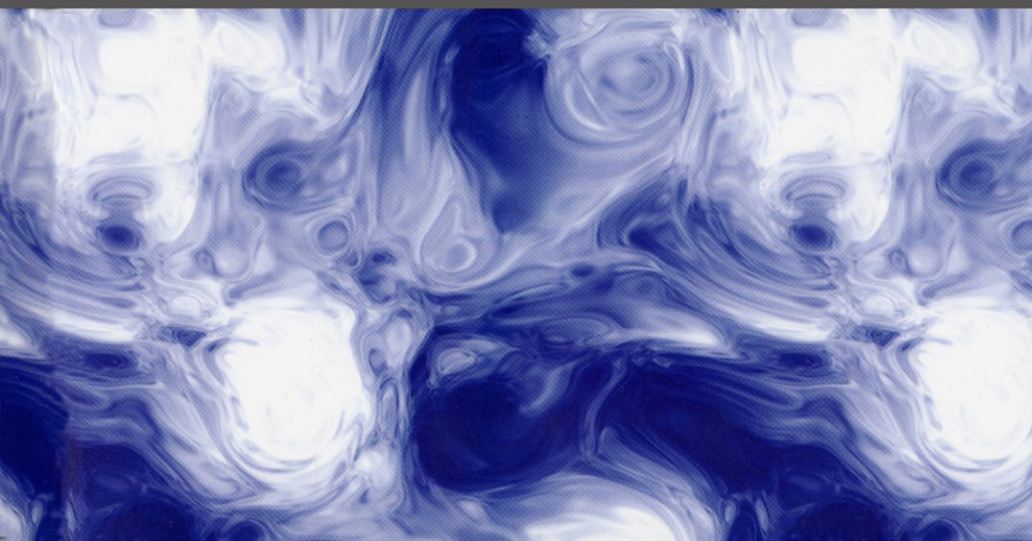


Деменок С. Л.

ТЕПЛООБМЕН И ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ



ОСНОВЫ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ

УДК 536.2+532.5
ББК 31.31+39.71-022

Рецензенты:

Кафедра теплофизических основ судовой энергетики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета (зав. кафедрой, доктор технических наук, профессор А. Н. Дядик).

Д30 Деменок С. Л.

Теплообмен и гидравлическое сопротивление в трубах и каналах: монография. – Н-Пром Бюро, СПб.: , 2012. – 304 с.

ISBN 978-586983-099-9

В монографии рассмотрены вопросы, связанные с выводом основных соотношений, определяющих численные значения характеристик гидродинамики и теплообмена в трубах и каналах. Особое внимание уделено вопросам теоретического рассмотрения характеристик потока вблизи ограничивающих его стенок. Приведены представительные данные по исследованию теплообмена и трения при турбулентном течении в трубах и каналах.

Предназначена для специалистов-теплотехников, занимающихся решением теоретических и прикладных задач по тепло- и массообмену.

Ил. 22. Табл. 12. Библиогр.: 312 назв.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ «Источник энергии будущего – энергия экономии»	5
ВВЕДЕНИЕ	15
ГЛАВА I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА	
1.1. Основные положения расчёта конвективного теплообмена	20
1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса	25
ГЛАВА II. ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ	
2.1. Общие положения теории размерностей	40
2.2. Фрактальная размерность	46
2.3. Методы анализа размерностей	54
ГЛАВА III. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ	
3.1. Общие положения теории подобия	64
3.2. Теоремы теории подобия	68
3.3. Анализ на автомодельность	71
ГЛАВА IV. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ	
4.1. Модель потенциального течения вязкой жидкости	73
4.2. Модель пограничного слоя с исчезающей вязкостью	92
4.3. Модель вихревого слоя с исчезающей скоростью деформации	96
4.4. Модель фрактальных когерентных структур в пристенном слое	124
ГЛАВА V. СТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ	
5.1. Полуэмпирические модели турбулентности	134
5.2. Профиль скорости и гидравлическое сопротивление в трубах и каналах	139
5.3. Распределение турбулентной кинематической вязкости по радиусу трубы	144
5.4. Распределение температуры по радиусу трубы: аналогия Рейнольдса	151

5.5. Структура турбулентности в вязком подслое	160
5.6. Адиабатический взрыв турбулентности	167
ГЛАВА VI. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ ПО ТЕПЛООБМЕНУ И ТРЕНИЮ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ	
6.1. Учет влияния температурного напора на теплоотдачу	178
6.2. Сопротивление в трубах высокотемпературных теплообменников	185
6.3. Влияние температурного фактора на теплоотдачу в щелевых каналах	188
6.4. Гидравлическое сопротивление в щелевых каналах	190
6.5. Теплообмен и трение при турбулентном течении газов с переменными физическими свойствами.	193
Заключение	209
Приложение 1	218
Приложение 2	238
Примечания	251

ГЛАВА I.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА

1.1. Основные положения расчета конвективного теплообмена

В основе определения структуры формул для расчета теплообмена при движении теплоносителя в трубах и каналах лежит характер течения, который, в свою очередь, определяется величиной безразмерного комплекса – числа Рейнольдса:

$$\text{Re} = \frac{w_0 d_r}{\nu}, \quad (1.1.1)$$

где w_0 – средняя по сечению потока скорость жидкости, м/с; $d_r = 4S/\Pi$ – гидравлический диаметр, м; S – площадь проходного сечения, м²; Π – смоченный периметр, м; ν – коэффициент кинематической вязкости, м²/с.

Принято различать три режима течения:

$\text{Re} < 2 \cdot 10^3$ – ламинарное течение (жидкость движется спокойно, без пульсаций);

$2 \cdot 10^3 < \text{Re} < 10^4$ – переходная область;

$\text{Re} > 10^4$ – турбулентное течение (в этом потоке непрерывно происходит перемешивание всех слоев жидкости; каждый элементарный объем турбулентного потока, перемещаясь вдоль канала с некоторой скоростью, одновременно совершает пульсационные движения перпендикулярно стенке канала).

При турбулентном течении жидкости в трубе вблизи стенки имеет место ламинарный подслой – вязкая область, в которой турбулентный перенос сравнительно мал (рис. 1.1.1).

Допустимо приближенно рассматривать наиболее простую двухслойную модель турбулентного потока жидкости в трубе:

– вязкий подслой, в котором, приближенно, турбулентный перенос отсутствует;

1.1. Основные положения расчёта конвективного теплообмена

– турбулентное ядро потока, где молекулярный перенос импульса и теплоты пренебрежимо мал по сравнению с турбулентным переносом этих величин.

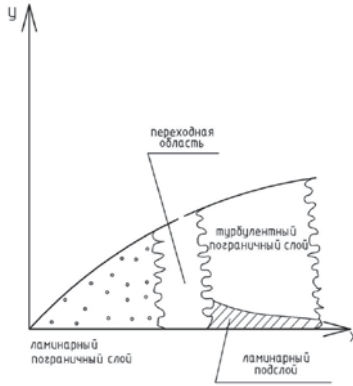


Рис. 1.1.1. Структура пограничного слоя

При ламинарном течении слои жидкости, движущиеся параллельно оси трубы, имеют различные скорости (рис. 1.1.2), и, вследствие хаотического теплового движения молекул жидкости, между ее слоями с различными скоростями возникает внутреннее трение (закон Ньютона):

$$\tau = \mu \frac{dw}{dy}, \quad (1.1.2)$$

где τ – касательное напряжение; w – линейная скорость слоя жидкости; y – расстояние по нормали от внутренней стенки трубы; μ – коэффициент динамической вязкости.

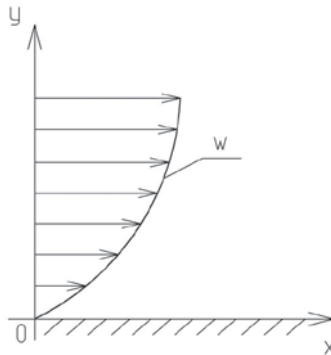


Рис. 1.1.2. Распределение скоростей слоев жидкости

Закон Фурье для плотности теплового потока в теплоносителе выражается формулой:

$$q = -\lambda \frac{dt}{dy}, \quad (1.1.3)$$

где q – плотность теплового потока; λ – коэффициент теплопроводности жидкости; t – температура жидкости; y – расстояние по нормали от внутренней стенки трубы.

Распределение плотности теплового потока по радиусу трубы, так же, как и касательных напряжений, справедливы для любого режима течения теплоносителя и имеют следующий вид:

$$q = q_{ct} \xi, \quad (1.1.4)$$

$$\tau = \tau_{ct} \xi, \quad (1.1.5)$$

где $\xi = r/R$; r – текущий радиус круглого поперечного сечения; R – внутренний радиус трубы.

В случае ламинарного течения жидкости распределение по радиусу трубы скорости теплоносителя w и энтальпии i описываются следующим образом:

$$w = w_{\max} (1 - \xi^2); \quad w_{\max} = \frac{R \tau_{ct}}{2\mu}; \quad (1.1.6)$$

$$i = i_{ct} - \frac{b}{2} (1 - \xi^2); \quad (1.1.7)$$

$$b = \frac{q_{ct} c_p R}{\lambda}, \quad (1.1.8)$$

где c_p – изобарная теплоемкость.

Средние по площади круглого поперечного сечения трубы значения скорости w_0 и энтальпии i_0 , знание которых необходимо далее при выводе коэффициентов трения и теплоотдачи, равны¹:

$$w_0 = \frac{w_{\max}}{2}, \quad (1.1.9)$$

$$i_0 = i_{ct} - \frac{b}{4}. \quad (1.1.10)$$

При этом $w = w_0$ и $i = i_0$ при координате $\xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

С помощью полученных формул был найден коэффициент трения ζ при ламинарном течении теплоносителя:

1.1. Основные положения расчёта конвективного теплообмена

$$\zeta = \frac{64}{\text{Re}} \quad (1.1.11)$$

и определена структура безразмерного коэффициента теплоотдачи при турбулентном течении теплоносителя:

$$\text{St} = \frac{\alpha}{\rho w_0 c_p} = \frac{q_{\text{ст}}}{\rho w_0 (i_{\text{ст}} - i_0)} = \frac{\zeta/8}{1 + (\text{Pr} - 1) \frac{w_1}{w_0}}, \quad (1.1.12)$$

где $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ – критерий Прандтля; α – коэффициент теплоотдачи;

ρ – плотность теплоносителя; λ – коэффициент теплопроводности жидкости; μ – коэффициент динамической вязкости; w_1 – значение скорости на границе вязкого подслоя и турбулентного ядра потока.

Для дальнейшего вывода расчетной формулы требуется универсальный профиль скоростей, который описывается выражением²:

$$\varphi = \frac{1}{\kappa} \ln \eta + C, \quad (1.1.13)$$

где κ – константа турбулентности (постоянная Прандтля–Кармана).

