядке: DBAABADBADDABBAD...

Игра начинается с удара по мячу в центре поля.

Куда теперь идет мяч? Чтобы выяснить это, мы покрасим его черно-зелеными чернилами. Теперь мяч оставляет точку на белом поле каждый раз, когда он приземляется. В течение игры он создаст некоторую картинку.

Удивительным образом, картинка, которую он создает, почти всегда выглядит, как на рис. 2 и цветной вкладке. Она называется «Треугольник Серпинского ABD». Обозначим его ▲. В ситуации, когда Charlie не участвует в игре, мяч эргодически путешествует

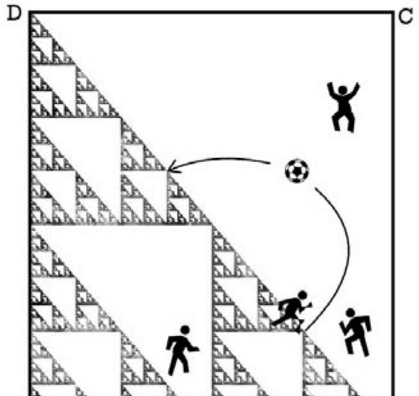


Рис. 2. Charlie ушибает ногу и не может играть некоторое время. Мяч путешествует «эргодически» по треугольнику Серпинского ABD

по ▲. Отметим маленький кружок с центром в любой точке на ▲. Мяч будет посещать этот кружок снова и снова.

Треугольник Серпинского ▲ — настоящий фрактал. Обратите внимание, как он сделан из трех трансформированных копий самого себя. Одна копия расположена в левой верхней четверти, одна в левой нижней четверти и одна в правой нижней. Теперь оказывается, что футболисты «бьют» ▲ в более маленькие части ▲.

Наше уравнение на этот раз принимает вид:

$$\blacktriangle = \boldsymbol{Alf}(\blacktriangle) \cup \boldsymbol{Bert}(\blacktriangle) \cup \boldsymbol{Debbie}(\blacktriangle).$$

Это уравнение для ▲, треугольника Серпинского ABD.

1.3. Игроки меняют алгоритм ударов

Charlie возвращается в игру.

Alf, Bert, Charlie и Debbie сыты по горло тем, что не забили ни одного гола. Поэтому они меняют способ, которым они бьют по мячу.

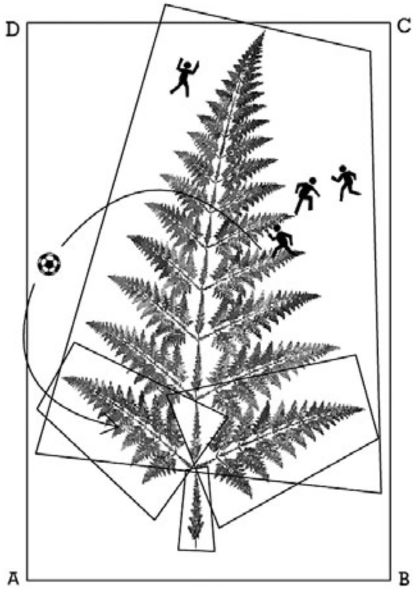
Каждый игрок бьет своим собственным особым способом, методично и надежно. Alf теперь бьет по мячу так, что он всегда приземляется в определенном четырехугольнике. Charlie и Debbie посылают мяч в свои собственные четырехугольники. Вы можете увидеть футбольное поле и эти четыре четырехугольника на рис. 3 и цветной вкладке.

Alf забивает прямые линии в прямые линии следующим образом. Пусть ***P*, *Q*** и ***R*** — три точки, которые лежат на прямой линии. Он бьет по мячу из точки ***P*** в ***Alf*** (***P***), из точки ***Q*** в ***Alf*** (***Q***) и из точки ***R*** в ***Alf*** (***R***). Тогда ***Alf*** (***P***), ***Alf*** (***Q***) и ***Alf*** (***R***) лежат на прямой линии! Например, если мяч находится на одной из боковых линий футбольного поля, Alf бьет по нему так, что он приземляется на одной из боковых сторон его четырехугольника. Если мяч лежит в центре поля, Alf бьет по нему так, что тот приземляется на пересечении двух диагоналей его четырехугольника. Alf — меткий футболист.

Если Alf бьет по мячу из двух разных точек, мяч приземляется в двух точках, которые находятся ближе друг к другу, чем исходные точки. Мы говорим, что Alf представляет «сжимающую» трансформацию.

Другие игроки действуют подобным же образом, единственное различие — это четырехугольники, в которые они бьют.

Рис. 3. Каждый футболист теперь представляет проективную трансформацию. Одна трансформация соответствует каждому из четырехугольников внутри футбольного поля ABCD. Места, где приземляется мяч, создают картинку папоротника. Мяч путешествует «эргодически» по папоротнику



Куда мяч идет в этот раз? Определение порядка, в котором игроки бьют по мячу, опять случайно. Игра продолжается бесконечно. Игрокам никогда не надоедает играть, и они никогда не устают. Они бессмертны. И мяч отмечает зеленые или черные точки на белом поле там, где он приземляется, после первого года игры. В результате узор из точек образует папоротник на рис. 3. Мы называем этот папоротник ***F***. Футбольный мяч путешествует эргодически по ***F***.

Наше уравнение на сей раз принимает вид:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Alf}(\boldsymbol{F}) \cup \boldsymbol{Bert}(\boldsymbol{F}) \cup \boldsymbol{Charlie}(\boldsymbol{F}) \cup \boldsymbol{Debbie}(\boldsymbol{F}).$$

Папоротник F является объединением «четырех трансформированных копий самого себя».

