Сергей Деменок

ПРОСТО ХАОС

ПРОСТО

УДК 514:515.1+330
Д 30

Д 30 **Деменок С. Л.** Просто хаос. — СПб.: ООО «Страта».
Второе издание, 2015. — 228 с.

ISBN 978-5-906150-45-5

Регулярный или динамический хаос был открыт и стал предметом многих статей в глянцевых журналах в последние несколько десятилетий. Это открытие изменяет наши представления о реальности. В новом свете предстают архетипы старых мифов. Хаос – в древнегреческой мифологии – есть предельное распыление материи и одновременно предельное её сгущение, и поэтому он смертельно опасен для всего живого. Он же источник всякого становления, вечно творящее живое лоно для всех жизненных оформлений. Хаос всемогущ и безлик, он всё оформляет, но сам бесформен. Между хаосом и космосом есть пограничная область, испокон веков известная как Тартар. На современном научном языке область между хаосом и порядком находится особая страта реальности, в которой поведение динамических систем является полностью предопределённым, но при этом непредсказуемым. Здесь мы сталкиваемся со странными аттракторами, фракталами и причудливой топологией пространств. И если древний Тартар располагался где-то далеко на периферии мироздания, то динамический хаос пронизывает всё наше существование. Это само по себе радикально трансформирует картину мира. От этой новой интерпретации реальности нельзя отмахнуться – она всё равно настигнет. На этом основании стоит иметь ясное представление о теории динамического хаоса по крайней мере в общих чертах.

Настоящая книга представляет собой упрощённое изложение основных представлений теории динамического хаоса. Она не предназначена для специалистов в этой области. Эта книга для дилетантов в теории хаоса – для тех, кто живёт в самой гуще интенсивного настоящего и вынужден динамично и адекватно реагировать на тенденции и тренды, просматривая следующие за ними метаморфозы реальных событий.

ISBN 978-5-906150-02-8
Первое издание, 2013 г.
ISBN 978-5-906150-45-5
Второе издание, 2015 г.

СОДЕРЖАНИЕ

III. Геометрия свёрнутого, смятого и скрученного

I. РЕГУЛЯРНЫЙ ХАОС

ЧЁРТ В САПОГАХ И ЧЕРНИЛЬНОЕ ПЯТНО

Чернильница, брошенная в чёрта, была тяжёлая, литого йенского стекла, и она разлетелась вдребезги. На облупленной стене Вартбургского замка осталась чернильная клякса. В этом замке Лютер скрывался от папистов и переводил Святое Писание на немецкий язык. Отрываясь от работы, Лютер всматривался в окрестные холмы и леса, словно хотел увидеть «сквозь них» божественное мироустройство. Но в этих пространствах взгляду не за что было зацепиться. Даже тончайшей паутинки не удавалось ему разглядеть. Страх пустоты лишал Лютера сна. Сон приходилось замещать молитвой. В состоянии полусна, сидя однажды у окна своей комнаты, Лютер увидел в саду напротив чёрного борова в окружении блуждающих огней. Огни в темноте будируют хаос. Предчувствие неустойчивости обостряет чувства.

И вот едва различимый скрип ступеней на лестнице перешёл в скрежет, где-то с грохотом опрокинулось ведро. Распахнулась дверь, и на пороге комнаты Лютера появился господин в сапогах. Голенища сапог были похожи на сморщенную гармошку. Улыбка – глумливая. Взгляд нахальный и даже дерзкий. Вместо руки с пальцами – лапа с когтями, как у хищной птицы. По этой-то примете Лютер и распознал чёрта. А распознав, открыл Лютер Книгу и прочел по ней вслух: «Семя жены сотрёт главу змия». Посетитель, раздосадованный таким оборотом дел, схватил бутыль с чернилами и швырнул её в Лютера – да об стену. Так описал эту встречу Ганс Дейзингер из Нюрнберга в 1602 году, через семьдесят лет после случившегося.