Используя универсальный профиль скоростей, можно получить уравнение для определения коэффициента трения при турбулентном течении теплоносителя в трубах круглого поперечного сечения – уравнение Прандтля:

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} = 0,88 \ln(\text{Re} \sqrt{\zeta}) - 0,91. \quad (1.1.14)$$

Приближенные решения уравнения (1.1.14), полученные впервые Блазиусом (1911 г.) и К.Г. Филоненко (1957 г.), соответственно, имеют вид:

$$\zeta = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}; \quad 4 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^5; \quad (1.1.15)$$

$$\zeta = \left(\frac{0,55}{\lg \frac{\text{Re}}{8}} \right)^2; \quad 4 \cdot 10^3 \leq \text{Re} \leq 10^{12}, \quad (1.1.16)$$

Благодаря экспериментальным измерениям Никурадзе и других исследователей удалось найти границу между ламинарной и турбулентной областями потока (рис. 1.1.3) и получить зависимости:

$$St = \frac{\zeta/8}{1 + \eta_1(\text{Pr}-1)\sqrt{\zeta/8}}, \quad (1.1.17)$$

$$Nu = \frac{\frac{\zeta}{8} \text{Re Pr}}{1 + \eta_1(\text{Pr}-1)\sqrt{\zeta/8}}. \quad (1.1.18)$$

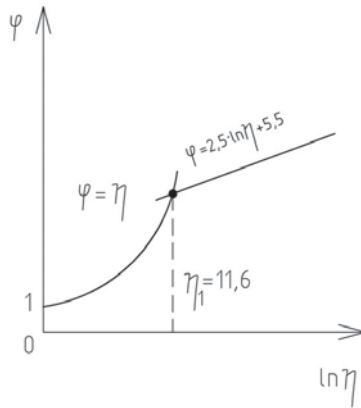


Рис. 1.1.3. Универсальный профиль скоростей

Сводка критериальных уравнений для расчета теплообмена и трения при течении теплоносителя в трубах и каналах приведена в Приложении 1.

Уравнения баланса энергии, сохранения количества движения и неразрывности в наиболее общем виде приведены в Приложении 2. Сложность этих уравнений даже в приближении двухмерного течения в пристенном слое затрудняет их использование в практической деятельности инженеров-теплотехников. Отчасти эту сложность можно преодолеть с помощью специализированных программ подобных расчетным модулям HTRI, но в большинстве практических задач магистральное направление оптимизации тепломассопереноса может быть найдено на основе более простых в применении отношений, полученных на основе теорий подобия и размерности.

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

Как уже говорилось выше, параллельно-струйчатое, или ламинарное, течение наблюдается до определенной зоны чисел Рейнольдса ($Re < 2 \cdot 10^3$). В этом случае жидкость течет спокойно, без пульсаций. Малые элементы среды следуют по вполне определенным плавным траекториям, все время сохраняя движение в направлении вектора средней скорости потока, а возникающие в потоке случайные нерегулярности не развиваются, а гаснут.

Рассмотрим установившееся прямолинейное, симметричное, изотермическое ламинарное течение, уравнение движения которого в цилиндрических координатах имеет вид:

$$-\frac{dp}{dx} + \mu \left(\frac{d^2 \omega}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\omega}{dR} \right) = 0 \quad (1.2.1)$$

или

$$\frac{d}{dR} \left(2\pi R \mu \frac{d\omega}{dR} \right) = 2\pi R \frac{dp}{dx}, \quad (1.2.2)$$

где p – давление; ω – скорость течения; μ – коэффициент динамической вязкости.

Левая часть этого уравнения представляет собой изменение по радиусу касательных напряжений в симметричном цилиндрическом ламинарном потоке, а правая – силы давления, действующие на столб жидкости единичной длины с сечением πR^2 .

Интегрируя это уравнение и принимая во внимание условия

$$R = 0, d\omega/dR = 0; R = R_0, \omega = 0, \quad (1.2.3)$$

был получен³ параболический закон распределения скоростей:

$$\omega = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R_0^2 - R^2), \quad (1.2.4)$$

где R_0 – внутренний радиус трубы. Средняя расходная скорость:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^{R_0} 2\pi R \omega dR = -\frac{R_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (1.2.5)$$

Совмещая (1.2.4) и (1.2.5), находим:

$$\omega = 2\bar{\omega} \left[1 - (R/R_0)^2 \right] \quad (1.2.6)$$

Таким образом, при ламинарном течении скорость на оси трубы в два раза больше средней скорости. В гидравлических расчетах падение давления на единицу длины изотермического потока выражается формулой Дарси:

$$-dp/dx = \zeta \rho \bar{\omega}^2 / 2D, \quad (1.2.7)$$

где $D = 2R_0$.

Подставляя сюда значение $\bar{\omega}$ из уравнения (1.2.5), находим, что при ламинарном течении в круглой трубе справедлива формула (1.1.11).

Рассмотренные закономерности впервые были установлены в работах Гагена и Пуазейля. Для каналов некруглого сечения зависимость $\zeta(Re)$ имеет тот же характер, но меняется численное значение множителя пропорциональности (табл. 1.2.1).

Таблица 1.2.1

Значение ζRe при ламинарном течении в каналах различного поперечного сечения

Форма поперечного сечения	h/b	D_0	ζRe
Круг ($h=b=D$)	1	D	64
Эллипс	0,7	$1,17h$	65
(b – большая ось;	0,5	$1,30h$	68
h – малая ось)	0,3	$1,44h$	73
	0,2	$1,50h$	76
	0,1	$1,55h$	78
	0	$2h$	96
Прямоугольник	0,1	$1,82h$	85
(b – большая сторона;	0,2	$1,67h$	76
h – меньшая сторона)	0,25	$1,60h$	73
	0,333	$1,50h$	69
	0,5	$1,33h$	62
Квадрат (h – длина стороны)	1	h	57
Равносторонний треугольник			
(h – длина стороны)	1	$0,58h$	53
Круглое кольцо		$2h$	96
(h – ширина кольца)			

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

Далее запишем уравнение теплопереноса в цилиндрических координатах:

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = c\rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega_R \frac{\partial T}{\partial R} + \omega_x \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1.2.8)$$

положив в нем для установившегося осесимметричного прямолинейного ламинарного потока $\partial T / \partial t = 0$, $\omega_R = 0$ и подставив значение ω из уравнения (1.2.6), получим:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial T}{\partial R} = \frac{2\bar{\omega}}{a} \left[1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right] \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1.2.9)$$

где $\alpha = \lambda / (c\rho)$.

Введем следующие безразмерные координаты, полагая температуру стенки трубы постоянной:

$$\theta = (T_{CT} - T) / (T_{CT} - T_1); \quad \xi = R / R_0; \quad X = x / R_0. \quad (1.2.10)$$

где T_1 – температура жидкости при входе в трубу.

Уравнение (1.2.9) примет вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \text{Pe}(1 - \xi^2) \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2}, \quad (1.2.11)$$

где $\text{Pe} = \bar{\omega} D / a$ – критерий Пекле.

Расчеты показывают, что уже при $\text{Pe} > 10$ величину $\partial^2 \theta / \partial X^2$ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с первым членом правой части уравнения (1.2.11), т. е. полагать, что:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \text{Pe}(1 - \xi^2) \frac{\partial \theta}{\partial X}. \quad (1.2.12)$$

Как при нагревании, так и при охлаждении жидкости безразмерная температура θ убывает вдоль течения. В связи с этим разыскиваем частное решение уравнения (1.2.12) в виде произведения двух функций.

Полагая

$$\theta = \psi(\xi) \exp(-\beta^2 X / \text{Pe}). \quad (1.2.13)$$

и дифференцируя, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial X} &= -\frac{\beta^2}{\text{Pe}} \psi(\xi) \exp\left(-\beta^2 \frac{X}{\text{Pe}}\right); \\ \frac{\partial \theta}{\partial \xi} &= \frac{d\psi(\xi)}{d(\xi)} \exp\left(-\beta^2 \frac{X}{\text{Pe}}\right); \\ \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= \frac{d^2 \psi(\xi)}{d\xi^2} \exp\left(-\beta^2 \frac{X}{\text{Pe}}\right). \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Подставляя эти значения производных в уравнение (1.2.13) после сокращения на $\exp(-\beta^2 X / \text{Pe})$ приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\psi}{d\xi} + \beta^2 (1 - \xi^2) \psi = 0, \quad (1.2.15)$$

общее решение которого имеет вид ($1 \leq i \leq \infty$) :

$$\theta = \sum \psi_i(\xi) \exp(-\beta_i^2 X / \text{Pe}). \quad (1.2.16)$$

Краевые условия:

$$\xi = 1; \quad \theta = 0; \quad \psi(1) = 0; \quad (1.2.17)$$

$$X = 0; \quad \theta = 1; \quad \sum_{i=1}^{i=\infty} \psi_i(\xi) = 1.$$

По вычислениям Нуссельта:

$$\psi_i(\xi) = A_i \chi_i(\xi). \quad (1.2.18)$$

Коэффициенты A_i и β_i приведены в табл. 1.2.2, а функция χ_i изображена на рис. 1.2.1.

Таблица 1.2.2

Значения коэффициентов A_i и β_i

i	1	2	3
β_i	2,705	6,66	10,3
A_i	+1,477	-0,810	+0,385

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

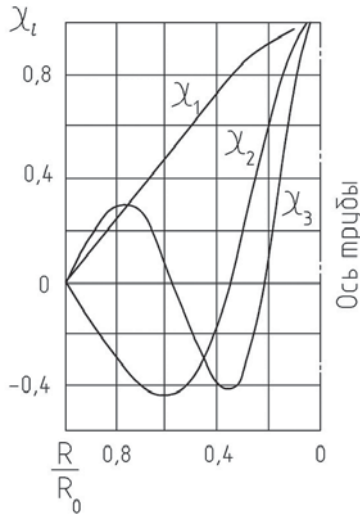


Рис. 1.2.1. Функция χ_i в формуле (1.2.18)

Средняя по сечению трубы температура определяется формулой:

$$\bar{T}_x = \frac{2}{\omega R_0^2} \int_0^{R_0} \omega T R dR. \quad (1.2.19)$$

Далее было получено:

$$\begin{aligned} \theta_x = & 0,819 \exp(-14,62ax / \omega D^2) + 0,0976 \exp(-88,2ax / \omega D^2) + \\ & + 0,0189 \exp(-212ax / \omega D^2) + \dots \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Дифференцируя последнее уравнение, находим:

$$\begin{aligned} -(\partial\theta / \partial\xi)_{\xi=1} = & 1,498 \exp(-14,62ax / \omega D^2) + 1,114 \exp(-88,2ax / \omega D^2) + \\ & + 0,503 \exp(-212ax / \omega D^2) + \dots \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Граничное условие на стенке трубы имеет вид:

$$\alpha_x (T_{CT} - \bar{T}_x) = -\lambda (\partial T / \partial y)_{CT}, \quad (1.2.22)$$

принимая во внимание, что $y = R_0 - R$, можем записать:

$$\alpha_x (T_{CT} - \overline{T_x}) = \lambda (\partial T / \partial R)_{R_0}. \quad (1.2.23)$$

Из выведенных формул видно, что теплоотдача при ламинарном течении жидкости в трубе определяется комплексом $\alpha x / \omega D^2$. На рис. 1.2.2 изображено изменение критерия Нуссельта для нескольких типов каналов:

$$Nu_x = D \alpha_x / \lambda.$$

Для круглой трубы предельное (наименьшее) значение критерия Нуссельта равно 3,66.

Повышенное значение коэффициента теплоотдачи во входном участке объясняется тем, что температурное поле формируется постепенно на некотором расстоянии от места начала обогрева. При этом градиент температуры вблизи стенки меняется от бесконечности в начальном сечении, где теоретически температура по всему сечению постоянна и на стенке имеет место скачок температуры от T_{CT} до T_1 , до значения, соответствующего уже стабилизированному температурному полю.

При задании условия постоянства плотности теплового потока на стенке трубы ($q = const$) значения среднего коэффициента теплоотдачи оказываются несколько более высокими, чем при условии $T_{CT} = const$. Стабилизированное значение числа Nu при $q = const$ для круглой трубы равно 4,36.