И что удивительно — трансформации, представленные игроками, и этот тип уравнения, определяют одну и только одну картинку: в данном случае папоротник, в предыдущем случае треугольник Серпинского, и все футбольное поле в первом случае. Измените способ, которым игроки бьют по мячу, и вы измените картину, по которой мяч в конечном итоге «эргодически» путешествует.

1.4. Схемы инфернального футбола (СИФ)

Многие различные фрактальные картины и другие геометрические объекты можно описать, используя СИФ. Буквы обозначают «систему итерируемых функций», но здесь мы притворимся, что они значат — «схема инфернального футбола».

СИФ состоит из футбольного поля и нескольких игроков, каждый со своим собственным способом бить по мячу. Каждый игрок должен всегда бить по мячу с поля на поле согласно установленным правилам. И каждый игрок должен представлять сжимающую трансформацию, должен «забивать» поле в участок меньшего размера. Мы продолжаем называть игроков Alf, Bert, Charlie и Debbie, но игроков может быть больше или меньше.

Тогда всегда будет получаться особая уникальная картинка, «фрактал», коллекция точек на белом поле, которая удовлетворяет уравнению:

$$fractal = Alf\,(fractal) \cup Bert\,(fractal) \cup Charlie\,(fractal) \cup Debbie\,(fractal).$$

Мы называем эту картинку фракталом, но это может быть что-то простое, как прямая линия, парабола или прямоугольник. Эта картинка может появиться в результате стохастической футбольной игры, как в примерах выше.

Пример фрактала, полученного с использованием СИФ трех трансформаций, показан на рис. 4. Вы сможете определить трансформации?

Таким способом многие фракталы и другие геометрические картинки могут быть зашифрованы с использованием все-

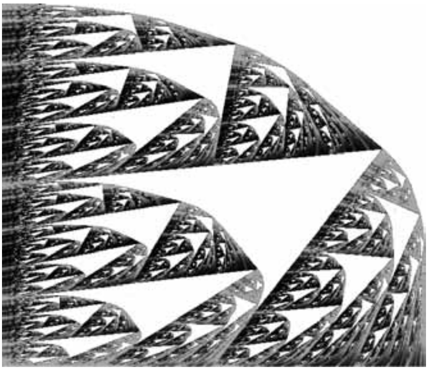


Рис. 4. Фрактал, полученный с помощью трех проективных трансформаций. Он преобразован в оттенки серого цвета. Можете ли вы определить трансформации?

го лишь нескольких трансформаций. Зная СИФ для конкретного фрактала, вы знаете его секрет. Вы знаете, что, несмотря на его кажущуюся визуальную сложность, он в реальности очень простой. Вы можете создать его и его вариации, снова и снова. Вы можете описать его с бесконечной точностью.

Если дана картинка природного объекта, такого, как лист, перо, раковина моллюска, интересно посмотреть, можно ли найти СИФ, которая хорошо опишет его. Если да, то у нас был бы эффективный способ моделировать и сравнивать некоторые биологические экземпляры.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ

2.1. Простые трансформации

Только что мы показали, что для понимания фракталов нужно понимать трансформации. Но какие трансформации?

Трансформации могут быть очень сложными. Они могут включать сгибание одной части пространства, сжатие другой, и выражаться подробными формулами, для записи которых потребуется несколько страниц.

Но одна из целей фрактальной геометрии — это описание изображений природных объектов эффективным образом. Ясно, что если сделать описание папоротника, используя некоторую СИФ, а трансформации, которые применяются, оказываются очень сложными, то мало что будет получено на пути упрощения. Поэтому мы ищем простые трансформации — такие, которые легко записать, объяснить и понять.

Один источник простых трансформаций — это Классическая Геометрия, которая включает в себя изучение свойств инвариантности серий трансформаций. Например, Евклидова Геометрия изучает свойства геометрических изображений, которые остаются неизменными, когда к ним применяются элементарные перемещения и вращения. Расстояние между парой точек является инвариантным при евклидовых трансформациях. Как и угол между двумя прямыми линиями.

Геометрия Подобий включает в себя трансформации Евклидовой Геометрии, а также трансформации подобий, называемых так, потому что они увеличивают или сжимают изображение при фиксированных факторах. Многие хорошо известные фракталы могут быть выражены с помощью трансформаций подобия, например, фрактал Серпинского ▲ и футбольное поле ■. Но Проективная Геометрия обеспечивает намного более простой набор трансформаций для описания природных форм.

2.2. Проективные трансформации

Проективные трансформации — это трансформации вроде тех, которые представили Alf, Bert, Charlie и Debbie, когда они начали забивать футбольное поле в четырехугольники. Для любой заданной пары четырехугольников можно найти — всегда можно найти — некую проективную трансформацию, которая преобразует один в другой, заставляя при этом все углы переходить в точно определенные углы.

Проективные трансформации естественным образом возникают в оптике, при объяснении эффектов перспективы, и играют важную роль в современной физике. Кажется, что они появляются естественным образом, при поисках порядка и паттернов в организации материи и света в природном физическом мире. На самом деле, они естественны в следующем смысле. Предположим, вы делаете чудесную четкую фотографию дерева с множеством плоских листьев, некоторые из которых больше, некоторые меньше, но все одной и той же формы. Тогда все из этой массы листьев на фотографии будут (почти) проективными трансформациями друг друга.

Когда вы смотрите телевизор под неудобным углом зрения, изображения, которые попадают на вашу сетчатку, являются фактически проективной трансформацией того, что вы увидели бы, если бы смотрели на экран под прямым углом. Но, в разумных пределах, система «мозг — глаз» справляется с искажением. «Узнаваемость» — это свойство инвариантности проективных трансформаций.