Впоследствии та же история будет рассказываться иначе. Лютер бросит чернильницу в чёрта. Такая инверсия имеет объяснение. На современном техническом языке встреча Лютера с чёртом есть точка бифуркации, точка раздвоения. Система столь неустойчива, что ничтожное возмущение, малейшее сомнение, мысленный сдвиг могут сместить её к одной или другой модели поведения. Чёрт был дерзок как Лютер, Лютер был зол как чёрт. Лютер и чёрт, чёрт и Лютер в этот момент явили собой две стороны одной медали – чернильной кляксы на облупленной стене замка. Клякса стала знаком, стимулирующим воображение. Воображение необычайно объёмно. Оно может представить в один и тот же момент Лютера, бросившего чернильницу в чёрта, и чёрта, запустившего чернильницу в Лютера. Благодаря воображению след от чернильницы на стене появится одновременно в совершенно разных местах.

По меньшей мере, с конца XVII века чернильное пятно замечено также в комнате Лютера в Виттенберге. Здесь Лютер преподавал в университете, и 31 октября 1517 года он вывесил у дверей дворцовой церкви свои «95 тезисов», и здесь же он был погребён в 1546 году. Потом чернильное пятно появилось в крепости Фесте баварского города Кобург, ставшей для Лютера убежищем в 1530 году. Здесь Лютер редактировал составленное Филиппом Меланхтоном[1] «Аугсбургское исповедание» и заочно участвовал в Аугсбургском рейхстаге Священной Римской империи. Так, благодаря силе воображения, в Вартбурге, в Виттенберге и Кобурге нашлись комнаты, на стенах которых были обнаружены пятна от чернильницы, пущенной Лютером в чёрта или чёртом в Лютера. Нет сомнений, ничто не мешало чёрту встретить Лютера в любом из этих мест.

На современном языке все три события – фрагменты одной фазовой траектории динамической системы. Эта траектория состоит из фиксированных фрагментов, разбросанных вокруг реальных событий по нормальному закону. Фрагменты могут привлечь внимание.

Уже в XVII веке пятна в комнатах Лютера стали туристскими достопримечательностями. В 1716 году Пётр I, посетивший Виттенберг, был приглашён посмотреть на чернильное пятно Лютера. Пётр всматривался в пятно, слюнил палец, тёр кляксу, пробовал на язык, нюхал и, по-солдатски сплюнув, заключил: «Это шарлатанство, герр комендант: чернила новёхонькие, химические». Оберкомендант сконфузился и не нашёлся, что ответить. А объяснение этому самое простое. Черти есть всегда и везде. Нет ничего удивительного, что один из них приставлен хранителем чернильных пятен на стенах в комнатах Лютера. Оттого чернила не выцветают и по сей день. Чернила эти никогда не выцветали.

1 ***Филипп Меланхтон*** (1497–1560) – немецкий гуманист, теолог и педагог, евангелический реформатор, систематизатор лютеранской теологии, сподвижник Лютера. Настоящая фамилия – Шварцэрд. С 1509 года вместо настоящей фамилии стал использовать её перевод на греческий – Меланхтон (и то, и другое означает «чёрная земля», «чёрнозём»), под которым и вошёл в историю.

