Сергей Деменок

СУПЕР ФРАКТАЛ

ПРОСТО

УДК 501+514+ 001
ББК 22 + 72.3
Д 30

Д 30 **Деменок С. Л.** Суперфрактал. — СПб.: ООО «Страта», 2015. — 196 с.

ISBN 978-5-906150-172

Эта книга включает дополненный и переработанный материал предыдущей работы автора «Просто Фрактал».

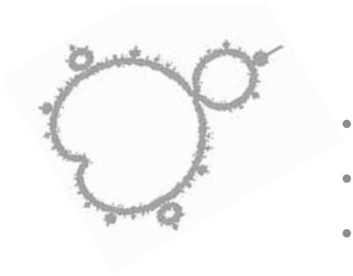
Фрактальную геометрию открыл Бенуа Мандельброт в конце 1970-х годов. Фракталы появились на обложках глянцевых журналов и сразу привлекли внимание не только учёных и инженеров, но также дизайнеров и модельеров. Фракталы оказались полезными не только как математический инструмент для расчёта и описания сложных, рваных, «измятых» или изрезанных форм, но также для иллюстрации и интерпретации симбиоза на первый взгляд антагонистических идей и представлений. Мир не фрактален. Но фрактал блестяще иллюстрирует сложные сетевые структуры, которые не имеют фундаментальных элементов, не имеют «дна элементарности». Фрактал иллюстрирует единство формы, алгоритма и математического символа.

Настоящая книга призвана популяризировать основные положения фрактальной геометрии вплоть до самых новейших.

ISBN 978-5-906150-172

СОДЕРЖАНИЕ

I. ПУТЕШЕСТВИЕ К ИСТОКАМ



- Лис в сапогах
- Назвать – значит узнать
- Фракталы в природе и в искусстве
- Мифы и мистификации
- Для простоты – усложняй!
- Дьявольский полимер
- Дьявольская лестница
- Божественная пропорция
- Капризы случая
- Просто сингулярность
- Просто единица

ЛИС В САПОГАХ

Однажды я заснул, после того как перечитал своей трёхлетней дочери замечательную детскую английскую книжку «Tom Fox and the Apple Pie». И во сне ко мне явился лис. Сначала проступил его большой любопытный нос, потом недоверчивая ухмылка, потом — голова и торс. Материализовавшаяся часть лиса тут же облокотилась на невесть откуда возникшую шахматную доску и принялась трясти стаканчиком уличного напёрсточника — на доску высыпалась пригоршня цифр. Лис задумчиво расставлял их по клеткам, выстраивая некий порядок: 1, 2, 3, 5, 8, 13... На этой цифре он лукаво подмигнул и явился в полный рост. Лис был в сапогах. Всё так же ниоткуда возникли венское кресло, фолиант в кожаном переплёте, чернильница и гусиное перо. В кресле лис в сапогах устроился вальяжно. С показным удовольствием он открыл фолиант, на титульном листе которого я мог без труда прочитать название: «Слухи и сплетни, ходившие в Лиме в изящном 1826 году» перуанского писателя Ное Кальсадильяса[1]. Только теперь я обратил внимание на круглое выпуклое зеркало, висевшее на стене комнаты. В зеркале XV века лис отражался причудливо. Он располнел и был более похож на кота, нежели чем на лиса. При этом вместо фолианта в кожаном переплёте в руках у кота в сапогах был тоненький хромированный планшетник, вместо чернильницы — толстая таблетка памяти, а вместо гусиного пера — сканер-карандаш. Сидел зазеркальный кот в кожаном вращающемся кресле, положив ногу на ногу и демонстрируя сапоги a la Camouflage[2]. Перед ним простиралась столешница из матового стекла, на которой по какой-то причине встретились английский зонтик и швейная машинка «Зингер». Зазеркальный кабинет своей стерильной белизной напоминал анатомический театр или белое пространство матрицы из одноимённого культового фильма. Каждым жестом кошачье отражение лиса точно повторяло свой прообраз. Настолько, что не оставалось сомнений: они читают и правят один и тот же текст. Причём после каждой правки вокруг происходили едва различимые

1 Увы, единственное упоминание об этой книге и её авторе содержится в романе лауреата Нобелевской премии по литературе 1982 г. Габриэля Гарсиа Маркеса «Генерал в своём лабиринте» (1989), так что искать сей труд в библиотеках не стоит. *[Здесь и далее прим. ред.]*.

2 ***A la Camouflage*** – здесь, известный бренд резиновых сапог (*фр. camouflage* – «маскировка» – под камуфляж, т. е. пятнистой маскировочной окраски).

и точно согласованные изменения. Например, когда в комнате исказился узор на персидском ковре, то синхронно с ним изменился узор Морриса на обоях в зазеркальном кабинете. На лице у лиса появлялись морщинки, на голенищах сапог — новые складки. Пластика перемен исключала разрывы реальности. Всё вокруг трансформировалось настолько согласованно, что во сне чувство реальности не ослабевало, но только усиливалось. Реальный лис в сапогах и отражённый кот в сапогах, заговорщически подмигнули друг другу, и первый пропел тему «Тонального канона» Баха. Не успел лис завершить, как зазеркальный кот подхватил её, взяв на несколько тонов выше. И едва он довёл тему до конца, как её же подхватил лис, взяв ещё несколькими тонами выше. Так продолжалось, пока от «Музыкального приношения» Баха не осталось ни единого звука, доступного слуху. Реальный лис при этом перелистывал свой фолиант — от конца к началу — и, дойдя до титульного листа, озадаченно почесал гусиным пером за ухом. На титульном листе теперь можно было прочесть новое название — «Слухи и сплетни о высшем замысле в памятном 2011 году» английского учёного Хопкайнда. Лис и кот принялись редактировать новейший текст без какого-либо перерыва. Однако один из них промурлыкал нечто вроде: «nomen est numen» (латинский: назвать — значит узнать), — а второй в той же тональности: «почти постав». Обе фразы могли быть наполнены разными смыслами и потому оставались бессмысленными. Тем временем происходящее во сне становилось всё «страньше и страньше». В процессе едва уловимых искажений реальная комната стала клинически белой, тогда как зазеркальная обрела декор в стиле модерн начала прошлого века. Да и кот с лисом будто поменялись местами. Процесс, который захватил их обоих, состоял как будто из повторяющихся операций, но при этом представлял собой совершенно непредсказуемый операциональный ряд. Единственное, что оставалось неизменным, были сапоги. И сапоги действительно заслуживали внимания. По форме они напоминали «сапоги Карла Шварца». Их голенище собиралось частыми треугольными складками, площадь которых, как известно, ничем не ограничена, а размерность чуть превышала размерность гладкой поверхности, равной двум. Как ни странно, меня не покидала уверенность, что вся реальность сна слажена и согласована именно присутствием этого странного символа — фрактальных складок на голенище сапога. Во сне это представлялось и естественным, и логичным, очевидным на уровне здравого смысла. По чистой случайности мысль зацепилась за фрактальный сапог именно в тот момент, когда в комнату начали проникать посторонние звуки, которые, нарастая, оформились в дружное разноголосье птиц, предвещающих рассвет. Их пение пробуждает мягко и сохраняет не только флёр сна, но также его сюжет и смысл.

Проснувшись, я уже не мог ничего поделать с потребностью разобраться, откуда и как взялись фракталы. И это стало побудительным мотивом к написанию книги.

НАЗВАТЬ – ЗНАЧИТ УЗНАТЬ

Nomen est numen – эта мысль, столь естественная вплоть до позднего Средневековья, становится крамольной в эпоху господства естественнонаучного познания и сопутствующего ему развития индустриального общества. Однако всё переменилось. Самая радикальная революция изо всех, произошедших в XX веке, случилась в тишине и осталась почти незамеченной. Её манифест производит впечатление парадокса: истины не существует. Точнее, не существует трансцендентной, объективной, абсолютной истины. Этот переворот мысли ведёт в самую гущу окружающей нас реальности, отличительным качеством которой стал символический обмен. В символическом мире означающее сливается с означаемым до такой степени, что назвать – действительно значит узнать. История появления фрактала иллюстрирует то, как эта идея проникает в самую сердцевину рационального мышления – в математику.