Проективные трансформации имеют такое свойство, что они часто трансформируют изображения растений и листьев в узнаваемые образы растений и листьев. Это свойство проиллюстрировано на рис. 5 и 6. Обратите внимание, как прямые линии

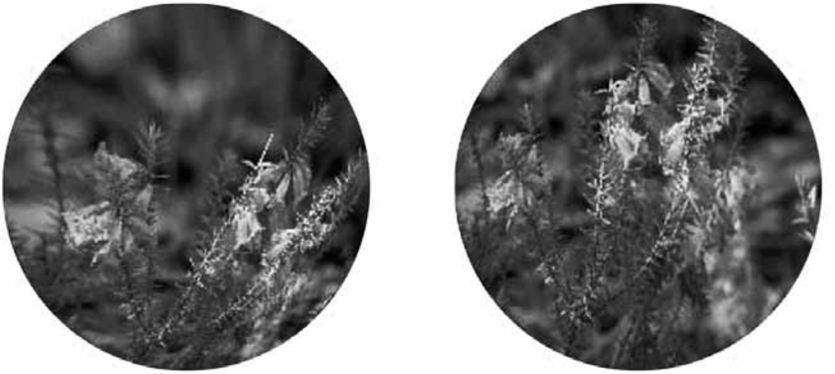


Рис. 5. Две сохраняющие окружности проективные трансформации изображения австралийского вереска

Рис. 6. Две различные сохраняющие эллипс проективные трансформации букового листа. Прямые линии, вдоль которых располагаются прожилки, сохраняются

прожилок букового листа трансформируются в другие прямые линии на рис. 6.

Образы реального мира содержат много повторений. Часто расположенные рядом листья выглядят похоже по биологическим и физическим причинам. А локальная модель погоды, кажется, собирает облака в участки из одинаковых по виду облаков. Это подобие и повторение может быть точно определено с помощью проективных трансформаций.

Проективные трансформации переносят точки в точки, а прямые линии — в прямые линии. Еще более примечательно, что они отображают конические секции в конические секции. То есть, если вы создаете изображение кругов, эллипсов, парабол, гипербол и прямых линий, затем применяете проективную трансформацию, итоговое изображение будет состоять из этих же самых форм. Но ***нельзя*** сказать, что круги трансформируются в круги, эллипсы — в эллипсы, параболы — в параболы или гиперболы — в гиперболы.

Не из-за этой ли инвариантности круговые и эллиптические элементы на крыльях некоторых бабочек очень легко опознаются другими бабочками или теми видами, которые их съедают?

2.3. Трансформации Мёбиуса

Трансформации Мёбиуса — еще один вид трансформаций, которые являются «простыми». Они часто используются для описания фракталов, и они, кажется, имеют некоторое — другое по сравнению с проективными трансформациями — естественное аффинное подобие с образами реального мира. Они имеют примечательное свойство, что они трансформируют любой круг или в круг, или в прямую линию, как показано на рис. 7.

В определенных ситуациях они трансформируют паттерны движения жидкости, представленные линиями течения, в другие возможные паттерны движения жидкости. Они также трансформируют изображения рыбы в другие изображения рыбы, как на рис. 8.

Трансформации Мёбиуса являются основным элементом Гиперболической Геометрии. Они были использованы Эшером

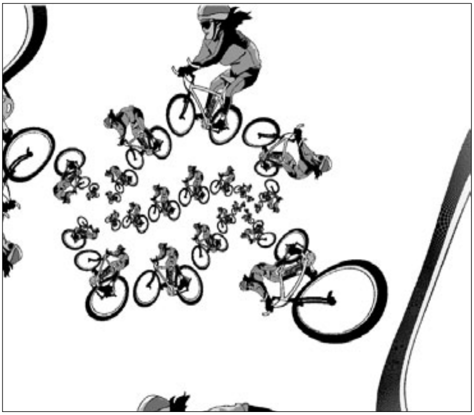


Рис. 7. Единственная трансформация Мёбиуса применена снова и снова к изображению человека на велосипеде. Образы существенно искажены по отношению друг к другу, но колеса все круглые, за исключением участков по краям картинки, где точность несколько теряется. Углы также сохранены. Каждая велосипедная рама является криволинейным треугольником с одними и теми же тремя углами

Рис. 8. Одна и та же трансформация Мёбиуса применяется снова и снова к единственной рыбе, создавая двойную спираль из рыб. Обратите внимание, что хотя рыбы значительно искажены, все они выглядят как рыбы

в некоторых его гравюрах, в том числе с такими природными объектами, как рыба.

На рис. 9 мы иллюстрируем Теорему Вписанной Рыбы. Это одно из многих наблюдений такого рода. Оно демонстрирует, что геометрия применяется не только к треугольникам, кругам и прямым линиям, но также к изображениям всех других типов.

*Рис. 9. Иллюстрация к Теореме Вписанной Рыбы.
Хотя рыбы на рис. 8 выглядят совершенно разными, они обладают следующим свойством. Нарисуйте минимально возможную окружность вокруг каждой рыбы, так чтобы окружность касалась рыбы, по крайней мере, в трех точках. Тогда каждая рыба будет касаться своей окружности одними и теми же частями тела*

2.4. Цена описания трансформаций

Даже «простые» трансформации могут быть сложными, если они содержат «константы», которые требуют массу цифр, чтобы выразить их точно. Чтобы понять этот момент, давайте взглянем на некоторые «формулы» для простых трансформаций. Детали этих формул, кроме того факта, что они содержат «константы», нас не интересуют.