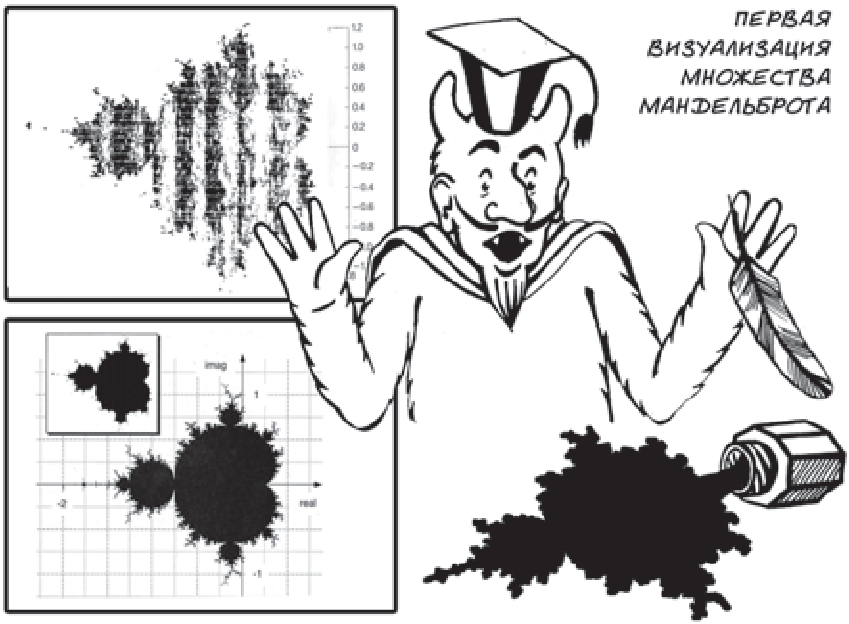
И в тот день, когда Лев Толстой посетил комнату Лютера в Вартбурге, чернильное пятно было отлично видно на стене. После беглого его осмотра Лев Николаевич долго и пристально вглядывался в саксонский пейзаж и высказал нечто дерзкое о Боге и о народе, что, впрочем, смотритель предпочёл сразу забыть. Жаль только, не было никакой возможности вывести запись в гостевой книге – «граф Лев Толстой». Так чернильное пятно на стене комнаты Лютера обретало имагинативную плоть, возбуждало воображение людей, причём людей далеко не последних. Эта чернильная клякса на стене служила центром притяжения к идеям Лютера. Верой, одной верой и только верой спасается человек. Эту благую весть Лютера понял и принял Толстой. Он, как и Лютер, отверг дела, даже самые благие и самые славные. Опору человеку даёт вера, и только вера. Лютер обнаружил пристанище неверия там, где люди в течение столетий видели самый могучий и надёжный оплот веры, – в католической церкви.

А через триста пятьдесят лет после Лютера в «Легенде о великом инквизиторе» Достоевский повторит Лютерову истину: католическая церковь была не с Христом, а с Его вечным врагом. И если «правда» – то, как всё должно быть, – в Христе, то истина – то, как всё есть, – может обойтись и без Христа. И это с арифметической обязательностью доказывает явление чёрта Ивану Фёдоровичу Карамазову. Чёрт этот всё-таки отличался, и довольно сильно, от того, который являлся Лютеру. Это был господин лет уже немолодых, с проседью в волосах и с острой бородкой. Одет он был от лучшего портного, но по моде вчерашнего дня. Сапоги он носил по большей части для эпатажа. Впрочем, видно, что пошиты они были из хорошей тонкой кожи со сморщенными голенищами. Он не то, чтобы добродушен, но учтив и всегда готов услужить. Быть может, он и был только что галлюцинацией, но когда Иван Фёдорович запустил в него стакан чаю, чёрт никуда не растворился, вскочил с дивана, смахивая пальцами с себя брызги чая и воскликнул: «Ах, это же глупо, наконец! Вспомнил Лютерову чернильницу! Сам же меня считает за сон и кидается стаканами в сон! Это по-женски! А ведь я так и подозревал, что ты делал только вид, что заткнул свои уши, а ты слушал…»

И ведь было что слушать. Чёрт был натурально философ. Чего только стоило его откровение о любви к земному реализму. Дескать, реалист он, а между тем не материалист. Дескать, фантазмы адские изрядно его утомили, устал чёрт от фантастического. И временами, переселяясь на землю, не может чёрт отказать себе в удовольствии насладиться строем человеческой мысли: тут формула, тут геометрия, а по ту сторону, на том свете, – всё какие-то неопределённые адские протуберанцы, спикулы и флоккулы[1]. Чёрт был довольно осведомлён о современном состоянии естественных наук, хоть и был в сапогах. Знал он не только об атомах. Атомы-то и в древнем мире были. Знал он про «химическую молекулу», про «протоплазму», про восемь минут, которые идёт луч света от Солнца до Земли, и чёрт знает что ещё – не меньше выпускника Санкт-Петербургского университета. Так мог заключить Иван Фёдорович на том основании, что сам закончил естественный факультет Московского университета, а чёрт в сапогах имел знания похожие, но несколько отличные. Высказывания чёрта выдавали ясный геометрический петербургский строй мысли, отличный от алгебраического нелинейного московского уклада мышления. У чёрта сводило ногу при попытке представить себя мнимым иксом в неопределённом алгебраическом уравнении. Иван Фёдорович же затруднялся свести идеи Лобачевского к треугольнику из трёх перпендикулярных друг другу линий. Тем не менее, оба соглашались в том, что представления Евклида о трёх измерениях пространства не заслуживают полного доверия. Ведь никто никогда не видел, что происходит с параллельными линиями в бесконечности. Для этого потребовалось бы прогуляться в эту самую бесконечность и вернуться обратно. Но это и чёрту не под силу. Иван Фёдорович с математической строгостью доказывал, что «если есть бесконечность, а она есть несомненно, то есть Бог и мир другой, на иных законах, чем реальный мир».