Ещё в начале XX века Анри Пуанкаре заметил:

> *«Удивляешься силе, которую может иметь одно слово. Вот объект, о котором ничего нельзя было сказать, пока он не был окрещён. Достаточно было дать ему имя, чтобы произошло чудо».*

Так и случилось, когда в 1975 году по созвучиям и подобиям сотрудник научно-исследовательского центра «IBM» в Йорктауне французский математик польского происхождения Бенуа Мандельброт собрал Слово.

Из латинских слов *frangere* (ломать) и *fractus* (разрывный, дискретный, дробный) сложился фрактал. Слово получилось созвучным английским *fracture* (разрыв) и *fraction* (дробь). Более того, помимо значения «фрагментированный» (как, например, в словах «фракция» или «рефракция»), слово *fractus* имеет значение «неправильный по форме» – примером сочетания обоих значений может служить слово «фрагмент». Однако фрактал – не фрагмент. Мандельброт без намерения, быть может, только по наитию встроил в последний слог термина «фрактал» одну из самых важных ассоциаций (FRACTionAL) – алгоритм. Здесь уместно напомнить, что слово «алгоритм» – латинизированная форма имени Ал-Хорезми. Алгоритм есть правило, инструкция, рецепт, суть которых сводится к формуле – «делай то, затем это». Вы понимаете, почему компьютеры любят алгоритмы? Потому, что любят чёткие, скучные, повторяющиеся операции. Но именно благодаря этой способности компьютеров выполнять рутинные задачи без устали и потери фокуса внимания стало возможным создание фрактальной геометрии. Мандельброт работал на фирме IBM и по роду службы имел дело с лучшими на то время компьютерами. Без вычислительной техники фрактальная геометрия не могла бы сформироваться и захватить внимание научного сообщества.

Подобно опытному бренд-менеджеру, Мандельброт искусно продвигал и пропагандировал фрактал как бренд с опорой на эмоциональную привлекательность и рациональную полезность. Полезность нового математического объекта он иллюстрирует в трёх монографиях: «Фрактальные объекты: форма, случайность и размерность» (1975), «Фракталы: форма, случайность и размерность» (1977) и «Фрактальная геометрия природы» (1982). Не забыл Мандельброт и про броский слоган:

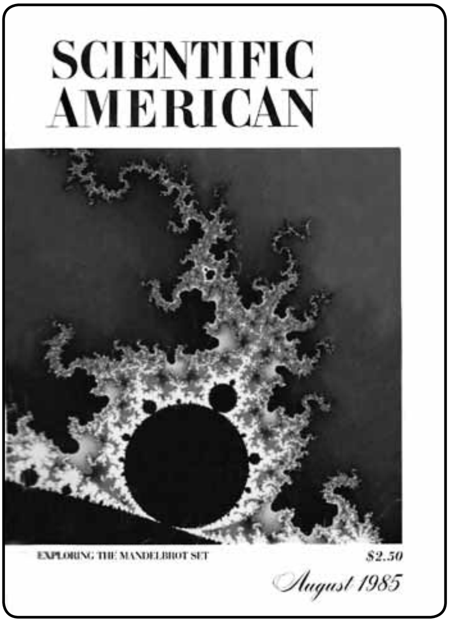
«У геометрии природы – фрактальное лицо».

У новой геометрии появляется логотип – «фрактал Мандельброта», который появляется на глянцевых обложках журналов и становится украшением выставок компьютерного искусства в восьмидесятых годах XX века. Всё без чудес – естественно. Техника продвижения новой идеи в массы не отличается от продвижения новейших гаджетов. Рекламную компанию поддержали. Немецкие математики Хайнц-Отто Пайтген и Ханс Петер Рихтер выпускают роскошно иллюстрированную книгу «Красота фракталов». Майкл Барнсли из Джорджийского технологического института (США) публикует монографию «Фракталы повсюду», в предисловии к которой предостерегает:

«Фрактальная геометрия изменит ваше представление о мире. Дальше читать опасно. Вы рискуете утратить детское восприятие облаков, пены, галактик, листьев, цветов, скал, водных брызг и многого другого. Никогда вновь ваше впечатление о мире не станет прежним».

Что ещё нужно для завладения вниманием? Скандал. И он развернулся в дискуссиях на страницах журнала «Математический информатор» («Mathematical Intelligencer»). В очередь за славой изобретателей ещё вчера безымянной геометрии, а сегодня геометрии фрактальной, выстроилась целая очередь учёных-математиков. Одни из них, Р. Брукс и Дж. Мателски (с подачи Стивена Дж. Кранца в упомянутом выше журнале), утверждали, будто именно они если не изобретатели, то уж никак не меньше, чем соавторы или вдохновители теории фракталов. Ведь они, по их мнению, описали фракталы в своей работе, вышедшей за два года до труда Мандельброта. Загадкой оставалось лишь то, почему эти два учёных не придавали своему «открытию» никакого значения до тех пор, пока Мандельброт не опубликовал свой труд, а Кранц не натолкнул их на некоторые моменты в их работе, из которых можно прийти к фрактальной теории. К гонке за лидерством

Фрагмент множества Мандельброта на обложке журнала Scientific American. Август 1985 г.



подключился и Билл Б. Хаббард, утверждая, будто Мандельброт открыл теорию фракталов с подачи его, Хаббарда, аспиранта Кочмена, наблюдавшего множество Мандельброта на мониторе компьютера в 1976 году и якобы рассказавшего об этих исследованиях Мандельброту в 1978-м. Разумеется, проверить наличие чего бы то ни было на экране компьютера в 1976 году теперь попросту невозможно. Конфликт набирал обороты, и, наконец, Хаббард, Мателски и Брукс предприняли попытку отдать первенство в изобретении известному французскому математику Пьеру Фату (1878–1929), который описал одно из фрактальных множеств – пыль Фату – ещё в 1906 году. Эта попытка была не более логичной, чем предыдущие, и завершилась так же, как и они, – ничем. Отбирать первенство у Мандельброта такими аргументами всё равно, что лишать Исаака Ньютона права называться автором закона всемирного тяготения лишь на том основании, что до него многие учёные наблюдали действие этого закона. Однако ведь никто другой не смог его сформулировать и формализовать. Точно так же с фрактальными формами сталкивались многие математики – немец Георг Кантор ещё в XIX веке, швед Нильс Фабиан Хельге фон Кох, итальянец Джузеппе Пеано и поляк Вацлав Франциск Серпинский – в XX столетии. С фрактальными объектами работали многие архитекторы, со времен готики и барокко. Вы легко найдёте фрактальные фрагменты у многих художников и скульпторов, но сколько бы человек ни сталкивалось с фрактальными формами до Мандельброта, именно последний чётко выделил и дал определение фракталу, выписав ему путёвку в жизнь. Можно даже сказать, что до работы Мандельброта фракталы в чистом виде для математиков не существовали. Как художник из набора всем известных и доступных красок создаёт произведение искусства, меняющее мировоззрение поколений и делающее автора известным, так и Мандельброт из всем известных форм и элементов создал фрактальную геометрию природы. Именно по этой причине изобретателем фрактала следует считать Мандельброта и никого другого. Хотя он и не дал строгого математического определения фрактала, однако назвал его, чего ранее не сделал никто. И не следует игнорировать старую максиму «назвать – значит узнать».