Трансформации в двухмерном пространстве могут быть представлены с помощью картезианских координат (x, y) для каждой точки. Проективная трансформация может быть выражена такой формулой:

$$Alf(x,y) = \left(\frac{ax+by+c}{gx+hy+1}, \frac{dx+ey+f}{gx+hy+1} \right),$$

где a, b, c, d, e, f, g, h — числа, «константы», такие, как $a = 1{,}023$; $b = 7{,}1$; $c = -0{,}00035$; $d = 100$; $f = 9{,}1$; $g = 34{,}9$; $h = 17{,}3$. Аналогично, трансформация Мёбиуса может принять форму:

$$Bert(x,y) = \frac{(a+\sqrt{-1}b)+(c+\sqrt{-1}d)(x+\sqrt{-1}y)}{(e+\sqrt{-1}f)+(g+\sqrt{-1}h)(x+\sqrt{-1}y)},$$

в которой используется сложная арифметика и также восемь констант.

Если мы знаем, что каждая константа является целым числом между –127 и 128, которое может быть выражено с использованием одного байта информации (поскольку $2^8 = 256$), тогда для выражения каждой из таких трансформаций потребуется 8 байтов информации, по одному байту на каждую константу. Это, очевидно, более «простые» трансформации, чем те, в которых константы требуют два байта информации. Но оба этих варианта гораздо проще, то есть их можно выразить намного более кратко, чем если бы каждая константа была десятичным числом со случайным количеством цифр, например, а = 1,79201434953..., продолжающееся бесконечно.

Разумеется, можно сказать, что все эти дополнительные цифры не имеют значения. Но во фрактальной геометрии они очень важны, потому что фрактальная геометрия имеет дело с деталями! Очень маленькие изменения в константах будут обычно приводить к незначительным изменениям во фрактале, построенном с использованием трансформаций. Но если фрактал поместить, так сказать, под микроскоп и увеличить масштаб, чтобы разглядеть тончайшие детали, а в коэффициенте было сделано незначительное изменение, то часть фрактала, на которую вы будете смотреть, может полностью исчезнуть — не только изменится ее форма, но она вообще уйдет из поля зрения.

При применении фракталов для сжатия изображения, например, важно, чтобы трансформации могли быть выражены кратко и чтобы используемые константы не требовали много цифр. Мы говорим, что такие трансформации имеют «низкий информационный контент».

Одна из важных характеристик фракталов и других геометрических картин — это то, что их легко описать. Так что в большинстве случает использовать низкий информационный контент оказывается очень привлекательно.

3. СНОВА ФУТБОЛ: ОБНАРУЖЕНЫ ФРАКТАЛЬНЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ

3.1. Alan, Brenda, Celia и Doug начинают вторую игру

Мы можем использовать фрактальный футбол, делая простые проективные «удары», чтобы осуществить новый вид трансформации. Мы называем эти новые трансформации «фрактальными трансформациями». Они тоже имеют низкий информационный контент. Но они могут трансформировать картинки удивительными способами, весьма отличающимися от проективных трансформаций и трансформаций Мёбиуса.

На рис. 10 две футбольные игры проходят одновременно. Игра слева — такая же, как на рис. 1, которую мы обсуждали в начале этой статьи. Но в игре справа Doug забивает поле в маленький прямоугольник слева вверху, а Brenda забивает в большой прямоугольник справа внизу. Аналогично, Celia бьет по направлению к C, а Alan бьет по направлению к A, но четырехугольники, в которые они бьют, имеют другие размерности, чем в первой игре.

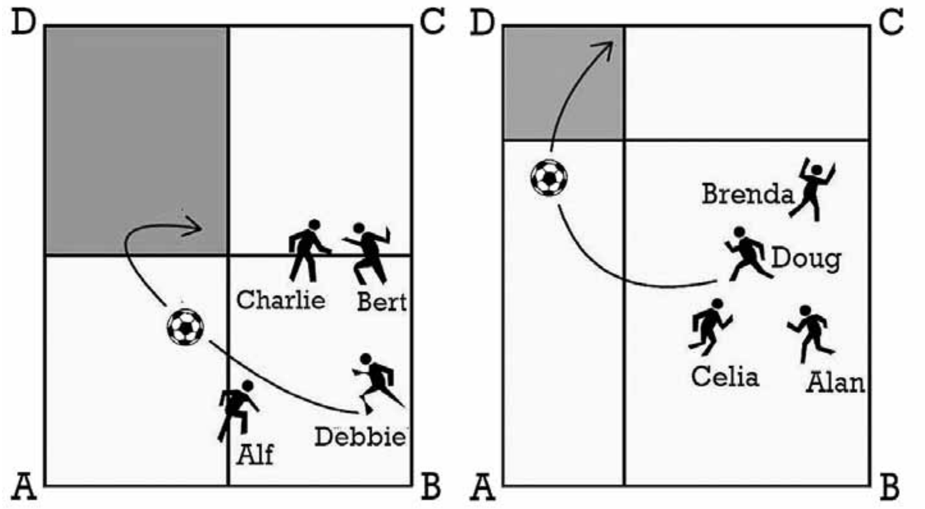


Рис. 10. Alan, Brenda, Celia и Doug начинают вторую игру. Они подражают другим: Doug бьет по мячу, как только это делает Debbie, Alan бьет по мячу, как только это делает Alf, Celia повторяет за Charlie, а Bert копирует Brenda. Они бьют по мячу немного по-разному!