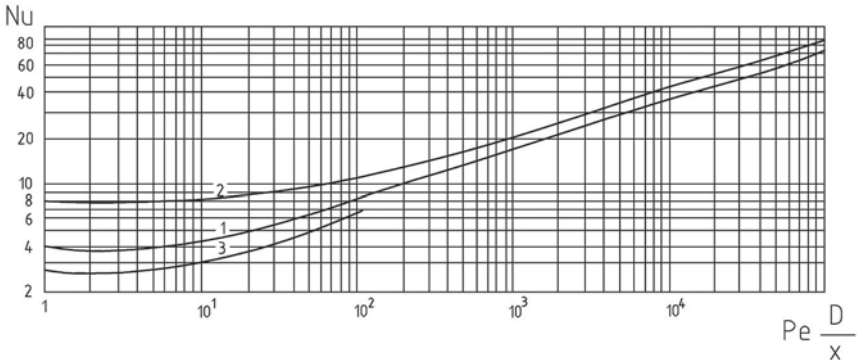


Рис. 1.2.2. Зависимость критерия Nu от комплекса PeD/x при ламинарном течении (α отнесено к среднелогарифмической разности температур):

1 – круглая труба; 2 – плоская щель; 3 – равносторонний треугольник

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

Решения, изображенные на рис. 1.2.2, могут быть аппроксимированы с достаточной для практических целей точностью двумя линиями: а) при значениях определяющего комплекса PeD/L , меньших некоторого числа (табл. 1.2.3) $Nu = const$; б) при других значениях этого комплекса $Nu \sim (PeD/L)^{1/3}$.

Для расчета теплоотдачи при ламинарном течении жидкости (без учета свободной конвекции) в каналах сложной геометрии с постоянной температурой стенки могут быть использованы формулы, приведенные в табл. 1.2.3.

Таблица 1.2.3

Формулы для расчета теплопередачи при ламинарном течении в каналах с различной формой сечения

Профиль канала	Эквивалентный диаметр	Область чисел $PeD_э/L$	Число \overline{Nu}
Круглая труба диаметром D	$D_э = D$	> 12	$\overline{Nu} = 1,61(PeD/L)^{1/3}$
		< 12	$\overline{Nu} = 3,66$
Плоская щель шириной δ	$D_э = 2\delta$	> 70	$\overline{Nu} = 1,85(PeD/L)^{1/3}$
		< 70	$\overline{Nu} = 7,50$
Равносторонний треугольник, длина стороны h	$D_э = 0,58h$	> 7	$\overline{Nu} = 1,50(PeD/L)^{1/3}$
		< 7	$\overline{Nu} = 2,70$

В табл. 1.2.4 приведены значения числа Нуссельта при ламинарном течении для каналов с различной формой сечения и для различных законов изменения температуры стенки канала. На теплоотдаче при ламинарном течении существенно сказывается свободная конвекция.

Таблица 1.2.4

Значение чисел \overline{Nu} при ламинарном течении в области стабилизированной теплоотдачи

Профиль канала	Закон изменения температуры стенки	Значения числа \overline{Nu}
Круглая труба диаметром D	Постоянная	3,66
	Меняется линейно	4,36
Плоская щель, обогреваемая с обеих сторон ($D_3=2\delta$)	Постоянная	7,5
	Меняется линейно	8,24
Плоская щель, обогреваемая с одной стороны ($D_3=2\delta$)	Постоянная	4,86
	Меняется линейно	5,40
Равносторонний треугольник ($D_3=0,58h$)	Постоянная	3,1
Равнобедренный треугольник $D_3 = \frac{2h}{1 + \sqrt{(2h/L)^2 + 1}}$ угол β при вершине:		
20°	Постоянная	2,7
40°	Постоянная	3,0
80°	Постоянная	3,5
90°	Постоянная	3,7
100°	Постоянная	3,8

Приведенный анализ ламинарного течения в трубах и каналах указывает на арифметическую связь между переносом теплоты и переносом импульса, которую Стантон выразил известной формулой:

$$St = \zeta/16.$$

Действительно, $St = NuPe$, $Pe = PrRe$, $Nu \approx 4$ для круглой трубы (Табл. 1.2.4) и, следовательно, $St = \zeta/16$.

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

В 1874 году Осборн Рейнольдс постулировал аналогию между процессами переноса теплоты и импульса в турбулентных сдвиговых потоках.⁴ Перенос теплоты к телу вызывает увеличение его внутренней энергии, подобно тому, как работа, производимая над телом, вызывает возрастание его кинетической энергии. Рейнольдс постулировал аналогию между переносом теплоты и переносом импульса, а не кинетической энергии. Основанием для этого служила аналогия между молекулярным и турбулентным процессами переноса. Согласно молекулярно-кинетической теории, теплота и количество движения переносятся совершенно одинаковым образом путем соударения молекул. Соотношение между переносом теплоты и импульса характеризуется числом Прандтля, которое, согласно упрощенной теории, равно единице. Действительная величина числа Прандтля для двухатомных газов равна примерно 0,7 и практически не зависит от температуры. Отличие от единицы обусловлено важной ролью колебательных и вращательных степеней свободы молекулярного движения. Рассуждения О. Рейнольдса относительно связи между рассеянием энергии при трении и переносом теплоты сводятся к следующему. Частица жидкости, находящаяся в ядре турбулентного потока и имеющая его температуру и скорость, попадая в пристенный слой, принимает температуру и скорость этого слоя. Затем эта же частица снова возвращается в ядро потока, и такое ее перемещение все время повторяется. Таким путем происходит перенос теплоты и количества движения из ядра потока в пристенный слой. Рассмотрим движение жидкости и теплообмен в круглых трубах вдали от входа, т. е. в той области течения, где тепловой и динамический пограничные слои сомкнулись.

Примем следующие допущения:

1. скорости движения жидкости невелики, так что диссипацией кинетической энергии можно пренебречь;
2. влияние внешних массовых сил мало по сравнению с влиянием сил вязкости, инерции и сил давления;
3. физические свойства жидкости изменяются слабо и этим изменением можно пренебречь;
4. течение в трубе считаем двумерным ($w_\phi = 0, \partial/\partial\phi = 0$);
5. к рассматриваемой задаче применимо приближение пограничного слоя:⁵

$$(u \gg v, u' \sim v' \sim w', \partial^2/\partial r^2 \gg (1/r)d/dr, d/dr \gg d/dx).$$

Для сформулированных условий уравнения сохранения энергии и импульса, записанные в цилиндрической системе координат, имеют вид:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = v \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \left(1 + \frac{\varepsilon}{v} \right) \frac{du}{dr} \right], \quad (1.2.25)$$

где $Pr = \nu / (\lambda / \rho c_p)$ – критерий Прандтля; c_p – изобарная теплоемкость; $\varepsilon = u' v' / (du / dr)$ – коэффициент турбулентной вязкости; $Pr_T = \varepsilon / \varepsilon_T$ – турбулентное число Прандтля; $\varepsilon_T = T' v' / (\partial T / \partial r)$ – коэффициент турбулентной теплопроводности.

Далее будем считать, что изменение температуры теплоносителя обусловлено только радиальным подводом теплоты, а изменение давления – только напряжением трения. Кроме того, в пределах dx будем считать плотность теплового потока q и напряжения трения τ постоянными. Следовательно, баланс энергии и импульса можно описать уравнениями:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{r} \int_0^r \rho u c_p T r dr \right] = -q; \quad (1.2.26)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r p r dr \right] = \tau. \quad (1.2.27)$$

После интегрирования уравнений (1.2.24) и (1.2.25) при условии, что $du / dx = 0$ и с учетом уравнений (1.2.26) и (1.2.27), получим:

$$\frac{-q}{(\lambda + \rho c_p \varepsilon_T) dT / dr} = 1; \quad (1.2.28)$$

$$\frac{\tau}{\rho(\nu + \varepsilon) du / dr} = 1. \quad (1.2.29)$$

Аналогия Рейнольдса может быть выражена следующим образом:

$$\frac{-q}{\rho c_p dT / dr} = \frac{\tau}{\rho du / dr}; \quad (1.2.30)$$

$$\lambda / (\rho c_p) + \varepsilon_T = \nu + \varepsilon. \quad (1.2.31)$$

Из последнего уравнения видно, что аналогия Рейнольдса выполняется в следующих случаях:

1. в приближении ламинарного течения ($\varepsilon_T \ll \lambda / \rho c_p$, $\varepsilon \ll \nu$) при $Pr = 1$;
2. при $Pr = Pr_T = 1$;
3. в приближении невязкого турбулентного движения ($\varepsilon_T \ll \lambda$, $\varepsilon \ll \nu$) при $Pr = 1$.

Рейнольдс рассматривал последний случай.

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

Удобно ввести понятие относительной избыточной температуры:

$$\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_f}, \quad (1.2.32)$$

где T_w – температура стенки, T_f – осредненная по сечению канала температура теплоносителя:

$$T_f = \frac{1}{\rho \bar{u} c_p \cdot \pi R^2} \int_0^R \rho u c_p T \cdot 2\pi r dr. \quad (1.2.33)$$

Из условия нормировки следует, что:

$$\int_0^1 \frac{u}{\bar{u}} \theta da = 1/2, \quad (1.2.34)$$

где, как и выше, $a = r/R$.

Из условия теплового баланса для всей трубы следует, что:

$$\frac{dT_f}{dx} = \frac{2q_w}{\rho \bar{u} c_p R}, \quad (1.2.35)$$

где q_w – удельный тепловой поток на стенке.

Интенсивность теплообмена может быть оценена числом Стантона:

$$St = \frac{q_w}{\rho c_p (T_w - T_f) \bar{u}}. \quad (1.2.36)$$

Соотношение (1.2.30) можно выразить следующим образом:

$$\frac{(q/q_w) St}{\partial \theta / \partial r} = \frac{(\tau/\tau_w) \xi}{8 \partial (u/\bar{u}) / \partial r}. \quad (1.2.37)$$

Частным случаем этого выражения является часто приводимая формула:

$$St = \xi/8. \quad (1.2.38)$$

В общем случае гидравлическое сопротивление складывается из сопротивления, обусловленного трением между поверхностью тела и обтекающей его жидкостью, и сопротивления, связанного с образованием вихрей позади тела или вихрей, обусловленных шероховатостью. С одной стороны, поверхность тела уничтожает вихри силой трения, а с другой – рождает новые, которые отделяются от нее и затем заполняют весь поток. Вихри, созданные поверхностью, являются переносчиками теплоты между телом и теплоносителем, и потому можно считать, что количество переданной теплоноси-

телю (или от него) теплоты пропорционально общему сопротивлению тела. Для проверки этого предположения Стантон со своими учениками изучал теплоотдачу гладких и шероховатых труб. Сопротивление последних было в 2,5 раза больше сопротивления гладких труб, что связано с образованием вихрей, обусловленных шероховатостью.

Не вполне выяснена зависимость отношения St / ξ от температуры. Согласно опытным данным Стантона, это отношение увеличивается с температурой, что соответствует кинетической теории газов.⁶ Точная аналогия между процессами переноса тепла и количества движения возможна лишь в безградиентном потоке теплоносителя без внутренних источников (стоков) теплоты.