ФРАКТАЛЫ В ПРИРОДЕ И В ИСКУССТВЕ

Мандельброт предчувствовал значение введённого им понятия «фрактал» и потому не спешил с его формальным определением. Он писал:

> *«В 1975 году я придумал термин „фрактал“, чтобы дать название моей первой работе в этой области. Однако я не стал приводить математическое определение, чувствуя, что это понятие, как и хорошее вино, требует выдержки, прежде чем оно будет разлито по бутылкам».*

Тем не менее, он обозначил контуры фрактальной геометрии, отличной от Евклидовой. Отличие не относилось к аксиоме о параллельности, как в геометриях Лобачевского или Римана. Отличие заключалось в отказе от принятого Евклидом по умолчанию требования гладкости. Мандельброт обратил внимание на то, что контуры окружающих предметов неровны, шершавы, изъязвлены множеством отверстий самой причудливой формы, пронизаны трещинами и порами, покрыты сетью морщин, царапин и кракелюр. Таким объектам присущи шероховатость, пористость или раздробленность, причём многие из них обладают указанными свойствами «в одинаковой степени в любом масштабе». В природе нет недостатка в подобных формах: подсолнух и брокколи, морские раковины, папоротник, снежинки, горные расселины, береговые линии, фьорды, сталагмиты и сталактиты, молнии. Неправильные и фрагментарные формы – облака, горы, листья – демонстрируют повтор почти однотипных фрагментов при разных масштабах наблюдения. Вот на рисунке – кленовый лист, вот горный ландшафт, за ним фрагмент горной породы, далее – частицы грунта. Эти застывшие на рисунке формы на самом деле изменяются – облака движутся, пламя мерцает, лист увядает. И, если это движение фиксировать на киноплёнку, то каждый последующий кадр будет похож на предыдущий,

но при этом будет чуть-чуть от него отличаться. Этому «почти повторению» «по времени» сопутствует такое же повторение «по ансамблю». Как писал философ и поэт Яков Эммануилович Голосовкер,

> *«ни один лист на дереве не адекватен любому другому, но тем не менее на берёзе ежегодно появляются только берёзовые листья, а не листья липы, тополя, дуба».*

Люди внимательные и наблюдательные издавна замечали, что некоторые формы демонстрируют повторяющуюся структуру при рассмотрении их «вблизи или издалека». Приближаясь к таким объектам, мы замечаем, что изменяются лишь незначительные детали, но форма в целом остаётся почти неизменной. Исходя из этого, фрактал проще всего определить как геометрическую форму, содержащую в себе повторяющиеся элементы в любом масштабе. Когда мы приближаемся, желая что-либо лучше разглядеть, изменяются лишь незначительные детали, так что каждый малый участок фрактала представляет собой «ключ ко всему фракталу, как к единому целому». Мандельброт получил престижную премию Вольфа в 1993 году за «изменение нашего взгляда на мир посредством концепции фрактальной геометрии». Теперь фрактальные формы стали различимы в произведениях человеческой деятельности – в математике, архитектуре, физике, биржевой торговле и даже в музыке.

Например, парижская башня, спроектированная Гюставом Эйфелем, состоит из ферм на основе треугольников. Выбор треугольного основания обусловлен тем, что треугольник – в отличие от прямоугольника – не может быть деформирован без деформации по крайней мере одной из его сторон. В конструкции Эйфеля отдельные элементы больших ферм сами представляют собой фермы, которые, в свою очередь, состоят из ферм ещё меньшего размера. Такая самоподобная конструкция гарантирует высокую прочность при низком весе. Ажурные купола Бакминстера Фуллера также наглядно демонстрируют, что прочность есть результат ветвления фрагментов конструкции на сходные встроенные друг в друга элементы.

Природа, подобно произведениям Баха или Бетховена, часто начинает с основной темы, а затем на протяжении всей симфонии повторяет её бесчисленные вариации.

Фракталы обнаружились и в музыкальных произведениях. Например, в канонах Баха одна и та же тема играется на фоне самой себя. Тема задаётся первым голосом; спустя определённое время вступает второй, исполняя её же; через такое же время вступает третий голос – и так далее. Такова фуга, где основную мелодию тоже ведут несколько голосов, но не столь строго и линейно, как в классическом каноне. Приметой фуги является её начало: один голос исполняет тему до конца. Затем вступает второй голос, четырьмя тонами выше или тремя ниже первого. Первый голос в это время ведёт дополнительную тему, подобранную так, чтобы дать мелодический контраст к основной теме. Последующие голоса вступают по очереди, исполняя основную тему. Когда все голоса «прибывают» к завершающей ноте, ангельское сладкоголосье сбивается на тревожный стон, напоминая, что космическая гармония неотделима от космического хаоса.

И хаос пугает. В серии картин «Крик» норвежский художник-экспрессионист Эдвард Мунк выразил именно этот испуг. В Средние века на страже против хаоса люди держали химер – тварей с львиными головами, козлиными телами, драконьими хвостами, вдобавок плюющихся огнём. И в математике ко времени появления фракталов существовали свои «монстры»: непрерывные и недифференцируемые одновременно множества – такие, как «пыль Кантора», «снежинка Коха», «ковёр Серпинского», «губка Менгера» и многие другие. Они охраняли границы существовавших в то время представлений о порядке. Появление фракталов продвинуло эти границы настолько, что «монстры» в новой интерпретации стали не только нормальными, но и высшей степени правильными формами – каноническими фракталами. Теперь не только эти «безобразные» формы стали привычными и узнаваемыми, но подобные им оказались различимы во всём окружающем: в природе, в искусстве, в науке и даже в быту.

Фракталы сразу обнаружили себя на полотнах живописцев. И не только Джексона Поллока, Маурица Корнелиса Эшера или Сальвадора Дали, но также на полотнах Хокусаи и Леонардо да Винчи. На их картинах постепенное и филигранно точное накопление отличий не нарушает единого целого, благодаря тому, что каждый фрагмент созвучен целому, каждый «есть Альфа и Омега, начало и конец, первый и последний».

В «Откровении» святой Иоанн Богослов пишет:

«И видел я в деснице у Сидящего на престоле книгу, написанную внутри и отвне, запечатанную семью печатями... Книга раскрыта, которая есть книга жизни... И вокруг престола 24 престола; а на престолах видел я сидевших 24 старца, которые облечены были в белые одежды и имели на головах своих золотые венцы. И от престола исходили молнии и громы и гласы, и семь светильников огненных горели перед престолом, которые суть семь духов Божиих».

Всё верно: мир представляет собой точный лад вверху, внизу и посередине, на любом уровне, в любом масштабе. И вот уже Джордано Бруно замечает:

«То, чего нельзя увидеть в малом, легко можно заметить в большом; в целом открывается то, что скрыто в отдельной части».

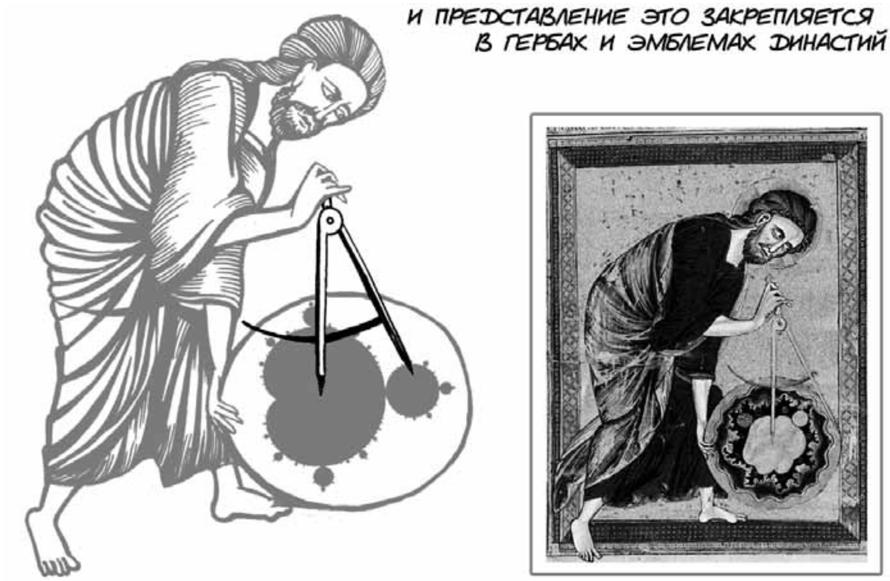
Нечто подобное высказал и Людвик Флашен:

«Книгу можно открыть на любой её странице. Каждая страница содержит её целиком».

Эта идея издавна присутствует и в изобразительном искусстве. Чего стоят одни зарисовки видений Хильдегарды Бингенской (род. 1098 г.), основательницы бенедиктинского монастыря Рупертсберг близ Бингена на Рейне. Ей, христианской провидице, внимали императоры и папы римские.