Единственное по его теории выходило, что мир этот где-то далеко. Чёрт с этим решительно не соглашался и трактовал «актуальную» бес-

1 ***Протуберанцы, спикулы и флоккулы*** – элементы хромосферы Солнца.



конечность как множество бесконечно малых отрезков у нас перед самым носом. Это, мол, такие отрезки, которые, с одной стороны, имеют бесконечно малую длину а с другой стороны, их бесконечное суммирование даёт конечное число. Эти отрезки отказывался признать Зенон[1]. Но совсем недавно Георг Кантор[2] построил из них так называемую шкалу трансфинитных чисел, которая представлялась ему своего рода лестницей к Богу. На этих высотах духа его не могли смутить парадоксы, ведь речь шла о божественной логике. Для человеческого же ума, пытающегося схватить эту божественную бесконечность, неизбежно было впадать в противоречия. Курьёзы теории множеств привели – и совсем скоро – к геометрии таких структур, как фракталы. Стоит ли удивляться, что символом фрактальной геометрии стало нечто, напоминающее чернильное пятно, – фрактал Мандельброта.

По признанию Мандельброта[3], он был озадачен той чертовщиной, которая творилась 1 марта 1980 года при выводе на печать окончательного варианта расчёта границ связных множеств Жюлиа. На листе появлялось

1 ***Зенон Элейский*** (V век до Р. Х.) – древнегреческий философ. Знаменит своими апориями (внешне парадоксальными рассуждениями), которыми он пытался доказать невозможность движения, пространства и множества.

2 ***Георг Кантор*** (1845–1918) – немецкий математик. Наиболее известен как создатель теории множеств, ставшей краеугольным камнем в математике.

3 ***Бенуа Мандельброт*** (1924 –2010) – французский и американский математик, создатель фрактальной геометрии. Лауреат премии Вольфа по физике (1993), второй по престижу после Нобелевской премии.

нечто напоминающее кляксу, поставленную нерадивым школяром. Попытки улучшить качество расчётов ничего не давали. Контуры границ, вместо того, чтобы становиться всё определённее, всё более размывались. При дальнейшем увеличении точности вычислений контуры границ становились ещё более размытыми. Словно в издёвку между двумя любыми чёрными точками на границе «кляксы» вдруг и всегда возникали пробелы. Увеличение масштаба погружало в мир пугающего разнообразия. Появлялись всё новые изгибы границы, которые приблизительно повторяли предыдущие формы, но всегда с некоторым искажением. По мере увеличения масштаба многие пятна на границе «кляксы» обнаруживали сложные структуры – винтовые завитки, усики и спирали; круги, усыпанные колючими шипами, завивающиеся наружу, молекулы, висящие, словно виноградины на лозе. В складках этой формы скрывалось ровно столько дьяволов, сколько ангелов ютились на кончиках её игл. Герман Уэлл писал о фрактале Мандельброта: «ангел геометрии и дьявол алгебры вместе вышли на сцену, оттеняя сложность друг друга».

Это возвращает нас к старой аксиоме, что чёрт есть тот же ангел, только падший. Впрочем, если и был когда чёрт ангелом, то так давно, что не грешно и забыть. Пути их разошлись столь далеко, что истёрлась всякая память об их общем прошлом. У одного жизнь – есть вера без сомнений, один бесконечный молебен. Оно, конечно, свято, но скучновато. У другого – одна деятельная суета, здравый смысл, корысть и расчёт. Оно, быть может, и рационально, но абсолютно бессмысленно. А волшебство – вся окружающая нас действительность – играет на обеих сторонах сразу. Ангельское служение или чёртова служба – любой и каждый поступок – сотрясают миры и побуждают их к обратному действию. И этой петлёй обратного влияния связаны чистый случай и строгое предначертание так, что и отделить их друг от друга нет никакой возможности. Порядок встроен в хаос, хаос – в порядок. События, не успев ещё случиться, оказываются в поле их же собственных интерпретаций. В череде интенсивных комбинаций и рекомбинаций трактовок появляется захватывающая дух идея. Она вызывает ответный поступок или стимулирующие поступок галлюцинации. Массовые галлюцинации производятся в виртуальной реальности.