Alan, Brenda, Celia и Doug — подражатели. Они наблюдают за игрой на левом поле. Когда Alf бьет по мячу, Alan бьет по мячу в своей игре; когда Bert бьет по мячу, Brenda тоже бьет по мячу; когда Charlie бьет по мячу, то и Ceila тоже; и когда Debbie бьет, то же самое делает Doug — он пристально наблюдает за ней. Но, конечно, Alf, Bert, Charlie и Debbie остаются на поле слева, в то время как Alan, Brenda, Celia и Doug остаются на своем футбольном поле справа.

Теперь положим картинку на футбольное поле слева — большую красивую картинку. Это — картинка «Было». В качестве примера может служить большая красно-зеленая рыба, нарисованная на левом поле на рис. 11. Пусть теперь снова начнется игра. Тогда после каждой пары ударов, по одному на каждом поле, на правом поле точка, где приземляется мяч, окрашивается в тот же цвет, что и точка на левом поле, в которую попадает мяч на этом поле. Результат после тысяч и тысяч ударов показан на правом поле рис. 11. Это — картинка «Стало». Картинка «Стало» — изумительно деформированная версия картинки «Было», в некоторых местах она сильно растянута и совсем немного в других. Мы называем это фрактальной трансформацией.

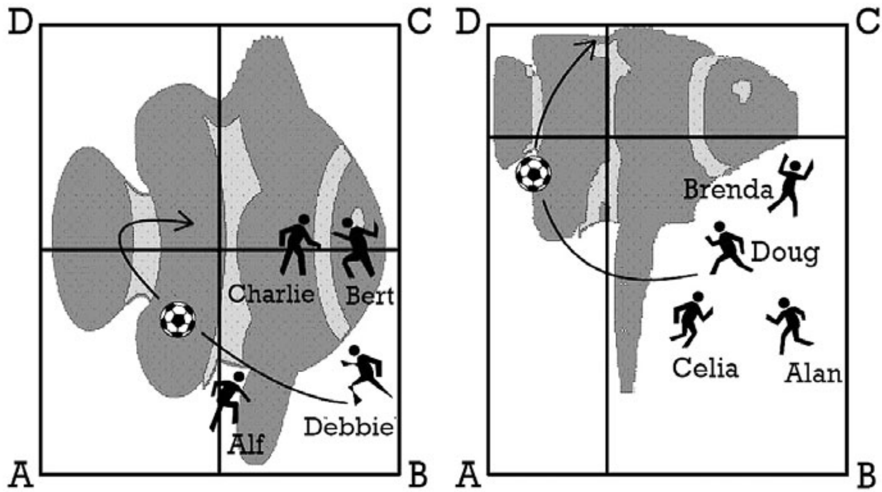


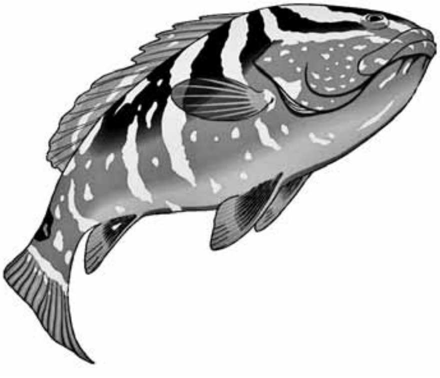
Рис. 11. Рыба, трансформированная двумя футбольными играми

Но трансформация между картинками «Было» и «Стало» по существу не более сложная, чем трансформации, которые были использованы для ее осуществления,— трансформации, представленные игроками. Правда игровые трансформации — гладкие и регулярно повторяющиеся, а фрактальная трансформация является неравномерно распределенной и нерегулярной.

На рис. 12 показана еще более симпатичная рыбка — до того, как она была подвергнута фрактальной трансформации. На рис. 13 эта же рыбка — после трансформации.

Другая пара «до» и «после» показана на рис. 14. Такие эффекты применяются при создании цифрового контента.

На рис. 15 показана пара «до» и «после» с изображением цветов австралийского вереска. Интересно сравнить ее с парой изображений на рис. 5, которые соотносятся друг с другом посредством проективной трансформации, сохраняющей окружности. В случае трансформаций на рис. 15 изображения связаны фрактальной трансформацией, сохраняющей прямоугольники (сохраняется прямоугольная рамка изображения). При проективной трансформации точки, которые лежат на одной прямой, отобража-



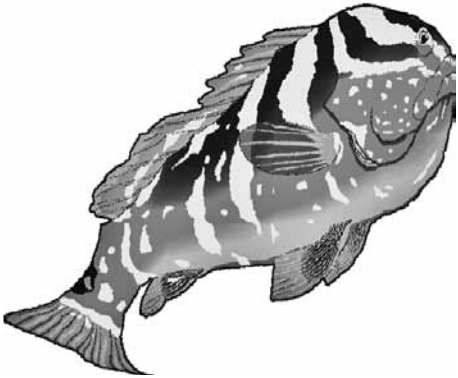


Рис. 12. «До»

Рис. 13. «После»

Рис. 14. Эти два изображения листьев и неба соотносятся друг с другом посредством фрактальной трансформации

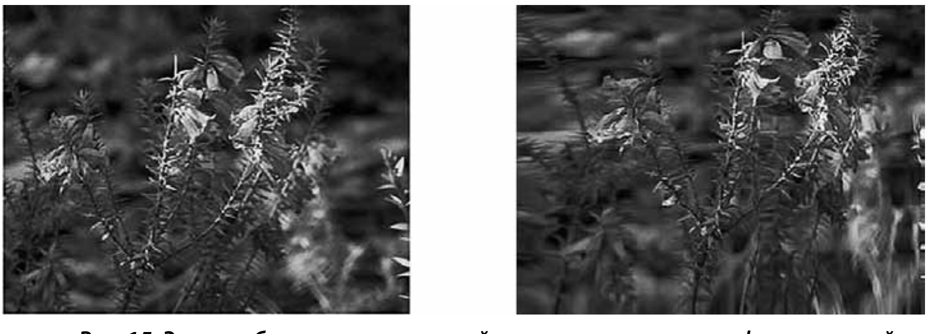


Рис. 15. Эти изображения австралийского вереска связаны фрактальной трансформацией, сохраняющей прямоугольники. Сравните с рис. 5

ются на точки, лежащие на одной прямой. В продемонстрированных фрактальных трансформациях сохраняются точки, лежащие на прямых, параллельных рамкам изображения.