Распределения касательного напряжения и теплового потока можно представить в виде:

$$\tau = \rho(\nu + \varepsilon) \frac{du}{dr}; \quad (1.2.39)$$

$$q = (\lambda + \rho c_p \varepsilon_r) \frac{d(T_w - T)}{dr}. \quad (1.2.40)$$

Эти уравнения могут быть представлены в безразмерной форме:

$$\tau / \tau_w = (1 + \varepsilon / \nu) \frac{d\varphi}{d\eta}; \quad (1.2.41)$$

$$q / q_w = \left(\frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_r} \frac{\varepsilon}{\nu} \right) \frac{d\theta^+}{d\eta}, \quad (1.2.42)$$

где $\theta^+ = (T_w - T) / T^*$ – безразмерная температура; $T^* = q_w / (\rho c_p u^*)$ – динамическая температура; u^* – динамическая скорость; $\varphi = u / u^*$; $\eta = u^* r / \nu$.

Представив (1.2.41) и (1.2.42) в (1.2.37), получим уравнение, аналогичное (1.2.31), которое является одной из форм аналогии Рейнольдса:

$$1 + \frac{\varepsilon}{\nu} = \frac{1}{Pr} + \frac{1}{Pr_r} \frac{\varepsilon}{\nu}. \quad (1.2.43)$$

Это равенство выполняется в пристенной области ($\varepsilon \ll \nu$) только при $Pr = 1$. Следовательно, существенным ограничением применения аналогии Рейнольдса является требование, чтобы число Прандтля было близко к единице. Это условие выполняется для газов и нарушается в случае жидких ($Pr > 1$) и жидкометаллических ($Pr < 1$) теплоносителей.

В работе С. С. Кутателадзе⁷ приведена классификация теплоносителей по числам Прандтля.

а) Теплоносители с $Pr \approx 1$ (газы при любых температурах и некоторые капельные жидкости в узком интервале температур). В этом случае отношение скоростей молекулярного переноса теплоты и количества движения имеет значение порядка единицы.

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

б) Теплоносители с $Pr > 1$ (все неметаллические капельные жидкости). Для этого класса теплоносителей толщина теплового пограничного слоя меньше, чем динамического, и в области между вязким подслоем и турбулентным ядром становится вполне ощутимым турбулентный перенос.

в) При $Pr \gg 1$ толщина теплового пограничного слоя становится соизмеримой с толщиной вязкого подслоя, в связи с чем турбулентный перенос необходимо учитывать и в последнем. Проникающие в вязкий подслоя турбулентные пульсации уменьшают его термическое сопротивление.

г) Теплоносители с $Pr < 1$ (все металлические жидкости). В этих жидкостях тепловой пограничный слой глубоко проникает в турбулентное ядро потока.

Стантон и Тейлор первыми распространили аналогию Рейнольдса на случай теплоносителей с числом Прандтля, отличным от единицы за счет учета пристенного ламинарного слоя. Еще Пекле в экспериментах по теплообмену между водяным теплоносителем и металлической пластиной установил, что на поверхности пластины образуется слой воды, через который теплота передается теплопроводностью.⁸ Тейлор считал, что в ламинарном пристенном слое процессы переноса преимущественно молекулярные, а вне пристенного слоя молекулярным переносом можно пренебречь. На основе такой двухслойной модели течения Тейлор получил следующее соотношение:⁹

$$St = \frac{\xi/8}{1 + \frac{\delta_1 \tau}{\bar{u} \mu} Pr - \frac{u_1}{\bar{u}}}, \quad (1.2.44)$$

где δ_1 – толщина ламинарного слоя, u_1 – скорость на внешней границе этого слоя, $\xi = \zeta/2$.

Для вычисления толщины ламинарного слоя Тейлор применил критерий Лоренца, устанавливающий наибольшее расстояние между двумя плоскими поверхностями, при котором движение между ними остается ламинарным. Результат его выкладок дает $\tau = \mu u_1 / \delta_1$.

Подставив τ_1 в уравнение (1.2.44), Тейлор получил уравнение:

$$St = \frac{\xi/8}{1 + \frac{u_1}{\bar{u}}(Pr-1)}. \quad (1.2.45)$$

Девятью годами позже, в 1928 году, Прандтль предложил полуэмпирическую зависимость для отношения u_1/\bar{u} , на основе которой уравнение (1.2.45) принимает вид:¹⁰

$$St = \frac{\xi/8}{1 + 1,74 Re^{-1/8} (Pr-1)}. \quad (1.2.46)$$

Тщательные экспериментальные исследования были выполнены Мак-Адамсом. В своих первых работах Мак-Адамс^{11,12} обобщил опытные данные по теплообмену и трению в трубах следующими формулами:

$$\begin{aligned} St &= 0,023 Re^{-0,2} Pr^{-0,6}; \\ Re &= 3 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^6; Pr = 0,7 \div 100; \\ \xi / 4 &= 0,046 Re^{-0,2}; \xi = 0,184 Re^{-0,2}. \end{aligned}$$

Отсюда аналогия Мак-Адамса:

$$St/\xi = \frac{1}{8} Pr^{-0,6}.$$

Более позднее экспериментальное исследование теплообмена при движении воздуха в трубе в широком диапазоне чисел Маха $M = 0,1 \div 1,0$, $d = 0,28 \div 0,99$ дюйма; $p = 0,2 \div 3$ атм.; $Re = 10^4 \div 4 \cdot 10^5$; $\Delta t = 10 \div 400$ °F Мак-Адамс обобщил следующим образом:¹³

$$St = 0,025 Re^{-0,2}$$

при $M = 0,1 \div 0,2$;

$$St = 0,033 Re^{-0,23}$$

при $M = 0,1 \div 1,0$ с точностью ± 7 %.

Для $Pr = 8$ приводятся следующие зависимости:¹⁴

$$1/\sqrt{St} = 0,000370 + 0,000926 Re^{-0,269}$$

или

$$1/\sqrt{St} = 6,54 \lg(Re\sqrt{St}) + 13,1$$

Зависимости, подобные этим, для коэффициента трения $f = \xi / 4$, имеют вид:

$$1/\sqrt{f} = 0,000695 + 0,0540 Re^{-0,303}$$

или

$$1/\sqrt{f/2} = 5,66 \lg(Re\sqrt{f/2}) + 0,286.$$

Полуэмпирические зависимости для отношения u_1/\bar{u} предлагаются разными авторами до настоящего времени. Так, предложена очередная зависимость:¹⁵

$$u_1/\bar{u} = 3,2 Re^{-0,1}$$

при $Re = 5 \cdot 10^3 \div 2 \cdot 10^5$.

1.2. Аналогия между процессами переноса теплоты и импульса

Экспериментальные исследования¹⁶ показывают, что уравнение (1.2.46) хорошо согласуется с опытными данными в диапазоне чисел Прандтля от 1 до 2. Карман расширил область применения аналогии Рейнольдса до значений $Pr \approx 10$ на основе рассмотрения трехслойной модели движения жидкости в канале. Он получил следующее выражение для аналогии между теплообменом и трением:¹⁷

$$St = \frac{\xi/8}{1 + 5\sqrt{\xi/8} \left\{ (Pr-1) + \ln \left[1 + \frac{5}{6}(Pr-1) \right] \right\}}. \quad (1.2.47)$$

На основе экспериментальных исследований теплообмена и трения в каналах при движении теплоносителей Чилтон¹⁸ и Колбурн¹⁹ предложили эмпирическую зависимость, обобщающую аналогию Рейнольдса в широком диапазоне чисел Прандтля:

$$St Pr^{2/3} = \xi / 8.$$

ГЛАВА II.

ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТЕЙ

2.1. Общие положения теории размерностей

Фурье ввел теорию размерностей в физику в своей известной работе «Аналитическая теория теплоты» в 1822 году.¹ Причины, побудившие его сделать это, сформулированы им так: «Необходимо отметить здесь, что каждая неопределенная величина, или константа, имеет присущую только ей размерность, а члены одного и того же уравнения не могут быть сопоставлены, если показатели размерностей у них различны. Мы вводим это утверждение в теорию теплоты для того, чтобы сделать наши высказывания более точными, а также для возможности проверки анализа; оно следует из начальных замечаний о величинах; также как в геометрии и механике, оно представляет собой эквивалент основных лемм, которые греки оставили нам без доказательств». Со времен Фурье этот предмет получил значительное развитие. Точка зрения, согласно которой все физические величины могут быть выражены в терминах пяти единиц – длины, массы, времени, магнитной проницаемости и температуры, – после критического рассмотрения Рюкером, Толменом, Брауном и другими свелась к идее о том, что существует лишь два основных измерения, а именно длина и время. Лорд Кельвин (1889) отмечал: «есть что-то чрезвычайно интересное в том, что можно практически найти систему измерения в единицах длины и единицах времени». Дж. Бурнистон Браун одним из первых предложил системный подход к теории размерности физических величин.² Браун вводит следующие определения:

Физическая величина – все, что может быть измерено.

Значение физической величины – число, полученное в результате измерения.

Эквивалентные измерения – это измерения, которые при одинаковых физических условиях дают в результате одно и то же число. Тогда можно сказать, что измерение длины эквивалентно измерению интервала времени $1/c$, умноженному на константу взаимодействия c .

Первичные измерительные операции – операции, описанные выше и служащие для введения чисел как символов пространственных и временных интервалов, заданных или выведенных из сознания.

Вторичные измерительные операции – все другие операции измерения, такие как взвешивание, показания термометра и т. д.

Измерения – измерительные операции, вместе с числами, полученными в результате этих операций, и подставленными в формулу для определения физической величины.

Размерность физической величины – отношение значений одной и той же величины, представленных в разных системах единиц измерения. Величины, размерность которых равна единице, называют безразмерными. Понятия размерных и безразмерных величин условно, поскольку зависит от выбора систем единиц измерения.

Определение размерности, по Брауну, сводится к следующему. Пусть операция измерения длины обозначается символом L , а операция измерения времени – символом T . Если результаты всех измерений можно вычислить с помощью чисел, полученных посредством одной или сразу обеих этих операций, то необходимо иметь возможность выразить измерение любой физической величины в терминах L и T . Естественным путем выбора масштаба измерений является принятие в качестве эталона какого-либо устойчивого природного явления. Эталоны устанавливаются международным соглашением. Величины, для которых единицы измерения вводятся с помощью эталонов, называются первичными (основными). Производные величины могут быть получены из основных по заданным правилам (законам). Набор основных величин определяет систему единиц измерения. Для удобства положим, что в дальнейшем будет использоваться система единиц CGS; однако само изложение не зависит от того, какая именно система единиц принимается. Размерность физической величины состоит из одного или более символов для обозначения первичных операций измерения длины и времени (L , T), вместе с соответствующими показателями, представляющими степени, в которые числа, полученные при измерении, возводятся, чтобы согласовать их с определяемой величиной.

Взяв, например, измерения площади, получим число, представляющее площадь, перемножением двух чисел, полученных при измерении двух различных длин. Можно представлять это как $L^1 \times L^1$ или L^2 . Аналогичным образом измерение объема представляется как L^3 . Для угловых измерений требуется два измерения длины, но результирующее число получается делением этих чисел, поэтому результат представляется как L^0 . Подобным же образом скорость представляется как LT^{-1} а ускорение как LT^{-2} . В соответствии с этим, показатель степени указывает на способ, которым числа, полученные в результате измерений, преобразуются в значение физической величины, о которой идет речь.

Законы природы отражают связи между различными величинами, которые могут быть представлены в форме математических уравнений. Согласно правилу Фурье, эти уравнения должны быть инвариантны относительно систем единиц измерения. Это правило является следствием фундаментального общезначимого принципа ковариантности (равноправия систем единиц измерения). Свойством инвариантности обладают лишь гомогенные функции, которые при подобном преобразовании величин, входящих в их состав, преобразуются в целом тоже подобно:³

$$F(c_1 u_1, \dots, c_n u_n) = \varphi(c_1, \dots, c_n) F(u_1, \dots, u_n). \quad (2.1.1)$$

Гомогенная функция инвариантна, если $\varphi = 1$.