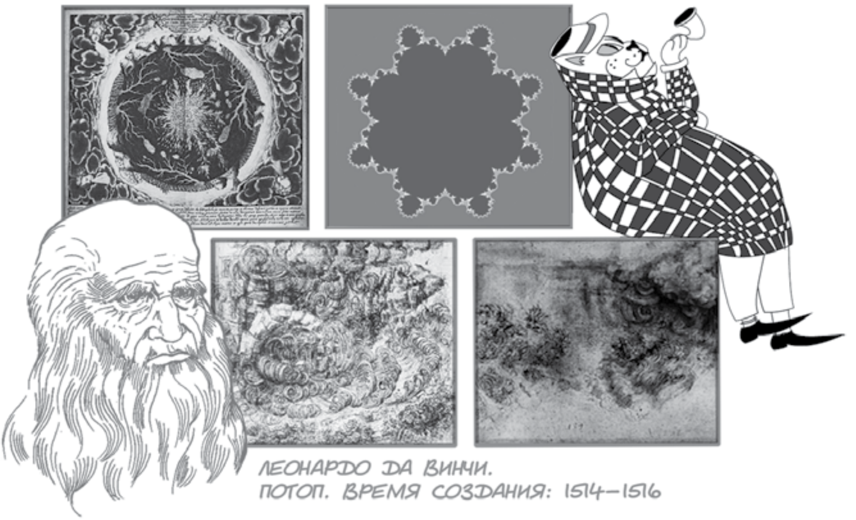
Два столетия спустя те, кто первыми брал в руки вышедшую в середине XIII века «Морализованную Библию», должно быть, представляли мир таким, как он изображён на гравюре «Бог измеряет мир циркулем», – замысловатым разнообразием форм, сопряжённых в единое соразмерное целое.

Невозможно обойти вниманием и труды Атанасиуса Кирхера, девиз которого «omnia in omnibus» – «всё во всём». Он – девятый ребёнок в семье профессора теологии Иоганна Кирхера, получил прекрасное образование. В 26 лет, уже имея докторскую степень и занимая должность профессора математики, философии и восточных языков Вюрцбургского университета, он занимается теологией, математикой, естественными науками, географией, лингвистикой, древностями. Во время Тридцатилетней войны бежит от протестантов сначала в Авиньон, а потом в Рим. Во время



своих бесчисленных путешествий, от границ Европы до самого Китая, Кирхер занимался геологическими исследованиями, наблюдал за действиями приливов и отливов, брал пробы почв, а после извержения Везувия даже спустился по верёвке в кратер, чтобы сделать замеры изнутри. Он написал монументальные труды по математике, медицине, геологии, географии, геодезии, археологии, астрономии, теологии, алхимии, чудесам и политике. Он придумал множество механических машин, сконструировал магнитные часы, примитивный калькулятор и аппарат для геодезических расчётов. Жадно набросился на изобретения того времени – вроде телескопа и микроскопа: он смог распознать солнечные пятна там, где их никто не видел, и разглядел бациллу чумы прежде, чем микроскоп был усовершенствован для наблюдения за бактериями. Он владел искусством налаживать связи между, казалось бы, совершенно разными вещами и понятиями. Его убеждённость в том, что всё соотносится со всем и любая часть, какую ни возьми, накрепко сцепляется с целым, неизбежно вела к поиску связей и почти болезненной потребности в систематизации и коллекционировании. Им написаны четыре десятка трактатов по самым разнообразным предметам, где рядом с точными сведениями излагаются фантазии, не имеющие сколько-нибудь серьёзных оснований, но захватывающие. Трудно поверить, что этот умнейший человек не отдавал себе отчёта, как важно захватить внимание и вызвать эмоции у читателя и насколько сильна страсть к тайнам, скрытым аналогиям,

СХЕМА СТРОЕНИЯ ЗЕМЛИ
ИЗ КНИГИ АТАНАСИУСА КИРХЕРА "MUNDUS SUBTERRANEUS" (1664)
И ФРАКТАЛ МАНДЕЛЬБРОТА



ЛЕОНАРДО ДА ВИНЧИ.
ПОТОП. ВРЕМЯ СОЗДАНИЯ: 1514–1516

кодам, магическим трюкам и мистификациям. На его зарисовках легко угадываются формы, очень напоминающие фрактальные.

И позднее, в эпоху Возрождения, мы видим, как снова и снова люди обращали внимание на явления, форма которых в современном понимании фрактальна. Под конец жизни Леонардо тщетно пытался изобразить то, что не могло быть изображено, – astrapen, bronten, ceraunobolian – молнии, бури, облака. Облака и пену не ухватишь пальцами, и Леонардо пытался зафиксировать саму их суть на кончиках пера или кисти. Он писал:

> *«Обратные вихри ветра... взмутили воды и образовали в них огромную полость и подняли их в воздух в форме колонны, окрасив в цвет облака».*

Его последняя работа – рисунки потопа – завораживают и гипнотизируют. На них волны, изгибаясь сверху и закручиваясь снизу, создают причудливое образование – воздух, проницающий воду – пену.

Эффект сохранения непрерывно распыляющейся формы замечали и пытались фиксировать многие, но тщетно. До тех пор, пока в последней четверти XX века Бенуа Мандельброт не открыл технику изображения «облаков и пены» – фрактальную геометрию. Отныне на экранах мониторов по расчёту появлялись узоры причудливые и прекрасные. Но они ещё и арифметически точны.

Такое редкое сочетание качеств делает фрактал символом, который обрастает смыслами – мистификациями и мифами.

МИФЫ И МИСТИФИКАЦИИ

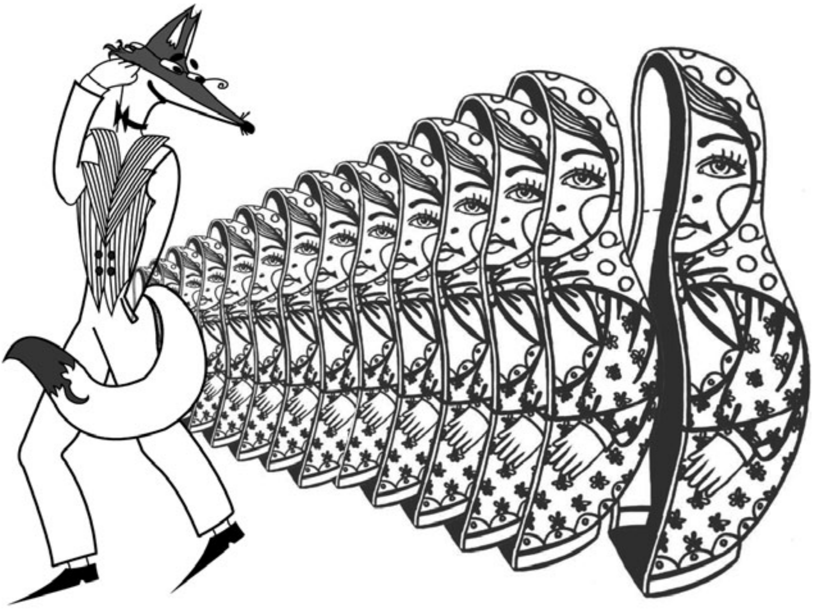
Фрактальный миф начинает формироваться с момента появления понятия «фрактал». Тот факт, что фрактальные структуры часто наблюдаются на границе порядка и хаоса – «фракталы там, где хаос», – всё чаще интерпретируют со сдвигом смысла – «хаос там, где фракталы». Если в первых книгах о фракталах («Фракталы и хаос в динамических системах» Ричарда М. Кроновера или «Фракталы, хаос, степенные законы» Манфреда Шредера) фрактал есть инструмент описания процессов на границе порядка и хаоса, то более поздние книги («Хаос и фракталы» Хайнц-Отто Пингена и др. или «Введение в нелинейную динамику: хаос и фракталы» Гринченко и др.) рассматривают фрактал в одном ряду с категорией хаоса. Этот сдвиг в интерпретации фрактала смещает акцент от рассмотрения «вселенной фракталов» к рассмотрению «Вселенной как фрактала».

Эта фикция приобретает статус факта в общественном сознании в тот момент, когда на новостных лентах появляются сообщения, подобные следующему:

«Группа астрономов пришла к выводу, что материя во Вселенной распределена в виде фрактала. Традиционно считается, что при увеличении масштаба распределение материи во Вселенной становится непрерывным. Опровержение этого постулата может привести к пересмотру существующих моделей Вселенной».

Таким образом, исходный, рациональный посыл «фрактал – один из объектов реальности» трактуется в новом мифическом смысле: объективная реальность есть фрактал. На самом деле мир не фрактален. Но фрактальная аналогия оказывается полезной и конструктивной во многих случаях.

Открытый Мандельбротом новый пласт форм стал золотой жилой для дизайнеров, архитекторов, инженеров. Несчётное число фракталов строится по одним и тем же принципам многократного повторения. Отсюда фрактал проще всего определить как геометрическую форму, которая содержит в себе повторяющиеся элементы в любом масштабе. Эта геометрическая форма локально неизменна (инвариантна), масштабно



самоподобна и целостна. Фрактальная форма раскрывается по мере приближения, а на удалении она сама тривиальность.