Например, чёрт в сапогах, сходящий с плазменного экрана, – всё тот же чёрт, но в ином, новом обличье. Теперь он носит «Prada» и сапоги «a la Camouflage». На среднем пальце правой руки его, непременно, массивный перстень с опалом. Часов у него может и не быть, но черепаховый лорнет на чёрной ленте всегда при нём, чтобы всматриваться в детали. И он всегда и во всём немного отстаёт – хоть на один показ мод, хоть на одну революцию. Таков его принцип. Он, как и прежде, привержен простому здравому смыслу. Ему, как и прежде, введено в обязанность губить тысячи, чтобы спасся один. Сегодня он искажает истину, скрывая её символиче-

скую природу. В любой популярной интерпретации, под предлогом замены формул и символов словами, он исполняет свою задачу – сместить фокус внимания от фантастики к фантазму, запятнать фрактал кляксой и свести понятие «странный аттрактор» к каламбуру, мол, странный аттрактор странен только для странника. Чёрт искренне потешается, оставляя кляксы то здесь, то там.

Стоит напомнить шумный курьёз, случившийся во флорентийской библиотеке 10 ноября 1809 года. Поль-Луи Курье[1] копировал старинный манускрипт с приписываемым Лонгу[2] греческим романом «Дафнис и Хлоя». Он заложил копируемую им страницу, не заметив, что на него протекли чернила. Захлопнув фолиант, Курье придавил растёкшиеся чернила, а через несколько дней было обнаружено чернильное пятно на том самом месте рукописи, где был фрагмент, известный как «magna lacuna» – большая лакуна, отсутствовавший во всех других известных манускриптах этого романа. Если бы не оплошность Курье, флорентийская рукопись могла этот пропуск восполнить. Самое интригующее то, что Курье успел скопировать этот фрагмент. И теперь полный текст романа навсегда связан с именем Курье.

1 ***Поль-Луи Курье де Мерэ*** (1772–1825) – французский эллинист и знаменитый памфлетист.

2 ***Лонг*** – древнегреческий писатель и поэт предположительно II века.

Как это часто случается, «геростратовский» акт Курье, испортившего древний текст «Дафниса и Хлои» чернильным пятном, обеспечил ему рекламу. Испорченные страницы стали своеобразной достопримечательностью флорентийской библиотеки, привлекая множество любопытствующих.

Символично и то, что чернильное пятно само по себе давно стало символом необратимого торжества беспорядка. Напомним притчу, рассказанную в средневековом мидраше[1] Танхума. В ответ на вопрос о доказательствах существования Бога Рабби Акива[2] показал свиток чудесной каллиграфии и заявил, что этот свиток возник оттого, что он вчера разлил чернила, и чернильная клякса чисто случайно образовала данный текст. Понятно, что ему не поверили и сказали, что свиток исполнил искусный каллиграф.

«Точно так же, – ответил Акива, – существование сложного прекрасного мира доказывает, что у него есть Творец».

Сегодня мы всё чаще слышим обратное. Модный эффект самоорганизации состоит, по-видимому, в том, что «чернильное пятно превращается в свиток чудесной каллиграфии». Такое магическое превращение уже стало не просто реальностью, но реальностью осмысленной, математически точно описанной и обозначенной термином «регулярный» или «динамический хаос».

ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Идея фазовой траектории чертовски проста. Пусть перед нами маятник. Например, тот, который в 1855 году под куполом парижского собора Сен-Мартен-де-Шан подвесил Леон Фуко, используемый для экспериментальной демонстрации суточного вращения Земли. Длина каната маятника – 67 метров, вес гири – 28 кг. Именно об этом маятнике пишет итальянский писатель Умберто Эко:

«И тут я увидел Маятник. Шар, висящий на долгой нити, опущенной с вольты хора, в изохронном величии описывал колебания. Медный шар поигрывал бледными переливчатыми

1 ***Мидраш*** – собрание поучительных толкований на Святое Писание, вид еврейской литературы IV–VII вв.