Приведем пример, рассмотренный советским авиаконструктором, физиком и философом Бартини.⁴ Ньютонова механика на основе эксперимента делает вывод, что сила необходима лишь для изменения скорости, а не для ее поддержания. Условие для определения силы и массы было введено Ньютоном и записывалось, ввиду того, что использовалось как определяющее уравнение, следующим образом:

$$(\text{сила}) = (\text{масса}) \times (\text{ускорение}).$$

Этого недостаточно, так как имеются два неизвестных и только одно уравнение. Дополним его законом тяготения, записывая его для случая равных масс в виде:

$$(\text{сила}) \text{ пропорциональна } (\text{масса})^2 / (\text{расстояние})^2.$$

Теперь имеются два уравнения с двумя неизвестными, так что можно найти либо силу, либо массу. Записывая вышеупомянутое уравнение в виде

$$(\text{сила}) = gm^2/r^2,$$

где g – некоторая константа, и подставляя его в первое уравнение, получим $gm/r^2 = (\text{ускорение})$.

Полагая, что g – безразмерная константа, получаем

$$[m] = [\text{ускорение}] [\text{длина}]^2 = L^3 T^2.$$

Учитывая все сказанное выше, формулы размерностей можно представить в следующем виде:

Масса	$L^3 T^2$	Действие	$L^5 T^3$
Сила	$L^4 T^4$	Плотность	$L^4 T^2$
Энергия	$L^5 T^4$	Угловой импульс	$L^3 T^3$
Импульс	$L^4 T^3$		

и так далее.

На первый взгляд кажется странным, что, как сказал лорд Кельвин, четвертая степень линейной скорости является мерой силы, а квадрат угловой скорости – мерой плотности. Кельвин, однако, дал остроумную иллюстрацию: «найдена мера, с которой частица материи должна переноситься по

2.1. Общие положения теории размерностей

окружности вокруг равной ей частицы, находящейся на таком расстоянии от нее, чтобы притягивать эту частицу с силой, равной данной силе. Четвертая степень этой скорости есть число, которое является мерой этой силы». Касаясь плотности, Кельвин показал, что если спутник вращается очень близко к поверхности сферической массы, то

$$(\text{плотность сферы}) = 3/4\sqrt[4]{(\text{угловая скорость спутника})}.$$

Предмет теплоты отличается от других разделов физики тем, что долгое время считалось, что не существует связи между механикой и теплотой. Поэтому теплота не измерялась при помощи значения изменения силы, которая ее производит. Динамическая теория теплоты, однако, дает два уравнения, приравнивающих теплоту и энергию, а также абсолютную динамическую шкалу Кельвина (уравнение идеального газа). Согласно динамической теории, теплота не просто пропорциональна энергии, но она сама есть вид энергии. Соответственно, измерения, определяющие количество энергии, могут применяться равным способом и для измерения количества теплоты. Поэтому их размерности должны быть одинаковыми, так что любые коэффициенты, используемые для перехода от произвольных тепловых единиц к единицам энергии, должны быть безразмерными числами. Итак, можно записать:

$$[\text{теплоемкость}] = L^3T^4$$

и

$$[\text{масса}] [\text{удельная теплоемкость}] [\text{температура}] = L^5T^4.$$

В классическом изложении удельная теплоемкость, по определению, безразмерная величина, так как она представляет собой отношение количества теплоты, необходимого для нагрева тела, к количеству теплоты, необходимому для нагрева той же массы воды до той же температуры. Какие бы символы ни использовались для обозначения измерения тепловых величин, при формировании их отношения символы сокращаются и остаются только числа. Поэтому

$$L^3T^2[\text{температура}] = L^5T^4$$

или

$$[\text{температура}] = L^2T^2.$$

Размерность температуры соответствует, таким образом, квадрату скорости. Это согласуется, как и должно быть, с кинетической теорией, причем можно интерпретировать этот результат подобно тому, как лорд Кельвин интерпретировал результат, согласно которому сила соответствует четвертой степени скорости. Воспользуемся кинетической теорией и пред-

ставим себе идеальный газ как некоторую термометрическую субстанцию. Можно показать затем, что температура пропорциональна среднеквадратической скорости молекул. В частности, два различных материала имеют ту же самую температуру, если при контакте их с термометрическим веществом среднеквадратическая скорость движения их молекул одна и та же в обоих случаях.

Бартини замечает, что сведение размерностей всех физических величин к двум размерностям – L и T – для выражения физической величины не требует степеней превышающих шести, включая нулевую степень. Он также подчеркивает важность названия величины скорости света с «постоянной взаимодействия»: «Слово “скорость” лучше применять в тех случаях, когда есть какое-либо видимое движение. В случае светового и электромагнитного излучения нет, вообще говоря, никакого видимого перемещения. Таким образом, может быть, лучше относиться к свету не как к чему-то перемещающемуся в пространстве от светящегося объекта к глазу – частица или волна, – но как к части непрерывного взаимодействия в пространстве, такого как взаимодействие Луны и морских приливов и отливов; излучение производится без необходимости гипотезы о чем-то, перемещающемся в пространстве. Причина, по которой “скорость света” играет такую большую роль в современной физике в том, что “скорость света” не является какой бы то ни было скоростью. “Волны света” – это достаточно схематический механизм для объяснения и вычисления различных эффектов взаимодействия. Так как атомные частицы никогда визуально не наблюдались, а только через взаимодействие, не должен вызывать удивление тот факт, что волновая теория, которая оказывается полезной для описания одного вида взаимодействия, может оказаться полезной и для описания других его видов. Таким образом, волны света и волны массы – только схематический механизм, необходимый для того, чтобы иметь дело со взаимодействием, которое и представляет собой то, что лишь и можно измерять»⁵. Однако вернемся к формальному рассмотрению размерности.

Пусть мы имеем размерную величину a_0 , которая является функцией независимых между собой размерных величин

$$a_0 = f(a_1, a_2, \dots, a_s), \quad (2.1.2)$$

некоторые из этих величин могут быть постоянными, другие – переменные. Для обозначения размерности какой-либо величины a принять символ $[a]$, введенный Максвеллом. Вычислим взаимосвязь между размерностями $[a_i]$ в предположении, что функция $f(a_1, \dots, a_s)$ выражает собой некоторый физический закон, независимый от выбора систем единиц измерения. В этом случае функция $f(a_1, \dots, a_s)$ относится к классу однородных функций.

При переходе от одной системы единиц измерения к другой, согласно определению размерности, уравнение (2.1.2) примет вид:

$$a_0[a_0] = f(a_1[a_1], \dots, a_s[a_s]). \quad (2.1.3)$$

Так как эта функция гомогенна, представим ее следующим образом:

$$f(a_1[a_1], \dots, a_s[a_s]) = \varphi([a_1], \dots, [a_s]) f(a_1, \dots, a_s) \quad (2.1.4)$$

причем величины $[a_i] (i = 1, \dots, s)$ могут принимать произвольные значения.

Известно, что только степенная функция гомогенна относительно произвольного преобразования.⁶ Следовательно,

$$\varphi([a_1], \dots, [a_s]) = [a_1]^\alpha [a_2]^\beta \dots [a_s]^\gamma. \quad (2.1.5)$$

С учетом (2.1.4) и (2.1.5) уравнение (2.1.3) можно представить так:

$$a[a_0] = [a_1]^\alpha [a_2]^\beta \dots [a_s]^\gamma f(a_1, \dots, a_s). \quad (2.1.6)$$

Сравнив уравнения (2.1.2) и (2.1.6), получим известную формулу размерности физических величин:

$$[a_0] = [a_1]^\alpha [a_2]^\beta \dots [a_s]^\gamma. \quad (2.1.7)$$

Существует отличное от приведенного доказательство того, что формула размерности должна иметь вид степенных одночленов.⁷

Любая функция может быть записана как зависимость от степенных комплексов, входящих в ее состав:⁸

$$F(u_1, \dots, u_n) = P_1 \Phi(P_2, \dots, P_n). \quad (2.1.8)$$

Функция P_1 гомогенна относительно произвольного подобного преобразования. Функция Φ может быть гомогенной, если выбрать множители преобразования не произвольно, но так, чтобы все комплексы P_i , входящие в состав функции Φ , были инвариантными относительно выполняемого преобразования. При этом условии функция Φ представляет собой инвариантный множитель и, следовательно, функция F в целом преобразуется по закону преобразования ее гомогенной части P_1 .

Таким образом, для обеспечения инвариантности функции F необходимо установить систему обуславливающих уравнений вида:

$$\varphi_i = c_1^{\alpha_i} c_2^{\beta_i} \dots c_n^{\gamma_i} = 1, \quad (2.1.9)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$.

Теоретические и экспериментальные физические закономерности всегда можно представить в виде функциональной зависимости

$$a_0 = f_0(a_1, \dots, a_s, \dots, a_n), \quad (2.1.10)$$

где a_0 – искомая физическая величина; a_1, \dots, a_n – определяющие параметры, причем величины a_1, \dots, a_s имеют независимые размерности.

С учетом формулы размерности (2.1.7) построим безразмерные комплексы следующим образом:

$$\pi_j = \frac{a_j}{a_1^{\alpha_{1j}} a_2^{\alpha_{2j}} \dots a_s^{\alpha_{sj}}} = \frac{a_j}{\prod_{i=1}^s a_i^{\alpha_{ij}}}, \quad (2.1.11)$$

где $i = 1, \dots, s$ и $j = 0, 1, \dots, n$ выбраны так, что величины a_i являются первичными, а a_j – вторичными в избранной системе единиц.

В частном случае, когда размерность некоторой вторичной величины совпадает с размерностью одной из первичных величин, их отношение образует симплекс

$$s_j = \frac{a_j}{a_i}. \quad (2.1.12)$$

В силу инвариантности уравнения (2.1.10) относительно системы единиц измерения его можно представить в форме:

$$\pi_0 = f(\pi_1, \dots, \pi_k, s_{k+1}, \dots, s_{n-s}). \quad (2.1.13)$$

В том случае, если число безразмерных комплексов π равно числу вторичных величин ($k = n - s$), уравнение (2.1.13) будет выражать так называемую π – теорему Бэкингема.⁹ То, что критериальное уравнение содержит, кроме критериев-комплексов, еще и симплексы, было показано Т. А. Афанасьевой-Эренфест в 1925 г.

Таким образом, всякое физическое соотношение между размерными величинами можно сформулировать как соотношение между безразмерными величинами. В этом и заключается возможность полезных приложений теории размерностей.

2.2. Фрактальная размерность

Изложение теории размерности в ее современном состоянии было бы неполным, если мы игнорируем фрактальную (дробную) размерность. Эта новая форма размерности возникла в математике. В математике размерность имеет фундаментальное значение. Понятие размерности лежит в основе определений, которые открывают первую книгу «Начал» Евклида (ок. 300 г. до н. э.), посвященную геометрии плоскости:

1. Точка есть фигура, не имеющая частей.
2. Линия есть фигура, обладающая длиной, но не обладающая шириной.

3. Оконечностями линии являются точки.
4. Поверхность есть фигура, обладающая только длиной и шириной.
5. Оконечностями поверхности являются линии.