3.2. Украденный цвет

В принципе тот же алгоритм, что и описанный в предыдущем разделе, может применяться для преобразования богатой цветовой гаммы в различные СИФ-фракталы. Ниже показано, как папоротник раскрашивается по этому новому алгоритму (см. рис. 16 и цветную вкладку). Главное отличие состоит в том, что на правом участке используется СИФ, которая создает фрактальный папоротник.

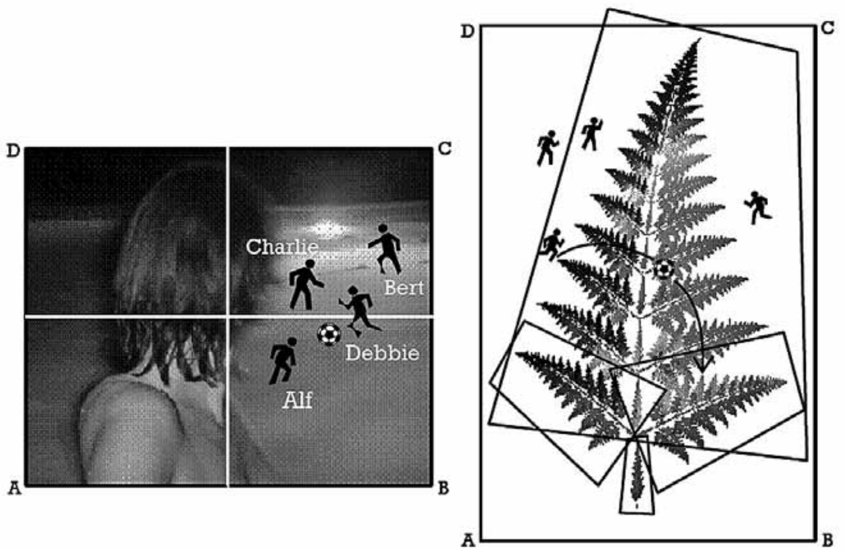


Рис. 16. Слева на футбольном поле с нанесенным на него цветным фото Alf, Bert, Charlie и Debbie играют в стохастический футбол. Игроки на правом поле — Alan, Brenda, Celia и Doug. Они забивают мяч в четырехугольники, как на рис. 3. Alan бьет по мячу, когда это делает Alf, Brenda бьет, когда это делает Bert, и т. д. Каждый раз, после того, как ударили по обоим мячам, место, где мяч приземляется на правом поле, отмечается точкой того же цвета, что и точка, где мяч приземлился на левом поле. В результате получается раскрашенный фрактальный папоротник

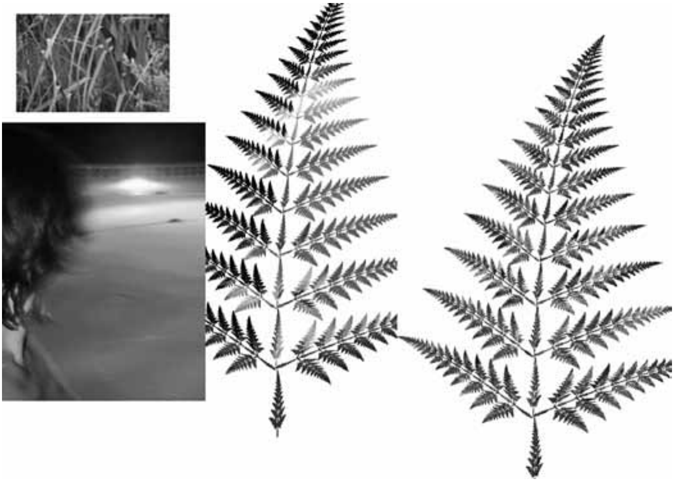


Рис. 17. Один и тот же папоротник отображен с использованием двух разных исходных изображений, части которых показаны слева

На рис. 17 и цветной вкладке сопоставлены две копии одного и того же папоротника, окрашенного с помощью фрактальной трансформации двух разных картинок, которые показаны слева. Обратите внимание, что нет необходимости в определенном соотношении между размером картинки, с которой «украден» цвет, и изображением объекта, в данном случае — папоротника, который раскрашивается в «украденные» цвета.

4. КОММЕНТАРИИ, ПРЕДЫСТОРИЯ, БИБЛИОГРАФИЯ

Идеи фрактальных трансформаций и захвата цвета с использованием стохастической итерации, что составляет главное содержание этой статьи, насколько нам известно, являются совершенно новыми и представлены здесь впервые. Что в действительности происходит в обоих случаях — это то, что отображение помещается между двумя СИФ-аттракторами с использованием соответствующего кодового пространства, которое одинаково для обеих СИФ. Это значит, что фрактальная трансформация между двумя «едва соприкасающимися» СИФ-аттракторами практически непрерывна, что объясняет, почему окраска папоротника, например, достаточно однородна и не изменяется слишком резко от одного листа к другому.