2 ***Рабби Акива*** (около 50–135) – один из законоучителей и основоположников раввинистического иудаизма, систематизатор Галахи (традиционного иудейского права, совокупности законов и установлений иудаизма, регламентирующих религиозную, семейную и общественную жизнь верующих евреев).

отблесками под последними лучами, шедшими из витража. Если бы, как когда-то, он касался слоя мокрого песка на плитах пола, при каждом из его касаний прочерчивался бы штрих, и эти штрихи, бесконечно мало изменяя каждый раз направление, расходились бы, открывая разломы мистической розы... Если бы я пробыл там долго, я поверил бы, что колебательная плоскость совершила полный оборот и возвратилась в первоначальное положение, описав за тридцать два часа сплюснутый эллипс, – эллипс создавался обращением плоскости вокруг собственного центра с постоянной угловой скоростью, пропорциональной синусу географической широты».

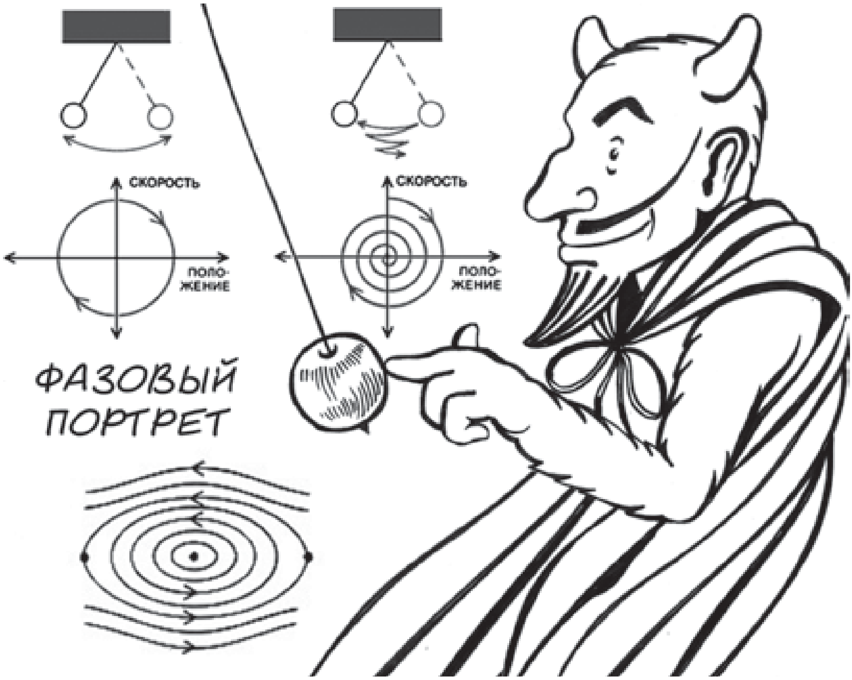
В этом описании есть всё – механика, символизм и даже нечто мистическое. Нет только ни слова о «фазовом портрете». Между тем маятник идеально иллюстрирует идею «фазового портрета».

Вообразите, что вы изменили силу первоначального толчка маятника. Слабый толчок – и перед нами линейный гармонический осциллятор, как те светильники под сводом церкви, колебания которых Галилей сверял с собственным пульсом. Он обнаружил, что частота их зависит от длины хорды маятника и не зависит от его тяжести. Но такой режим выполняется при малой амплитуде колебаний до тех пор, пока можно считать, что отклонение от оси маятника пропорционально углу этого отклонения ($\sin x \approx x$), и пренебрегать трением. В координатах «скорость – угол отклонения» такой осциллятор отображается как окружность. От трения колебания затухают. Окружность трансформируется в спираль.