Как русская матрёшка или мифическое «яйцо Брахмы» – символ бесконечной вставленности миров друг в друга.

Идея настолько проста и настолько очевидна, что трудно поверить, будто никто до Мандельброта не решился её оформить и формализовать...

Весной 1999 года научный мир был буквально ошарашен удивительным открытием, оказавшимся искусной мистификацией. Благодаря историческим изысканиям, предпринятым немецким профессором комбинаторики Робертом Шипке, всеобщим достоянием стали гениальные труды малоизвестного прежде немецкого учёного Удо Ахенского, монаха, жившего и работавшего в период примерно с 1200 по 1270 годы. Как-то раз по случаю Роберту Шипке довелось посетить кафедральный собор города Ахена (Германия), где в одной из витрин с примечательными древними экспонатами он увидел церковный манускрипт XIII века, приковавший внимание математика. Всё дело было в иллюстрации, изображавшей вполне традиционный сюжет со Святым семейством, но каноническая Вифлеемская звезда в небе имела необычный вид.

Приглядевшись как следует, Шипке с изумлением обнаружил, что звезда явно имеет характерную форму фрактала Мандельброта.

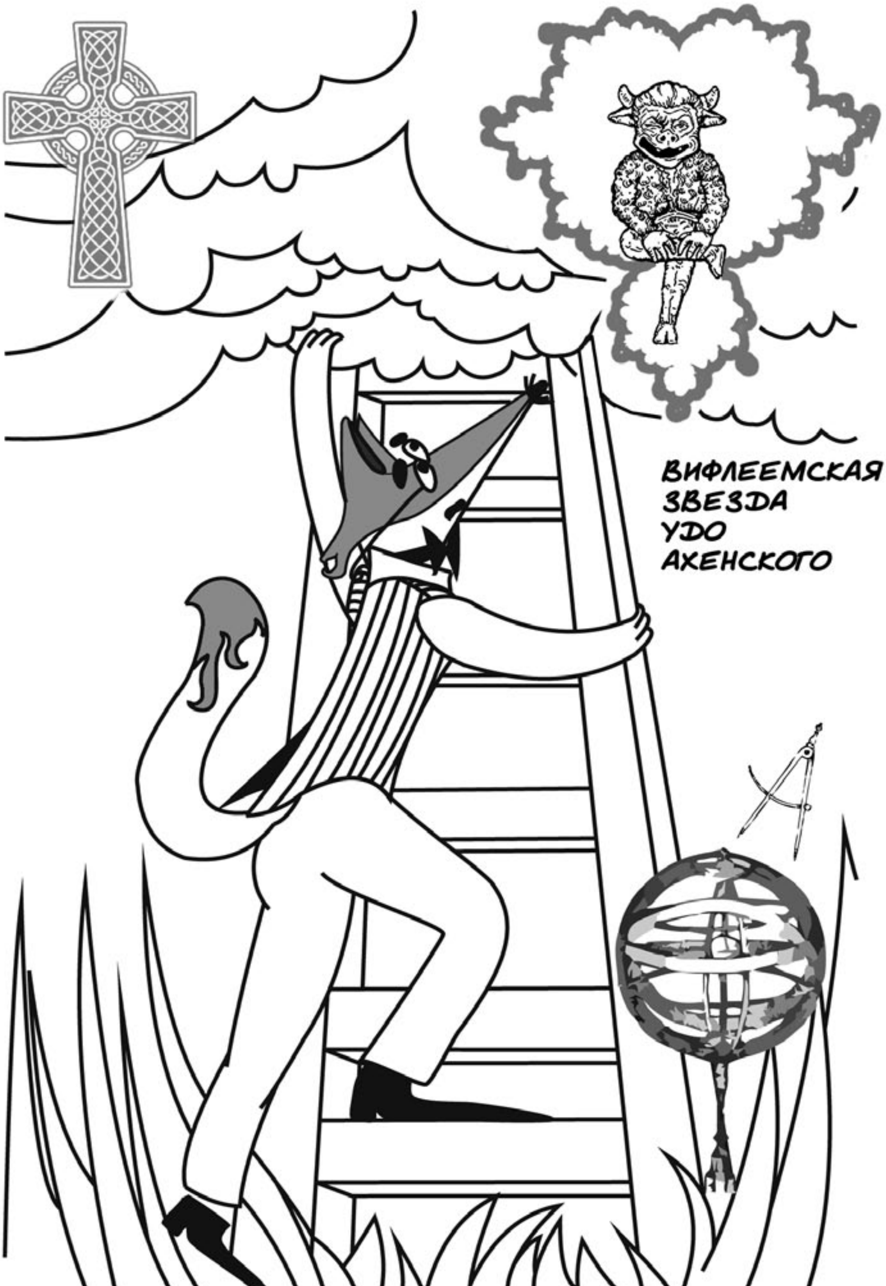
Роберт Шипке настоял, чтобы ему дали возможность изучить документ подробнее, и установил имя переписчика, которым оказался некто Удо Ахенский. Дальнейшие поиски привели профессора в Баварию, в старинный монастырь бенедиктинского ордена под Мюнхеном. С помощью местных историков удалось добраться до архива монастыря, где и был найден толстенный фолиант Codex Udolphus, собственноручно написанный монахом Удо Ахенским.

Эта книга была известна историкам ещё с XIX века, но в те времена её сочли сугубо богословской. Однако в первой же части книги Шипке обнаружил изложение основ теории вероятностей, несколько замысловато упакованных в форму порицания пристрастий к азартным играм с попутным изложением стратегий для игры в карты и кости. Вторая часть книги почти целиком была посвящена вычислению числа π, а вот третья, под названием Salus (Спасение), неопровержимо свидетельствовала, что за семь веков до Мандельброта его удивительный фрактал был открыт никому не известным монахом Удольфом, попутно создавшим декартову систему координат и основы теории комплексных чисел.

Целью труда Удо была разработка метода для определения того, при каких условиях душе удастся достичь небес. Он предполагал, что всякая душа состоит из двух независимых частей, которые Удо назвал *profanus* (мирская) и *animi* (духовная), а затем стал представлять данные части как пару чисел на плоскости (любопытно, что ныне эти элементы комплексного числа семантически называются весьма похоже: действительной и мнимой частью). Разработав правила для сложения и умножения чисел, Удо стал исследовать, как

> *«душа каждого человека проходит испытания в течение жизни, из года в год колеблется между добром и злом, и в конечном итоге, согласно своей природе, либо засасывается во внешнюю тьму, либо навсегда притягивается к Господу».*

Выражаясь современным языком, Удо начинал с произвольного числа z_0 и затем примерно 70 раз повторял вычисления по формуле $z \to z^2 + c$, пока не становилось ясным, что величина z стремится к бесконечности или остаётся конечной. В последнем случае точка z_0 сохраняется, а точки, «ведущие к бесконечности», стираются или «выкалываются». Образуется объект, состоящий из многих тысяч сохранившихся точек, который Удо назвал Divinitas (Божественное), сообщив в тексте книги, что на вычисления у него ушло 9 лет...


ВИФЛЕЕМСКАЯ
ЗВЕЗДА
УДО
АХЕНСКОГО

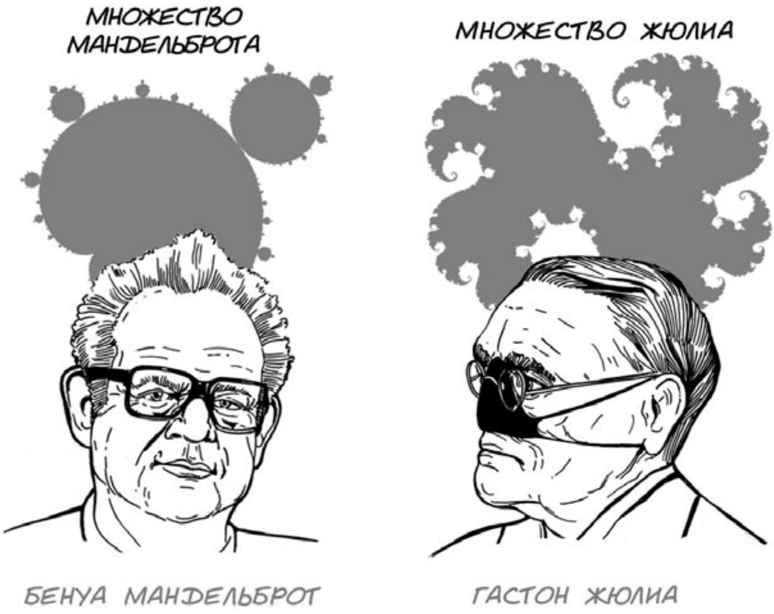
Короче говоря, нынешнему учёному миру оставалось бы лишь поражаться столь удивительной монашеской целеустремлённости, сочетавшейся с гениальными прозрениями, если бы не единственное «но». Сообщение о сенсационном открытии датировано первым апреля 1999 года. Увы, это был всего лишь остроумный розыгрыш, хотя и сфабрикованный на редкость добротно. Эта мистификация удалась и была с доверием воспринята именно благодаря простоте и естественности фрактального концепта. И ещё потому, что просто интерпретировала тот самый алгоритм, который привёл Мандельброта к открытию фрактала. Но об этом – в следующей главе.