Стохастическая игра в футбол — это новый способ представления геометрических трансформаций, алгоритма стохастических итераций и СИФ-теории. Нашей целью было минимизировать использование формул и полагаться на геометрическую интуицию и нематематическое словесное описание. Алгоритм стохастических итераций впервые был описан формально, в контексте фрактальных изображений, в нашей работе 1985 года[1], хотя зерна этой идеи содержатся в ранней работе Мандельброта[2]. Этот алгоритм также известен как «Игра в Хаос», но мы думаем, что он привлечет внимание более широкой аудитории, если его объяснять в терминах игры в футбол.

Математическая теория системы итерируемых функций (СИФ) была первоначально сформулирована Джоном Хатчинсоном (John Hutchinson)[3]. Она была популяризирована и разработана далее нами и другими исследователями[4]. Узнать о приложении СИФ к моделированию изображений, как создать фрактальные папоротники и листья и о соответствующих кодовых пространствах можно из книги «Fractals Everywhere»[5]. Применение СИФ в сжатии изображений также описано в ряде других работ[6]. Есть прекрасная книга о фракталах, полученных с помощью трансформаций Мёбиуса[7].

О еще одном захватывающем открытии можно прочесть в книге «A New Random Iteration Algorithm»[8], а также в книге «Superfractals»[9].

---

1 M. F. Barnsley and S. Demko. Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 399 (1985), pp. 243—275.

2 B. B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1983. P. 198.

3 J. E. Hutchinson. Fractals and Self-Similarity, Indiana. Univ. Math. J., 30 (1981), pp. 713—749.

4 K. Falconer. Fractal Geometry — Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, England, 1990; H. O. Peigen and D. Saupe. The Science of Fractal Images, Springer-Verlag, New York, 1988.

5 M. F. Barnsley. Fractals Everywhere, Academic Press, New York, NY, 1988.

6 M. F. Barnsley and L. P. Hurd. Fractal Image Compression, AK Peters, Boston, MA, 1993; N. Lu. Fractal Imaging, Academic Press, San Diego, 1997.

7 D. Mumford, C. Series and David Wright. Indra's Pearls, Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 2002.

8 M. F. Barnsley, J. E. Hutchinson and Ö. Stenflo. A New Random Iteration Algorithm and a Hierarchy of Fractals, Preprint, Australian National University, 2003.

9 Barnsley M. F. Superfractals. Patterns of Nature. NY, Cambridge University Press, 2006.

Бенуа Мандельброт

ФРАКТАЛЫ И ИСКУССТВО ВО ИМЯ НАУКИ

Новая форма искусства переопределяет границы между «изобретением» и «открытием», как они понимаются в науках, и «творчеством», как оно понимается в пластических искусствах. Может ли чистая геометрия восприниматься «человеком с улицы» как нечто прекрасное? Или более конкретно, может ли форма, которая задается простым уравнением или правилом построения, восприниматься людьми, далекими от геометрии, как эстетически ценная — то есть, по крайней мере, как удивительно декоративная — или даже как произведение искусства? Если геометрическая форма — фрактал, то ответ — да. Привлекательны даже «сырые» фракталы. Они применимы для «рисования с помощью чисел» и удивительно эффектны даже в руках дилетанта. А эстетическое чутье настоящего художника находит в них новое и привлекательное средство выразительности.

Художника и ремесленника часто сложно отличить друг от друга. Например, предметы, которые в принципе задумывались как утилитарные — народная ли это архитектура, религиозные образы или рисунки и фотографии цветов, птиц или водоворотов, — в конечном итоге, часто рассматриваются как подлинные произведения искусства. Порой становится сложно отличить их от произведений, в которых наука использовалась всего лишь как предлог для художественного творчества. Так, мы сталкиваемся с искусством в широком диапазоне. Нам представляют бесчисленные произведения искусства, созданные в коммерческих целях:

предметы выпускаются с непременным условием быть полезными — украшать, обучать, льстить, развлекать, впечатлять или убеждать. Нам также представляют некоторые произведения, созданные исключительно как искусство ради искусства. И мы также знаем много вариантов, которые расположены, так сказать, где-то «между». Имеет ли математика какое-либо отношение к этим знакомым нам формам пластического искусства? Классические геометрические формы славятся своей концептуальной красотой, но они, очевидно, живут преимущественно в воображении искусных мастеров. Хотя популярная поэтесса Эдна Сэнт-Винсент Миллэй[1] провозгласила, что «Евклид вглядывался в обнаженную красоту», и хотя евклидова геометрия была в центре внимания художников итальянского Возрождения в течение того короткого периода, когда «изобреталась» перспектива, с точки зрения людей, неискушенных в математике, красота евклидовой геометрии проста и суха до неприличия. Как минимум, ей не хватает размаха и визуального разнообразия по сравнению с их избытком как в природе, так и в изящных искусствах, которые любому человеку так и хочется назвать «барочными» или «органическими».

Сегодня, однако, существует не только одна геометрия Евклида. В 1970-х годах мне выпала привилегия сформулировать и развить идею фрактальной геометрии[2], комплекс мыслей, формул и картин, который можно назвать или новой геометрией природы, или новым геометрическим языком. И причина, почему это заслуживает обсуждения, заключается в том, что я обнаружил, что удивительнейшим образом и без какого-либо

1 Edna St. Vincent Millay (1892—1950) — знаменитая американская поэтесса и драматург, первая женщина, получившая Пулитцеровскую премию по поэзии (прим. переводчика).