Происхождение этих идей восходит к Платону (427–347 г. до н. э.), который в седьмой книге «Государства» комментирует Сократа следующим образом: «после плоских поверхностей (...) правильным будет добавить к двум измерениям третье (...) то есть измерение, присущее кубам и прочим телам, обладающим глубиной». На основе этого нестрогого определения размерности художники, архитекторы и ремесленники разработали метод, который сам по себе служит определением размерности. Для измерения площади объекта на плане или карте используется простое устройство – палетка. Это прозрачная пластинка, на которую нанесена квадратная сетка с заданным шагом δ , скажем, 1 см. Наложив палетку на карту, можно подсчитать число квадратиков, попавших внутрь области, и получить оценку площади снизу, или подсчитать количество квадратиков, полностью покрывающих область, и получить оценку площади сверху.

Чем меньше размер квадратиков сетки, тем точнее будет оценка ($\delta \rightarrow 0$). Ясно, что при уменьшении δ число ячеек сетки $N(\delta)$ будет возрастать как $N(\delta) \sim 1/\delta^2$. Если же мы рассмотрим покрытие отрезка линии, то получим $N(\delta) \sim 1/\delta$. Если это будет объемная фигура, то $N(\delta) \sim 1/\delta^3$. Например, отрезок длиной 1 см мы можем покрыть десятью отрезками длиной в 1/10 см. Квадрат со стороной в 1 см мы полностью покроем сотней квадратов со сторонами 1/10 см. Аналогично, куб с ребром в 1 см заполним тысячей кубов с ребрами в 1/10 см. Мы видим, что величина, совпадающая с топологической размерностью, появляется в показателях степеней: $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ Эту последовательность показателей можно обнаружить независимо от выбора меры измерения δ .

Из рассмотренных нами примеров следует, что $N(\delta) \sim 1/\delta^d$, где d – размерность. Следовательно, величина $\lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta^d$ представляет собой инвариант, меру объекта, а размерность выступает как параметр скорости роста числа ячеек при уменьшении меры ячеек $\delta \rightarrow 0$. С помощью палетки даже искусному в мастерстве топографу весьма непросто измерить площадь, например, Великобритании с учетом всех мельчайших изгибов (рис. 2. 2. 1). Но, волей случая, есть технология простая и надежная. Вообразите, что мы разбрасываем рисовые зерна по полу, где начерчен контур побережья Великобритании, а затем подсчитываем долю зерен, оказавшихся в пределах контура, от общего числа брошенных зерен. Со временем результат начинает приближаться к пределу – площади Великобритании. Размерность являет собой предел случайного процесса.



Рис. 2. 2. 1. Пример измерения площади Великобритании с помощью палетки

Анри Пуанкаре (1854–1912) формализовал понятие размерности посредством «разделения континуумов». Одна из последних работ Анри Пуанкаре называется «Почему пространство имеет три измерения?». Пуанкаре пишет: «Что мы имеем в виду, говоря, что размерность пространства равна трем? Если для разделения континуума S достаточно рассмотреть в качестве сечений определенное количество различных элементов, мы говорим, что размерность такого континуума равна единице (...) Если же для разделения континуума достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, равной единице, мы говорим, что размерность континуума S равна двум. Если достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, не превышающей двух, мы говорим, что размерность континуума S равна трем; и так далее». Для разделения пространства необходимы сечения, называемые поверхностями; для разделения поверхностей – сечения, называемые кривыми; точку же разделить нельзя, так как она не является континуумом: она – сингулярность. У нее нет меры, кроме ее самой. Ее размерность равна нулю. Кривые разделяются точками, размерность которых – ноль. Размерность кривых равна единице. Поверхности разделяются непрерывными линиями. Размерность поверхностей равна двум. Пространство можно разделить поверхностями, следовательно, пространство является континуумом с размерностью, равной трем. По сравнению с классической трактовкой размерности Пуанкаре совершил важный сдвиг: от точек, линий и плоскостей к множествам и континуумам – к топологии. Он показал, что топологическая размерность множества при некоторых трансформациях – свертывании, сжатии, сгибании – не сохраняется, при том, что мера множества остается прежней. Топологическую размерность часто определяют как минимальное число координат, необходимых для фиксации его произвольной точки. Окружающие нас объекты – это множество точек n -мерного евклидова пространства. Для любого такого множества может быть введена его топологическая размерность dt – минимальное количество параметров, необходимых для указания положения точки в рассматриваемом множестве.

2.2. Фрактальная размерность

Она строится по индукции. Пустому множеству приписывается размерность $dt = -1$. Размерность dt любого непустого множества отлична от -1 и определяется следующим образом: если некоторое множество можно разделить на несвязанные друг с другом части с помощью множества размерности dt , то его топологическая размерность равна $dt + 1$. Например, точка имеет размерность $dt = 0$, поскольку две несовпадающие точки можно считать разделенными пустым множеством. Прямая имеет размерность $dt = 1$, так как два любых непересекающихся отрезка с несовпадающими концами можно разделить точкой; плоскость можно разделить линией, поэтому размерность плоскости $dt = 2$. Понятно, что топологическая размерность сферы равна двум, шара – трем и так далее (рис. 2. 2. 2). Очевидно, топологическая размерность n -мерного евклидова пространства равна $dt = n$. Из самого определения топологической размерности следует, что она может быть только целым числом. Таким образом, точка всегда вложена в линию, линия – в плоскость, плоскость – в пространство, и уж согласитесь, что вложенному множеству, по законам здравого смысла, следует быть меньше того множества, в которое оно вложено.

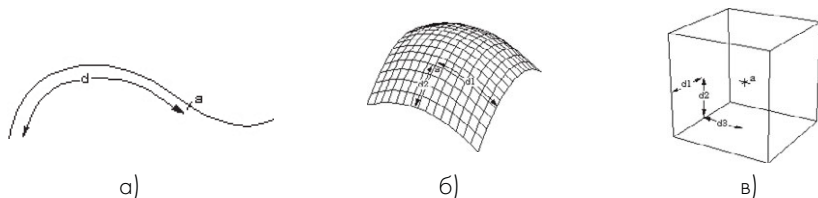


Рис. 2. 2. 2. Топологическая размерность равна 1 – (а), 2 – (б) и 3 – (в).

Основываясь на идеях Пуанкаре, Феликс Хаусдорф¹⁰ (1868–1942) опубликовал по теме размерности работу «Dimension and Outer Measure» (1919), и его посыл был развит Авраамом Самойловичем Безиковичем (1871–1970). Безикович¹¹ родился в Бердянске на Азовском море, закончил Санкт-Петербургский университет (1912), затем преподавал в Пермском университете и в 1924 году покинул СССР, работал в Стокгольме, Оксфорде, Ливерпуле, Кембридже. В Кембридже в 1930-х годах он написал несколько статей¹² по теме Sets of Fractional Dimensions. В основе рассуждений – подсчет числа ячеек, целиком поместившихся в границах объекта (оператор \inf) при уменьшении их размера (оператор \lim). Пусть исследуемое множество лежит в dt -мерном евклидовом пространстве. Будем покрывать это множество dt -мерными кубиками, причем величина ребра любого кубика δ_i не превышает некоторое значение $\delta > 0$, т.е. $\delta_i < \delta$. Введем отображение

$$I_d(\delta) = \inf \sum \delta_i^d,$$

где \inf – оператор учета только тех ячеек, которые полностью помещаются на объекте.

Пусть теперь

$$I_d = \lim_{\delta \rightarrow 0} I_d(\delta),$$

где $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ – оператор предельного перехода с уменьшением параметра $\delta \rightarrow 0$.

Если d велико, то $I_d \rightarrow 0$. Если d близко к нулю, то $I_d \rightarrow \infty$. Феликс Хаусдорф показал, что существует критическая величина d_H , выше которой $I_d = 0$, а ниже которой $I_d = \infty$. Это критическое значение d_H называется размерностью Хаусдорфа–Безиковича. Если все ячейки равны и имеют размер $\delta_i = \delta$, то $I_d(\delta) = \ln N(\delta)$ и

$$d_H = \lim_{r \rightarrow 0} \ln N(\delta) / \ln(1/\delta).$$

Таким образом, величина I_d имеет смысл меры только при использовании измерительных ячеек размерности d_H . Плотность меры тем выше, чем больше ее размерность. Если мера наблюдателя плотнее, чем мера объекта, то $I_d = 0$, если мера наблюдателя разреженнее, чем мера объекта, то $I_d = \infty$. Величина I_d соответствует мере множества, только если измеряющее и измеряемое соизмеримы. Подобное измеримо подобным. Заметим, что размерность Хаусдорфа–Безиковича позволяет различать геометрические категории *гладкий* и *хаотичный*, но не позволяет различить геометрически хаотичный объект от нерегулярного, но самоподобного. Заметим, что мера объекта $N(\delta) \delta^d$ и мера наблюдения δ соизмеримы друг с другом посредством параметра сопряжения d . При $\delta \rightarrow 0$ мера объекта может устремиться к нулю $N(\delta) \delta^d \rightarrow 0$, если d велико; либо – к бесконечности $N(\delta) \delta^d \rightarrow \infty$, если d достаточно мало. Отображение $\delta \rightarrow N(\delta) \delta^d$ при $\delta \rightarrow 0$ может либо уводить на бесконечность, может обращаться в ноль, и только при единственном значении $d = d_H$ стягиваться к некоторому конечному, пусть иррациональному (несоразмерному) числу. Для простоты рассмотрим приближение: $N(\delta) \sim 1/\delta^q$. В этом случае отображение $\delta \rightarrow N(\delta) \delta^d$ может быть представлено уравнением

$$\delta \approx \omega 1/\delta^q \delta^d$$

или

$$\delta \approx \omega \delta^{d-q},$$

где ω – постоянная.

При $d - q > 1$ для любого малого начального значения $\delta_0 < 1$ результат итерации есть $\delta \rightarrow 0$. При $d - q < 1$ для любого малого начального значения $\delta_0 < 1$ в результате итерации $\delta \rightarrow \infty$. При $d - q = 1$ для любого значения δ_0 величина $\delta \approx \omega = \text{const}$. Таким образом, мера объекта, которую выражает число, форма, порядок является наблюдателю только при выборе метрики наблюдения соизмеримой с метрикой объекта: $d \approx q$. Требование соизмеримости $d / q \approx 1$ допускает бесчисленное множество кратных метрик. Так, например, объект может быть явлен при $d = q = 1$, но, также и при

$d = q = 2$ или при $d = q = \sqrt{2}$. Таким образом, размерность – величина относительная. Нет абсолютной меры, но обычно обнаруживается множество размерностей, соизмеряющих процессы. Величина размерности может принимать целочисленные, дробные и иррациональные значения. В последнем случае мера наблюдения и мера объекта *несоразмерны, но соизмеримы*. Сопряжение несоизмерных объектов реализуется посредством бесчисленных итераций, последовательных приближений, результатом которых является *исчезающий дифференциал* $\Delta = d - q \rightarrow 0$. Круг замкнулся. Между определением непрерывности и фрактальной дискретностью нет различий. Здесь уместно заметить, что в китайском словаре отсутствует ноль, но есть понятие наименьшей четной дробности, обозначаемой иероглифом *лин*, как производной ассоциацией с каплей дождя, которая и отдельная, и самая мелкая, но и делимая на брызги. Понятие размерности при такой трактовке содержит рефлексивную петлю – определение посредством определяемого. При увеличении d величина I_d достигает минимального значения $I_d = 0$. Минимальная целочисленная мера наблюдателя d , при которой мера данного объекта I_d еще равна нулю, является топологической размерностью объекта d_T . Для простых геометрических объектов размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с топологической. Например, для отрезка $d_H = 1$, для квадрата $d_H = 2$, для куба $d_H = 3$. Действительно, возьмем квадрат со стороной a на плоскости в трехмерном пространстве и покроем его кубиками со стороной δ . Количество таких кубиков $N(\delta) = a^2 / \delta^2$. Далее, представим сумму

$$I_d(\delta) = \sum \delta_i^d = N(\delta) \cdot \delta^d = a^2 \delta^{d-2}.$$

Эта сумма существенно зависит как от δ , так и от d . Если $d < 2$, то при уменьшении δ значение $I_d(\delta)$ неограниченно увеличивается; если же $d > 2$, то с уменьшением δ значение $I_d(\delta) \rightarrow 0$, т. е. существует пограничное значение $d_H = 2$.