ДЛЯ ПРОСТОТЫ – УСЛОЖНЯЙ!

В Татьянин день 25 Января 1918 года, во время Первой мировой войны, штаб немецкой армии принял решение отметить день рождения Кайзера атакой по французским войскам. Атака была жестокой и унесла жизни многих солдат. Офицер Гастон Жюлиа был тяжело ранен. Его лицо навсегда осталось изуродованным. В промежутке между весьма болезненными операциями в госпитале он продолжал своё математическое исследование столь интенсивно, что в том же 1918 году опубликовал основополагающую работу по итерированию функций комплексного переменного – Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. Работа стала известной, и Жюлиа был удостоен Гран При Французской Академии наук. Без сомнения, в 1920-х Гастон Жюлиа, профессор Ecole Polytechnique в Париже, был одним из самых авторитетных математиков своего времени.

Быть может, только Пьер Фату был столь же осведомлён в анализе функций с комплексной переменной. Они оба игнорировали графику и оперировали чистыми символами в традиции французской математической школы того времени. Надо сказать, что уже с XVII века стиль европейской математики постепенно смещался от геометрии (форм) к алгебре (формулам). Лаплас, один из великих формализаторов, гордился тем, что в его «Аналитической механике» нет ни одного рисунка. Математические построения Пьера Фату и Гастона Жюлиа находились в поле тех же идей, символом и выразителем которых в XX веке стал Николай Бурбаки. Здесь нам не уйти ещё от одной знаковой мистификации.

Блестящая эта мистификация состояла в том, что группа ведущих французских математиков, выбрав в качестве коллективного псевдонима имя «Николя Бурбаки», предприняла систематическое изложение «Элементов математики» на основе аксиоматического метода, примерно так, как Евклид систематически изложил математику своего времени в «Началах». Перед самой войной, в 1939 году вышли первые тома «Элементов» Николя Бур-



баки. Всего было издано более 40 книг. Неизвестный Бурбаки был непримирим к догматизму, но это не мешало ему быть необычайно основательным и неторопливым. Так, на определение математически непростого понятия «1» ушло более 200 страниц текста! Бурбаки стоял на том, что на основе теории множеств возможно целостное изложение математики без привлечения рисунков. Я думаю, многие литераторы придерживаются такой же точки зрения по отношению к комиксам. Цифры и буквы – вот чистые символы, обеспечивающие пластику и точность для выражения истинных мыслей и чувств, не искажённых смысловой нагрузкой образов.

Среди основателей группы был и Шалом Мандельброт – дядя Бенуа Мандельброта. Шалом Мандельброт был профессором математики в Париже, преемником Жака Соломона Хадамарда в престижном College de France. Он взял на себя ответственность за образование племянника Бенуа Мандельброта, семья которого эмигрировала из Польши во Францию в 1936 году. Именно дядя Шалом обратил внимание Бенуа Мандельброта на блестящие работы Гастона Жюлиа и Пьера Фату. Выбирая тему диссертации в 1945 году, Бенуа Мандельброт прочитал их работы и понял, что ему нечего к ним добавить. К разочарованию дяди, работы были отложены, но, к счастью, не забыты.

Им суждено было стать детонатором фрактальной геометрии. В 1977 году компьютеры стали доступными для учёных. Появилась возможность визуализации сложных, многократно повторяемых построений и расчётов. Работавшему к этому времени на фирме IBM Мандельброту не составило труда запустить итерацию Жюлиа на компьютере. На экране его монитора – вдруг, словно по мановению «невидимой руки», – появились узоры, замысловатые и странные.

Надо сказать, что с появлением компьютеров и новых возможностей математической графики стандарты Бурбаки утратили свою строгость. Мир в целом становился более чувственным и более эмоциональным. В этом новом мире смелые фантастические формы, производимые простыми алгоритмами, оказывались всё более востребованными. Алгоритм Жюлиа – простой до банальности – подходил этому новому тренду массовой инженерии фантастических форм.

Описанное Жюлиа отображение состояло из двух тактов – развёртывания и отсекания. Первый такт сводился к оператору Жюлиа

$$Z \to Z^2 + C.$$

Вот как работает этот оператор. Берём нуль, возводим его в квадрат и прибавляем к результату комплексную константу ***C***. Полученный результат возводим в квадрат и добавляем ту же константу ***C***. И так можно продолжать до бесконечности.

Но эту «глупую бесконечность» отсекает второй такт отображения Жюлиа, который сводится к простому правилу: если в результате повторов результат уходит на бесконечность, то данная точка не принадлежит множеству Жюлиа. Гастон Жюлиа и Пьер Фату доказали «предельную теорему». Суть её в том, что если изображающая точка квадратичного отображения вышла в процессе итераций за границы круга радиуса 2, то Z не принадлежит множеству Жюлиа и её орбита уходит на бесконечность. Например, для действительных чисел больше 1 уже после небольшого количества итераций оператор Жюлиа приводит к большим цифрам, а для любого числа меньше 1 – к нулю.

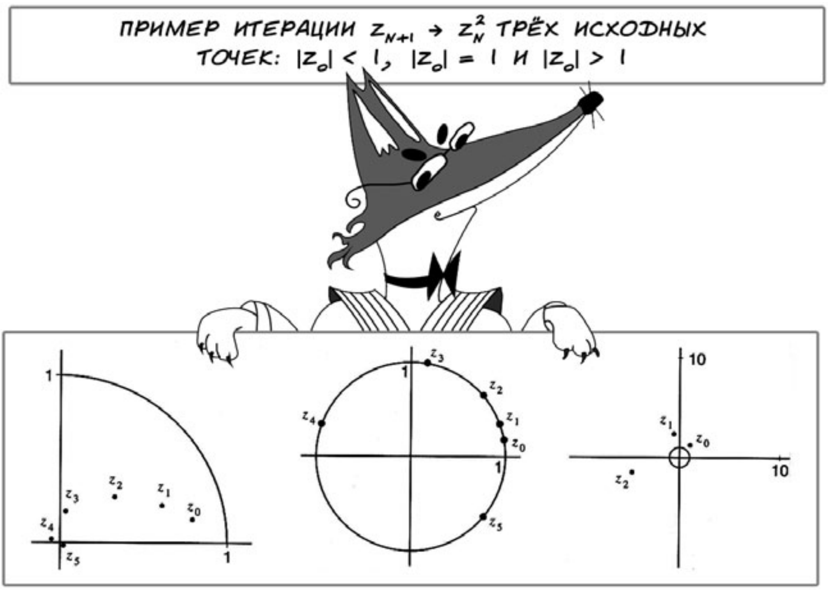
В самом деле, для числа 1,1 оператор Жюлиа возрастает с каждым шагом, стремясь к бесконечности:

$$1{,}1^2 \to 1{,}21^2 \to 1{,}4641^2 \to 2{,}14358^2 \to 4{,}59497^2 \to 21{,}11377^2 \to$$
$$\to 445{,}79156^2 \to (1{,}99 \times 10^5)^2 \to 3{,}95 \times 10^{10}.$$

А для числа 0,9 отображение Жюлиа с каждым шагом уменьшается, стремясь к нулю:

$$0{,}9^2 \to 0{,}81^2 \to 0{,}6561^2 \to 0{,}4305^2 \to 0{,}1853^2 \to 0{,}0343^2 \to$$
$$\to (1{,}2 \times 10^{-3})^2 \to (1{,}4 \times 10^{-6})^2 \to 1{,}9 \times 10^{-12}.$$

Уже после восьми итераций мы можем заключить, ведёт или нет расчёт к бесконечности. Те точки, которые, после применения к ним опе-



ратора Жюлиа, не уводят результат итераций на бесконечность, образуют множество Жюлиа. Прочие точки «стираются». Всё изложенное для действительных чисел верно и для комплексных чисел с тем отличием, что действительные числа есть множество точек на линии, а комплексные числа – множество точек на плоскости.