2 Первые три книги по фракталам: B. B. Mandelbrot. Les objets fractals (Paris: Flammarion, 1975,1984, 1989); B. B. Mandelbrot. Fractals: Form, Chance and Dimension (San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1977); B. B. Mandelbrot. The Fractal Geometry of Nature (New York: W. H. Freeman and Company, 1982). Среди более поздних работ я рекомендую: H. -O. Peitgen and P. H. Richter. The Beauty of Fractals, New York: Springer (1986) и H. -O. Peitgen and D. Saupe, eds. The Science of Fractal Images, New York: Springer (1988), которые обладают более высоким качеством графики, чем мои книги, правда, более узким ракурсом. Следующая работа приводится здесь из-за журнала, в котором она появилась, и потому, что это мое самое первое рассуждение на тему фракталов и эстетики: B. B. Mandelbrot. "Scalebound or Scaling Shapes: A Useful Distinction in the Visual Arts and the Natural Sciences", Leonardo, 14, No. 1, 45—47 (1981). В качестве комментария к настоящей статье может рассматриваться работа: F. K. Musgrave and B. B. Mandelbrot. "Natura ex Machina," IEF. Computer Graphics and Applications, 9, No. 1, 4—7 (1989).

«подталкивания» этот новый геометрический язык[3] породил новую форму искусства. Я предполагаю сделать здесь несколько комментариев на это счет. Многие читатели, должно быть, знакомы с фрактальным искусством, и выпуск журнала, в котором выходит эта статья, содержит также некоторые новые примеры с выставки SIGGRAPH[4] 1989 года; тем не менее, от читателя не требуется глубоких знаний по этому предмету. Большая часть фрактального искусства не создавалась для каких бы то ни было коммерческих целей, хотя все самые первые работы были сделаны в компании IBM. И совсем не обязательно они несли на себе отпечаток эстетического чувства. Поэтому мы будем доказывать, что фрактальная геометрия создала новую категорию искусства, следующую после искусства ради искусства и искусства ради коммерции: искусство во имя науки (и математики).

Фрактальное искусство во имя науки неразрывно связано с использованием компьютеров. Оно не могло возникнуть раньше, чем появилось соответствующее оборудование и было разработано программное обеспечение; то есть раньше семидесятых годов. Какая глубокая ирония заключается в том, что эта новая геометрия, которую все непроизвольно описывают как «барочную» и «органическую», обязана своим рождением новому — неожиданному, но принципиальному — сочетанию двух символов нечеловеческого, формализованного и технического, а именно математики и компьютера.

Прежде чем детально описывать особенности фрактальной геометрии, будет полезно, ради контраста, обсудить примеры подобных сочетаний, которые возникли в таких областях, как изучение водоворотов и завихрений. В этих случаях входные данные в тер-

3 Из приблизительно 40 книг, которые к настоящему моменту написаны по фракталам, почти все предназначены для математиков и/или физиков. Единственные книги, написанные на английском языке для широкой аудитории: B. B. Mandelbrot. «The Fractal Geometry of Nature» и указанные выше книги Х.-О. Пайтгена.
Затруднение и извинение. Было бы неплохо рекомендовать работы, с которыми я менее тесно связан, но это было бы очень трудно. Каждое цитирование доставляет радость одному человеку и неудовольствие многим. Время, когда мои ближайшие коллеги были единственными людьми, увлеченными фракталами, давно прошло, а писать подробный обзор не является задачей, которая приносит мне удовольствие.

4 SIGGRAPH (Special Interest Group on Graphics and Interactive Techniques) — ежегодная международная конференция по вопросам компьютерной графики, которую с 1974 года проводит «Специальная группа по графическим и интерактивным методам» профессионального сообщества «Association for Computing Machinery (ACM)» (прим. переводчика).

минах логического обоснования и программирования являются чрезвычайно сложными, возможно более сложными, чем информация на выходе. В действительности можно утверждать, что в целом сложность не возрастает, но изменяется от чисто концептуальной — к частично визуальной; изменение, которое важно с практической точки зрения и интересно по своей сути. Фрактальная геометрия, однако, дает нам что-то совершенно иное. Во фрактальной геометрии обычно входные данные настолько просты, что выглядят совершенно бесхитростно. Результат на выходе, наоборот, может быть зрелищно сложным. К тому же, поскольку наличие художественного чутья не является необходимым, такое искусство получает широкое признание. Поспешим поднять такой вопрос: если входные данные такие простые, почему фрактальное искусство не смогло появиться раньше и в более традиционных методах? Ответ заключается в ситуации «Уловка-22»[5]. Нарисовать вручную простейшую фрактальную картину в принципе осуществимо, но это потребовало бы много человеко-лет и было бы безумно дорогим мероприятием. Вследствие этого никто не рассматривал идею приняться за эту задачу, не имея заранее точного знания о том, каков будет результат; при том, что результат невозможно даже приблизительно представить, пока задача не будет выполнена в реальности. И надежный способ отбить желание когда-либо взяться за это — начать с любого из различных определений фракталов. Вот одно неформальное определение, которое я часто использую:

Фракталы — это геометрические формы, которые в равной степени сложны в своих деталях, как и в своей общей форме. То есть, если часть фрактала будет увеличена до размера целого, она будет выглядеть как целое, или в точности, или, возможно, лишь с небольшой деформацией.

Разве мы не находимся прямо в центре сухих геометрических правил? Художник не мог ожидать ничего от фракталов, определенных таким образом, поэтому никто и не пытался рисовать их со всей тщательностью. Те немногие старые фракталы, которые были известны под разными именами (и изображались уже, по крайней мере, столетие), также наименее интересны с эстетической точки зрения, потому что одного беглого взгляда достаточно, чтобы увидеть, что все в них, конечно, выполнено вручную; а они

5 Уловка-22 (Catch-22) — роман американского писателя Джозефа Хеллера. В широком контексте — заколдованный круг, непреодолимая проблема, решения которой невозможно добиться из-за противоречий начальных условий (прим. переводчика).