Основной чертой фракталов является изрезанность, извилистость, при которой топологическая размерность, мерцающая, исчезает. Мандельброт (1977) предложил использовать определение размерности Хаусдорфа–Безиковича и, более того, определил *фрактал как множество, для которого размерность Хаусдорфа–Безиковича d_H строго превышает топологическую размерность $d_T < d_H$* . Это утверждение Мандельброт иллюстрирует примером броуновского движения.¹³ Он считает броуновскую траекторию ломаной линией, топологическая размерность которой $d_T = 1$. Двухмерная траектория броуновского движения имеет фрактальную размерность $d_H = 2$, трехмерная – $d_H = 3$. Топологическая размерность при этом остается равной 1. При таком определении топологической размерности броуновской траектории определение фрактальной размерности очевидно: $d_T < d_H$. Но ведь сам Мандельброт отмечает, что траектория броуновского движения всегда размыта. Следовательно, для

задания положения точки на броуновской траектории необходимы две координаты для двухмерного и три координаты для трехмерного броуновского движения. Если рассматриваемому фракталу ставить в соответствие топологическую размерность пространства, в котором фрактал содержится целиком, то соотношение между фрактальной и топологической размерностью в общем случае¹⁴: $d_H \leq d_T$. Таким образом, определение фрактальной размерности через топологическую размерность ($d_T < d_H$) есть, одновременно, определение топологической размерности через фрактальную.

Далее рассмотрим практические методы определения фрактальной размерности. Поскольку минимизировать величину $\sum \delta_i^d$ по всем возможным разбиениям практически невозможно, используют упрощение – рассматриваются ячейки одного размера. Пусть $N(\delta)$ есть минимальное число кубиков со стороной δ , необходимых для покрытия. При этом

$$I_d(\delta) = N(\delta) \delta^d$$

или

$$N(\delta) = I/\delta^d.$$

Логарифмируя равенство, получаем

$$\log N(\delta) = \log I - d \log \delta,$$

$$d = - [\log N(\delta)/\log \delta] + \log I/\log \delta.$$

Так как $\log \delta \rightarrow -\infty$ при $\delta \rightarrow 0+$, то, возможно, существует предел

$$d_c = - \lim_{\delta \rightarrow 0} [\log N(\delta)/\log \delta],$$

называемый *емкостью множества* (capacity). Обычно на практике этот предел существует. Если значение $N(\delta)$ увеличивается с убыванием δ как δ^{-d} , то d и есть емкость множества. Поскольку при определении размерности d_H используются всевозможные покрытия множества, в отличие от определения размерности d_c , где фигурируют кубики одного размера, то выполняется соотношение $d_H \leq d_c$. При определении емкости фрактальных множеств d_c часто используют еще одно упрощение. Пусть на некотором этапе покрытия фрактала пришлось использовать $N(\delta)$ элементов характерного размера δ , а на ином $N(\delta')$ элементов размера δ' . Вследствие фрактального подобия фрагментов

$$N(\delta) \sim 1/\delta^d \text{ и } N(\delta') \sim 1/\delta'^d$$

или

$$N(\delta)/N(\delta') \sim (\delta'/\delta)^d.$$

Отсюда значение емкости принимает вид

$$d_c = \ln [N(\delta)/N(\delta')] / \ln (\delta'/\delta).$$

Это отношение, строго говоря, справедливо для регулярных, самоподобных фракталов. Пусть на n -м шаге построения фрактала имеем такие параметры покрытия: $N(\delta)$ и δ , а на $(n + 1)$ -м шаге соответственно: $N(\delta')$ и δ' . Тогда отношение $N(\delta)/N(\delta') = 1/p$ определяет число p , которое характеризует каким количеством элементов δ' на каждом шаге заменяется элемент δ , а отношение $\delta/\delta' = q$ ($q > 1$) показывает, во сколько раз уменьшается элемент покрытия. Параметр $r = 1/q$ ($r < 1$) принято называть коэффициентом подобия. Таким образом, получаем такую формулу для емкости:

$$d_c = \ln p / \ln q = \ln p / \ln (1/r) = - \ln p / \ln r.$$

Для регулярных самоподобных фракталов емкость d_c и размерность Хаусдорфа–Безиковича d_H совпадают всегда, для прочих фракталов – часто. Поэтому их обыкновенно не различают и говорят просто о фрактальной размерности объекта $d = d_c = d_H$. Данное приближение $d = d_c = d_H$ положено в основу техники расчета фрактальной размерности. Типовая операция состоит в построении графика зависимости $\log N(\delta)$ от $\log \delta$ в некотором интервале величины δ . Полученные точки при известном масштабе часто образуют отрезок прямой, угол наклона которой равен d . Например, длина ($d_L = 1$) побережья Норвегии бесконечна, площадь ($d_A = 2$) побережья равна нулю. Между тем, существует некоторая конечная мера – фрактальная размерность, для побережья Норвегии равная $d = 1,52$, для западного побережья Великобритании – 1.3 и для сравнительно гладкого южного побережья Африки – почти единица (рис. 2.2.3).

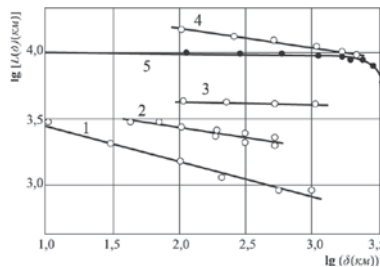


Рис. 2.2.3. Береговая линия. Определение размерности береговой линии Норвегии (квадратная сетка имеет шаг $S = 50$ км. $d = 1,52$), длина побережья Норвегии; длина побережий¹⁴ 1 – Британии ($d = 1,25$), 2 – Германии (1900г.) ($d = 1,15$), 3 – Южной Африки ($d = 1,02$), 4 – Австралии ($d = 1,13$), 5 – окружность. Испании и Португалии ($d = 1,14$)

Фрактальная размерность находит широкое применение в аналитической механике. Некоторые примеры вы найдете в Главе IV. Рекомендую так-

же книгу И. Бюргера «О применении методов статистической механики к теории турбулентного движения жидкостей».¹⁵

2.3. Методы анализа размерностей

Исследование нового физического явления или процесса целесообразно начинать с анализа размерностей, который позволяет отыскать безразмерные комплексы, когда уравнения связи между физическими величинами неизвестны. Возможность определить вид физической зависимости по известным физическим величинам, которые в нее входят, на основе анализа размерностей указал еще Бертран в своем докладе Французской академии. Метод отыскания неизвестной физической зависимости, указанный Бертраном, состоит в интуитивном комбинировании физических величин так, чтобы получились безразмерные произведения. Этот метод в дальнейшем был развит Апеллем. Впоследствии Федерманом, Толменом, Бэкингом, Рэлеем предложены другие, более формализованные и обоснованные, методы анализа размерностей. Их описание можно найти, например, в работе М. В. Кирпичева.¹⁶ Среди перечисленных выше методов наиболее широкое практическое применение благодаря своей простоте нашел метод Рэлея.

Проиллюстрируем метод Рэлея на задаче о теплообмене при движении теплоносителя в трубе. Такая задача состоит в следующем. В трубе диаметром D , температура стенки которой T_c , движется теплоноситель, температура которого $T_w > T_c$, со среднерасходной скоростью W . Необходимо найти коэффициент теплоотдачи $\alpha = q / (T_w - T_c)$.

Учтем факторы, которые могут влиять на теплообмен при движении теплоносителя к трубе. К таковым можно отнести: диаметр трубы D , скорость движения теплоносителя W , его плотность ρ , коэффициент теплопроводности λ , кинематический коэффициент вязкости ν и теплоемкость c_p .

В качестве независимых размерностей примем размерности массы $[M]$, времени $[\tau]$, длины $[L]$, температуры $[T]$. Тогда перечисленные выше физические величины имеют следующие размерности:

$$\begin{aligned}
 [D] &= [L]; \quad [\rho] = \left[\frac{M}{L^3} \right]; \quad [W] = \left[\frac{L}{\tau} \right]; \\
 [\lambda] &= [ML / \tau^3 / T]; \quad [c_p] = \left[\frac{L^2}{\tau^2 T} \right]; \\
 [\nu] &= [L^2 / \tau]; \quad [\alpha] = \left[\frac{M}{\tau^3 T} \right].
 \end{aligned}$$

2.3. Методы анализа размерностей

Далее, следуя Рэлею, представим α как степенной комплекс этих величин:

$$\alpha = AD^\alpha \rho^\beta W^\gamma \lambda^\delta c_p^\varepsilon \nu^\theta. \quad (2.3.1)$$

Тогда отношение их размерностей будет:

$$\left[\frac{M}{\tau^3 T} \right] = [L]^\alpha \left[\frac{M}{L^3} \right]^\beta \left[\frac{L}{\tau} \right]^\gamma \left[\frac{ML}{\tau^3 T} \right]^\delta \left[\frac{L^2}{\tau^2 T} \right]^\varepsilon \left[\frac{L^2}{\tau} \right]^\theta. \quad (2.3.2)$$

Приравнивая показатели при одинаковых основаниях в левой и правой частях этого равенства, получаем следующие четыре уравнения:

$$\text{для массы } 1 = \beta + \delta; \quad (a)$$

$$\text{для времени } 3 = \gamma + 3\delta + 2\varepsilon + \theta; \quad (б)$$

$$\text{для температуры } 1 = \delta + \varepsilon; \quad (в)$$

$$\text{для длины } 0 = \alpha - 3\beta + \gamma + \delta + 2\varepsilon + 2\theta. \quad (г)$$

Решая эти уравнения, находим: оmodellность

$$\alpha = -\theta - \delta; \quad \beta = 1 - \delta;$$

$$\gamma = 1 - \theta - \delta; \quad \varepsilon = 1 - \delta,$$

следовательно,

$$\alpha = AD^{-\theta-\delta} W^{1-\theta-\delta} (\rho c_p)^{1-\delta} \lambda^\delta \nu^\theta. \quad (2.3.3)$$

Эти множители можно сгруппировать так, чтобы получить широко принятые безразмерные комплексы Нуссельта $Nu = \alpha D / \lambda$, Рейнольдса $Re = WD / \nu$ и Прандтля $Pr = \nu / (\lambda / \rho c_p)$. Тогда:

$$\frac{\alpha D}{\lambda} = A \left(\frac{DW}{\nu} \right)^{1-\theta-\delta} \left(\frac{\nu}{\lambda / (\rho c_p)} \right)^{1-\delta}$$

или

$$Nu = A Re^m Pr^n, \quad (2.3.4)$$

где $m = 1 - \theta - \delta$; $n = 1 - \delta = m + \theta$.