Среди математиков бытует руководство, согласно которому, чтобы упростить выражение, его рекомендуется представить в комплексной форме. На английском языке это правило отсылает к игре слов – *«для простоты – усложняй»* (*to simplify – make it complex*).

Отображение Жюлиа применяется к координатам каждой точки экрана, и, в зависимости от результата, чёрная точка на экране сохраняется либо стирается. Такое удаление всех лишних точек напоминает работу скульптора, который, откалывая от глыбы камня всё лишнее, оставляет только то, что впечатляет и захватывает внимание.

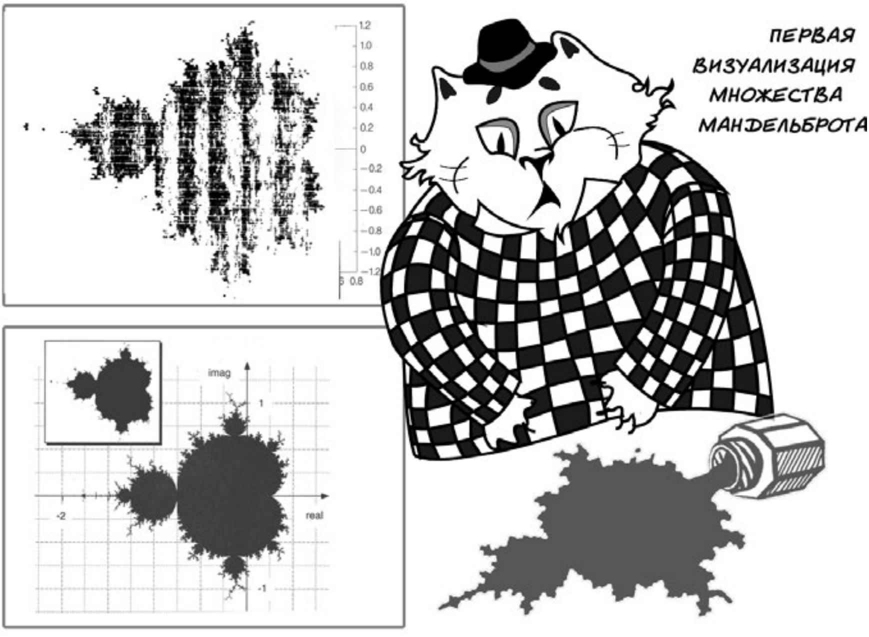
Раньше, в Древней Греции, скульптуры ещё и раскрашивали. И математики раскрашивают фракталы. Как? Очень просто. Цвет соответствует номеру итерации, при котором результат оказывается за пределами круга, радиус которого может быть выбран произвольно. Цвета подбираются из компьютерной палитры по соображениям хорошей различимости и эстетической привлекательности.

Эта феерия фрактальных форм вызывала у математиков сначала восхищение, потом – оторопь. Малейшее изменение постоянной ***C*** приводило к радикальному изменению формы отображения Жюлиа. Формы отображений Жюлиа не поддавались ранжированию. Найти правило, по которому можно было бы судить о форме отображения Жюлиа, удалось Мандельброту.

ДЬЯВОЛЬСКИЙ ПОЛИМЕР

Мандельброт решил разделить отображения Жюлиа на разрывные и сплошные и первым делом принялся определять границу между ними. Он использовал самый современный на тот момент компьютер IBM, связанный с принтером «Тектроникс», который отпечатывал найденные программой точки на белом листе. В марте 1980 года программа стала выводить на печать окончательный вариант расчётов. Бенуа Мандельброт смотрел на результат, не понимая, что происходит: на листе сформировалось нечто, напоминающее кляксу, поставленную нерадивым школяром.

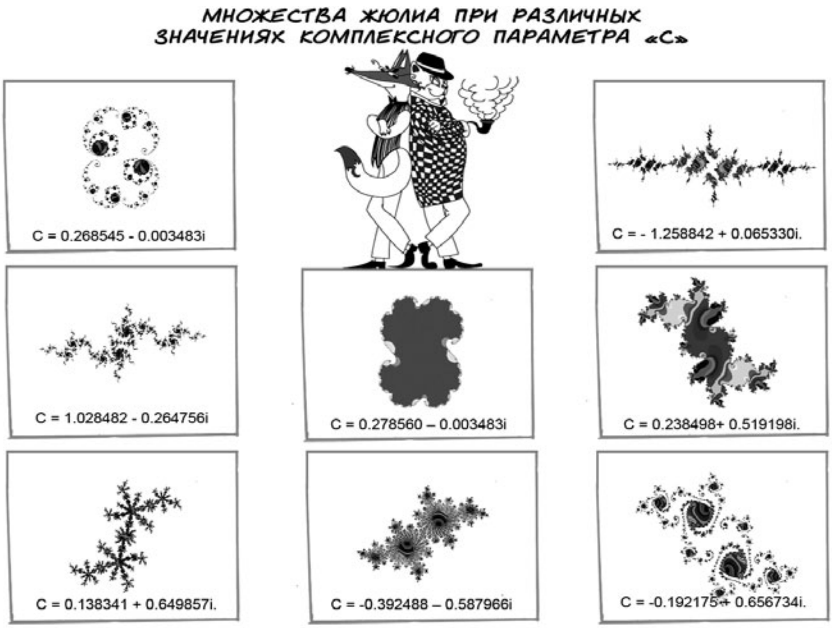
Он решил улучшить качество расчётов, надеясь получать более чёткую картинку, но с определённого момента счастье изменило ему – контуры границ, вместо того, чтобы становиться всё определённее, размывались. При дальнейшем увеличении точности расчётов они становились ещё более раз-



мытыми. Это напоминало дьявольскую шутку – между двумя любыми чёрными точками всегда возникают белые. Увеличение масштаба погружало в мир восхитительного и пугающего разнообразия. Появлялись всё новые изгибы границы, которые приблизительно повторяют предыдущие формы, но не во всём. Всегда появляются формы иные, новые. Но в этом начала проступать некая системность. По мере увеличения масштаба многие «кляксы» исчезли, но некоторые остались и обнаружили сложные структуры – винтовые завитки, усики и спирали; круги, усыпанные колючими шипами, завивающимися наружу; молекулы, висящие, словно виноградины на лозе.

В целом появился островной кластер – объект, представляющий собой скопление несвязных точек. Оказалось, что основной континент множества имеет ту же форму, что и каждый из островов. В то время, как внутренние их части не перекрывались, просветы между ними заполняли меньшие острова – и так до бесконечности. В конце концов, острова соединялись береговыми линиями, образуя множество, которое Мандельброт описал словами «дьявольский полимер» и которое известно сегодня как «фрактал Мандельброта».

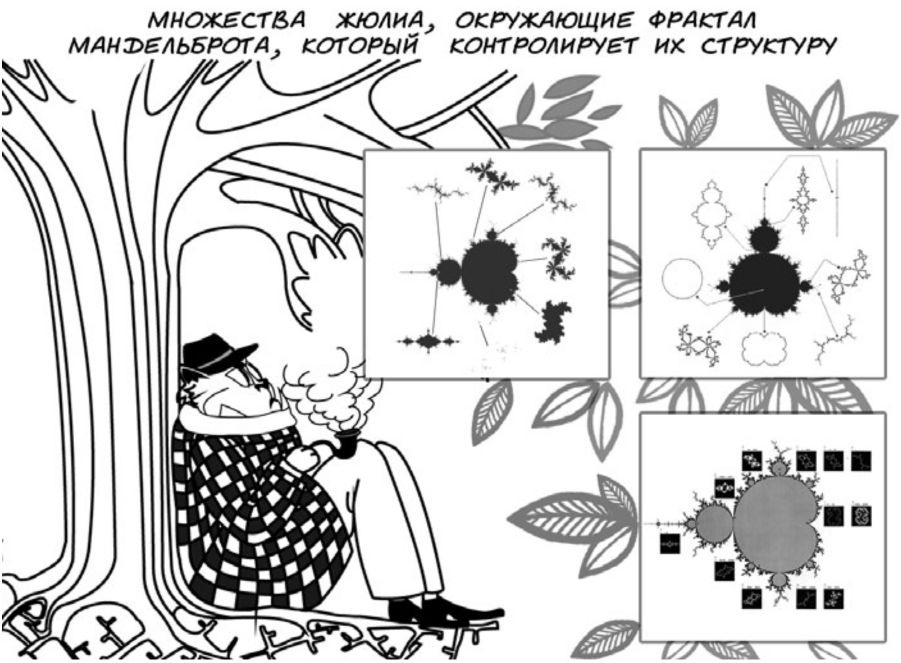
Для его описания представим мысленный эксперимент. Пусть отрезок прямой пересекает «дьявольский полимер». Пусть точка *C* медленно продвигается вдоль линии из внутренней области «полимера» к его границе. При этом на экране строится соответствующее множество Жюлиа. Эта



процедура изящно реализована в программе «Фрактория 1.0», служащей приложением к книге «Фракталы: между мифом и ремеслом». Можно видеть, как с течением времени исходное множество Жюлиа сжимается вплоть до хрупкого дендритного (т. е. деревообразного) скелета, а когда ***C*** выйдет за границу множества Мандельброта, соответствующее ему множество Жюлиа как бы взорвётся, превратившись во «фрактальную пыль».

Таким образом, любой точке множества Мандельброта соответствует связное множество Жюлиа, а любой точке вне множества Мандельброта – несвязное множество Жюлиа. Множество Мандельброта и его окрестность представляют собой некоторый свёрнутый план множеств Жюлиа.

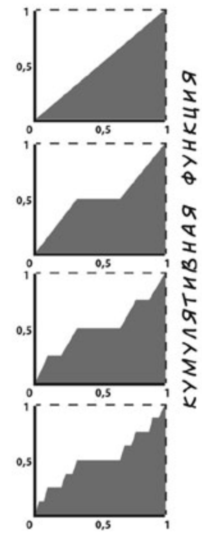
Оказалось, что формы множеств Жюлиа двух соседних точек на множестве Мандельброта имеют сходный лейтмотив, который деформируется непрерывно, постепенно, от точки к точке. Множество Мандельброта функционирует как контролирующее, путеводное, ключевое начало среди разнообразия множеств Жюлиа. Ошеломляющее разнообразие отображений Жюлиа благодаря «дьявольскому полимеру» Мандельброта обретает порядок и строй. Однако строй этот указывает на иерархию совершенно нового типа, связность которой не видна с первого взгляда. Она раскрывается с того ракурса, который открылся Мандельброту, когда он совместил сложность границ «дьявольского полимера» со сложностью «дьявольской лестницы», которая возникает в ходе анализа шумов при передаче данных между компьютерами.



ДЬЯВОЛЬСКАЯ ЛЕСТНИЦА

Для передачи данных между компьютерами используются чрезвычайно сильные электрические сигналы. Такой сигнал дискретен. Помехи или шумы случайно возникают в электрических сетях вследствие многих причин и приводят к потере данных при передаче информации между компьютерами. Исключить влияние шумов на передачу данных в начале шестидесятых годов прошлого века было поручено группе инженеров «IBM», в работе которой принимал участие Мандельброт.

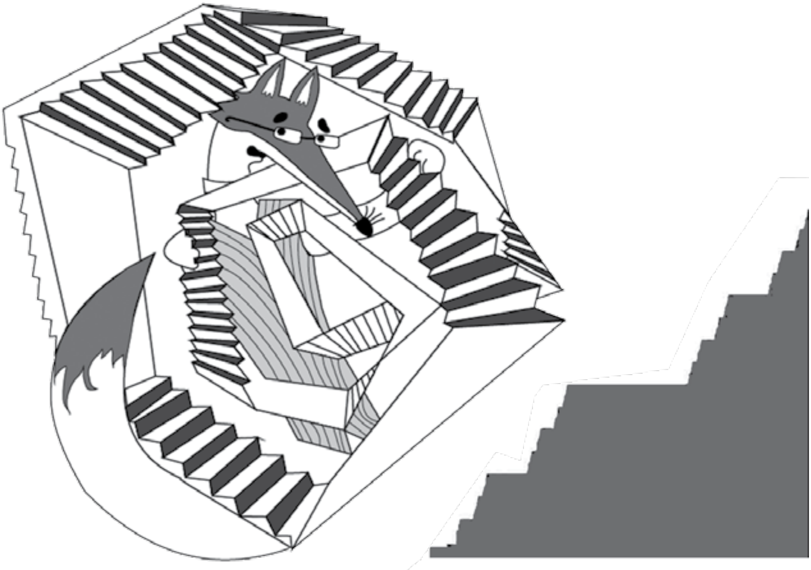
Грубый анализ показал наличие периодов, во время которых не регистрировалось ни одной ошибки. Выделив периоды длительностью в час, инженеры заметили, что между ними периоды прохождения сигнала без ошибок также прерывисты – здесь возникают более короткие паузы длительностью около двадцати минут. Таким образом, передача данных без ошибок характеризуется пакетами данных разной длины и паузами в шумах, в течение которых сигнал передаётся без ошибок. В пакетах более высокого ранга как бы встроены пакеты более низкого. Подобное описание предполагает существование такого понятия, как относительное расположение пакетов низшего ранга в пакете



более высокого ранга. Опыт показал, что распределение вероятностей этих относительных расположений пакетов не зависит от их ранга. Такая инвариантность говорит о самоподобии процесса искажения данных под действием электрических шумов. Сама процедура вырезания свободных от ошибок пауз в сигнале при передаче данных не могла прийти в голову инженерам-электрикам по той причине, что для них такое было внове.

Но Мандельброт, изучавший чистую математику, хорошо знал множество Кантора, описанное ещё в 1883 году и представляющее собой пыль из точек, полученных согласно строгому алгоритму. Суть алгоритма построения «пыли Кантора» сводится к следующему. Возьмите отрезок прямой. Удалите из него серединную треть отрезка, сохранив две концевых. Теперь повторим ту же операцию с концевыми отрезками – и так далее. Мандельброт обнаружил, что именно такова геометрия пакетов и пауз при передаче сигналов между компьютерами. Ошибка накапливается. Её накопление можно моделировать так. На первом шаге всем точкам из интервала [1/3, 2/3] присвоим значение 1/2, на втором шаге – из интервала [1/9, 2/9] – значение 1/4, значение 3/4 – точкам из интервала [7/9, 8/9] и т. д. Пошаговое суммирование этих величин позволяет построить так называемую «дьявольскую лестницу».

Почему дьявольскую? Потому, что построенная таким образом кумулятивная функция (результат пошагового суммирования) ведёт себя дьявольски странно. Будучи монотонной и непрерывной, она допускает расчёт производной в любой своей точке, но эта производная почти всюду равна нулю!



Не вникая в математические тонкости, инженеры приняли выводы Мандельброта на веру и перенастроили систему. Мандельброта же эта простая инженерная задача подвела к размышлениям о мерах для странных множеств, подобных множеству Кантора. Всё свидетельствовало, что для этих мер потребуются не только целые, не только дробные (рациональные) числа, но также числа иррациональные – ведь мерой «пыли Кантора» является число, равное 0,618..., известное как «золотое сечение» или «Божественная пропорция». Для уравновешивания дьявольских причуд и пояснения природы иррациональных чисел рассмотрим «Божественную пропорцию».

БОЖЕСТВЕННАЯ ПРОПОРЦИЯ

Пифагорейцы, быть может, первыми осознали силу числа – символа в его самом чистом виде. Пифагорейцам открылось, что число, будучи по существу виртуальным и воображаемым, не менее реально, чем любой существующий предмет или любое имевшее место явление. И пифагорейцы обнаружили числа не только в том, что можно рассмотреть, но и в том, что можно расслышать. Гармония сфер и правильных фигур – в центре внимания пифагорейцев. Их не могла не тревожить задача о «квадратуре круга». Построить квадрат той же площади, что и круг, с помощью циркуля и ли-