Нуссельт первым (на основе анализа размерностей)¹⁹ предложил формулу:

$$\alpha = b \lambda d^{n-1} \left(\frac{\nu \rho c_p}{\lambda} \right)^n.$$

Позже, на основе экспериментального исследования теплоотдачи воздуха, CO_2 , водяного пара и светильного газа, Нуссельт предложил формулы:²⁰ для воздуха

$$\alpha = 18,86 \frac{\lambda}{d^{0,16} L^{0,054}} \left(\frac{\nu \rho c_p}{\lambda} \right)^{0,786},$$

обобщенную формулу

$$\alpha = 15,90 \frac{\lambda}{d^{0,214}} \left(\frac{\nu \rho c_p}{RT\lambda} \right)^{0,786}.$$

Еще позже на основе экспериментального исследования теплообмена в трубе на нефти, масле, воде, газе в диапазоне $\text{Re} = 15 \div 400$, $\text{Pr} = 1 \div 200$ предложена зависимость:²¹

$$\text{Nu} = (0,000016 \text{Re}^3 - 0,017 \text{Re}^2 + 10,8 \text{Re} - 53) \text{Pr}^{0,37}.$$

Рэлей применил свой метод анализа размерностей в 1915 году к задаче Буссинеска о передаче телом тепла к обтекающей его жидкости.²² При этом Рэлей не включил в формулу (2.3.1) коэффициент вязкости и получил критериальное уравнение, отличное от уравнения (2.3.4):

$$\text{Nu} = A \text{Re}^\gamma \text{Pr}^\gamma = A \text{Pe}^\gamma. \quad (2.3.5)$$

Развитием метода Рэрея является метод «исключения из матрицы», предложенный Тейлором.²³

В качестве примера использования указанного метода рассмотрим профиль скорости во внутренней части пограничного слоя. В качестве определяющих параметров примем следующие: скорость u , расстояние до стенки y , плотность ρ , коэффициент кинематической вязкости ν , касательное напряжение у стенки τ_w .

Далее составим матрицу, столбцы которой представляют основные единицы измерения (массу M , длину L , время τ), а строки – размерности определяющих параметров:

	M	L	τ	
u	0	1	-1	
y	0	1	0	
τ_w	1	-1	-2	(2.3.6)
ν	0	2	-1	
ρ	1	-3	0	

Теперь исключим размерность массы, разделив все, кроме одного, параметры, в размерностях которых содержится масса на оставшийся параметр,

2.3. Методы анализа размерностей

в размерность которого входит масса. В качестве такого опорного параметра выберем плотность ρ и получим:

$$\begin{array}{cccc}
 & M & L & \tau \\
 u & 0 & 1 & -1 \\
 y & 0 & 1 & 0 \\
 \tau_w / \rho & 0 & 2 & -2 \\
 \nu & 0 & 2 & -1 \\
 \rho & 1 & -3 & 0
 \end{array} \quad (2.3.7)$$

Исключая из матрицы размерность массы и плотность, переходим к исключению размерности времени, принимая в качестве опорного параметр τ_w / ρ :

$$\begin{array}{ccc}
 & L & \tau \\
 u / \sqrt{\tau_w / \rho} & 0 & 0 \\
 y & 1 & 0 \\
 \nu / \sqrt{\tau_w / \rho} & 1 & 0
 \end{array} \quad (2.3.8)$$

Размерность длины можно исключить только формируя комплекс $y\sqrt{\tau_w / \rho} / \nu$. Никаких других безразмерных комплексов сформировать нельзя. Итак, получаем соотношение:

$$\frac{u}{\sqrt{\tau_w / \rho}} = A \frac{y\sqrt{\tau_w / \rho}}{\nu}$$

или

$$u^+ = Ay^+, \quad (2.3.9)$$

где $u^+ = u / u^*$; $y^+ = yu^* / \nu$; $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ – динамическая скорость.

Рассмотрим еще одну задачу. Пусть шар диаметром d обтекается жидкостью, кинематический коэффициент вязкости которой ν , а плотность ρ , со скоростью w . Считая режим обтекания шара жидкостью чисто вязкостным, необходимо определить силу сопротивления шара F .

Составим исходную матрицу размерностей:

$$\begin{array}{cccc}
 & M & L & \tau \\
 d & 0 & 1 & 0 \\
 \nu & 0 & 2 & -1 \\
 \rho & 1 & -3 & 0 \\
 w & 0 & 1 & -1 \\
 F & 1 & 1 & -2
 \end{array} \quad (2.3.10)$$

Применяя метод Тейлора, последовательно получим следующие матрицы:

$$\begin{array}{cc}
 & L \quad \tau \\
 d & 1 \quad 0 \\
 v & 2 \quad -1 \\
 w & 1 \quad -1 \\
 F/\rho & 4 \quad -2
 \end{array}
 ; \quad
 \begin{array}{cc}
 & L \quad \tau \\
 d & 1 \quad 0 \\
 \frac{\tau}{\rho w v} & 1 \quad 0
 \end{array}
 ; \quad
 \begin{array}{cc}
 & L \\
 d & 1 \\
 \frac{\tau}{\rho w v d} & 0
 \end{array}
 .$$

Отсюда окончательно получаем:

$$F = A \rho w v d, \tag{2.3.11}$$

где постоянная A , в соответствии с решением Стокса, равна 3.

Приведенные выше примеры показывают, что анализ размерностей позволяет отыскать безразмерные комплексы в том случае, когда уравнения связи не могут быть записаны. Более того, анализ размерностей позволяет определить вид уравнения связи между безразмерными комплексами, если число основных единиц измерения равно числу определяющих параметров, основанием чему служит формула размерностей (2.1.7). Таким образом, анализ размерностей тем эффективнее, чем меньше число параметров, определяющих изучаемую величину, и чем больше число основных единиц измерения.

Правильный выбор определяющих параметров представляет собой трудную задачу. Единственное правило, которым можно руководствоваться при выборе системы определяющих параметров, состоит в том, что в этой системе должны обязательно быть величины с размерностями, через которые могут выразиться размерности всех зависимых параметров. Если система определяющих параметров неполна и ее расширение исключается по существу задачи, то это означает, что определяемая величина равна либо нулю, либо бесконечности. С таким случаем встречаются, например, при задании начальных условий с помощью δ – функции.²⁴

В том случае, когда возникают сомнения относительно целесообразности учета какой-либо физической величины, разрешается включать ее в рассмотрение и по виду конечной формулы судить затем о том, насколько необходима эта величина.²⁵

Выбор числа основных единиц измерения также произволен и определяется методами измерения величин, входящих в рассматриваемую задачу. В науке можно было наблюдать тенденцию к введению системы единиц измерения с минимальным числом основных единиц. Число независимых единиц измерения можно сократить до одной. Более того, можно построить единственную систему единиц измерения, основанную на выбранных фи-

зических постоянных (например, на гравитационной постоянной, скорости света и вязкости воды), значение которых принимаются в качестве абсолютных универсальных постоянных.²⁶ Это равносильно полному устранению понятия размерности.

В анализе размерностей стремление уменьшить число основных единиц измерения приводит к известному парадоксу Д. П. Рябушинского.²⁷

Рябушинский показал, что формула Рэлея

$$\text{Nu} = \frac{\frac{\zeta}{8} \text{Re Pr}}{1 + \eta_1 (\text{Pr} - 1) \sqrt{\zeta / 8}}$$

была бы иной и менее удачной, если температура рассматривалась бы не как независимая величина, но как усредненная кинетическая энергия молекул, имеющая размерность $[\text{Дж}] = [ML^2 / \tau^2]$.

Ни Рэлей, ни (позже) Бриджмен²⁸ не смогли разъяснить парадокс Рябушинского. Объяснения этого парадокса содержатся в работах М. В. Кирпичева²⁹ со ссылкой на Т. А. Афанасьеву-Эренфест, Л. И. Седова,³⁰ Г. Хантли.³¹

Еще О. Рейнольдс в 1895 году писал,³² что «существует определенная причина, отделяющая осредненное движение от теплового, благодаря которой периоды осредненных скоростей, как по времени, так и в пространстве, отличаются по величине от периодов соответствующих тепловым движениям». Далее О. Рейнольдс отмечает, что тепловые и механические процессы описываются различными системами уравнений, в каждую из которых входит уравнение связи, отражающее взаимное преобразование тепловой и механической энергией. В задаче Буссинеска таким взаимным преобразованием энергий можно пренебречь. С этих позиций неправомерно представлять температуру через внутреннюю энергию движения молекул, которая не входит в систему уравнений, описывающих механическое движение жидкости. М. В. Кирпичев отмечает, что в анализе Д. П. Рябушинского неоправданно приравнены друг к другу размерности величин разной физической природы, какими являются скорость жидкости и скорость движения молекул, никак не связанные между собой. Таким образом, выбор системы единиц измерения требует глубокого понимания существа физической задачи и во многом предопределяет практическую ценность анализа размерностей.

Развитием этих идей является метод анализа размерностей, разработанный Г. Хантли.³³ Хантли исходит из того, что между физическими величинами и их формулами размерностей должно быть взаимно-однозначное соответствие. В широко распространенной системе единиц измерения $[L]$, $[M]$, $[\tau]$ часто одна и та же размерность соответствует более чем одной физической величине. Например, размерность $\nu [L^2/\tau]$ кинематического коэффициента вязкости совпадает с размерностью коэффициента температуропровод-

ности $a = \lambda / \rho c_p$. Устранение подобной неоднозначности Г. Хантли достигает на пути увеличения числа основных единиц измерения. Такой путь имеет то практическое преимущество, что более жестко ограничивает число допустимых соотношений между величинами в формуле размерностей и дает возможность получить некоторые формулы физики с точностью до постоянного множителя, показатель степени в которых не может быть получен на основе традиционных методов анализа размерностей.

В силу того, что реальные физические величины часто являются векторными и определяются тремя скалярными величинами, Г. Хантли вводит векторную единицу измерения длины, которая также определяется тремя величинами $[L_x]$, $[L_y]$, $[L_z]$, являющимися более первичными, чем скалярная единица измерения длины $[L]$. Аналогичным образом Г. Хантли поступает с массой. Указывая ее двойственный характер, он вводит единицу массы как меры инерции $[M_i]$ и единицу массы как меры количества вещества $[M_m]$. К сожалению, применительно к задаче Буссинеска метод Хантли не позволяет получить дополнительной информации по сравнению с формулой (2.3.5).³⁴

Описанные выше методы анализа размерностей связаны с выявлением безразмерных критериев-комплексов и вида уравнения связи между ними. Новый приближенный способ выявления связи между критериями-комплексами и симплексами на основе использования предельных форм теории размерностей предлагает Н. Д. Кришталь.³⁵

Суть этого метода заключается в следующем. Считается, что в состав определяющих параметров входят две величины, имеющие одинаковые размерности и физическую природу, причем одна из них входит в число параметров с независимыми переменными. Пусть для определенности это будут параметры l_1 и l_2 , а симплекс, построенный на их основе, имеет вид:

$$S_l = l_2 / l_1.$$

Определяющий параметр l_1 может входить во все остальные безразмерные комплексы, структура которых принимается одинаковой:

$$\pi_i = A_i l_1^{p_i}, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (2.3.12)$$

Не снижая общности окончательных результатов, уравнение (2.3.12) запишем следующим образом:

$$\pi_0 = f(\pi_1, \dots, \pi_k, S_l). \quad (2.3.13)$$

Н. Д. Кришталь ставит задачу организовать такой способ построения безразмерных комплексов π_i , при котором в некоторой области изменения параметра S_l можно будет отказаться от его учета в уравнении (2.3.13). Это достигается усложнением структуры комплексов. В группу определяющих параметров с независимыми размерностями вводится новая величина l_* ,