При увеличении силы исходного толчка поведение маятника становиться нелинейным: окружность трансформируется в эллипс. Если силу толчка увеличить ещё больше, то маятник станет вести себя как пропеллер и эллиптическая орбита вырождается в волнистые линии. И если наблюдать «вживую» мы можем только один из режимов маятника, то ничто не мешает вообразить сразу все три режима, а фиксировать такую воображаемую картинку мы можем в координатах скорости шара υ по одной оси и угла отклонения хорды от вертикали – ϕ. В этих координатах возможные траектории маятника по мере увеличения угла ϕ изменяются от окружностей к овалам и далее, с потерей замкнутости, к волнистым линиям.

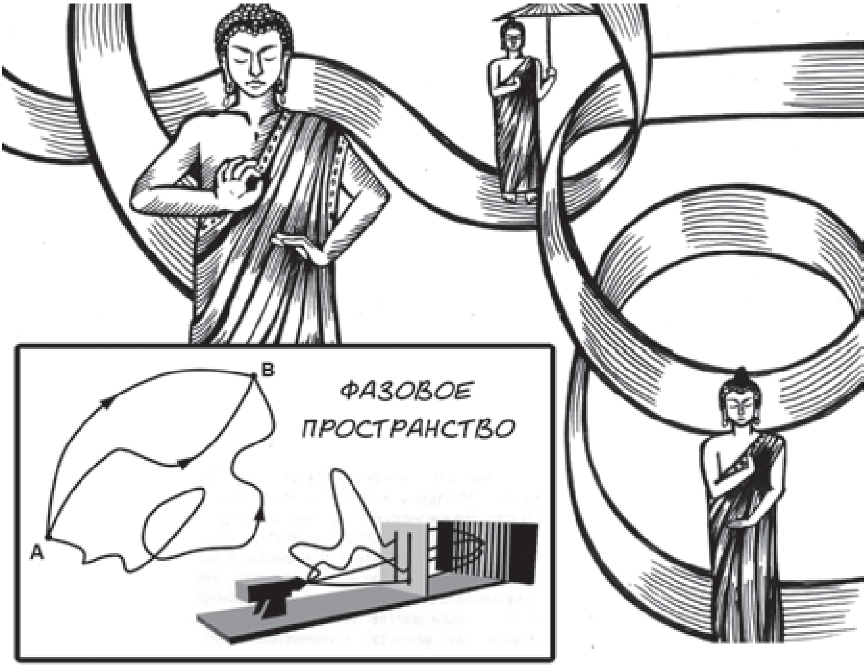
В фазовом пространстве нет ни длин, ни длительностей, ни движений.

Здесь любое действие пред-дано, но не всякое действие действительно. После того, как Эйнштейн показал, что по отношению к фотону всё дви-



жется с одинаковой скоростью, идея фазового портрета динамической системы обрела физический смысл. В самом деле, если фотон движется с одинаковой скоростью, равной скорости света, по отношению к любому телу, то и всё во Вселенной движется с одной и той же скоростью, равной скорости света, по отношению к фотону. При этом друг по отношению к другу части Вселенной продолжают смещаться. Объединить эти два условия возможно, если предположить, что в собственной системе фотона любой фрагмент Вселенной как бы размазан по всем точкам всех его возможных траекторий. Обратно, подобное облако представляет собой фотон для земного наблюдателя. Фотон как бы проходит по всем своим возможным траекториям так, как это интерпретировал Ричард Фейнман[1]. При прохождении через пластину с двумя прорезями фотон проходит через левую прорезь. Одновременно он проходит и через правую прорезь. Одновременно с этим он направляется к левой щели, но вдруг совершает вираж и проходит через правую прорезь. Одновременно он совершает длинную петлю вокруг туманности Андромеды и проходит левую прорезь на пути

1 ***Ричард Филлипс Фейнман (Файнман)*** (1918 –1988) – выдающийся американский учёный. Основные достижения относятся к области теоретической физики. Один из создателей квантовой электродинамики. В 1943–1945 годах входил в число разработчиков атомной бомбы в Лос-Аламосе. Лауреат Нобелевской премии по физике 1965 года «за фундаментальные работы по квантовой электродинамике, имевшие глубокие последствия для физики элементарных частиц».



к экрану. Согласно Фейнману фотон одновременно «рыщет» по всем возможным траекториям, соединяющим источник и пластину за экраном с прорезями. Вероятность того, что фотон появится в некоторой заданной точке экрана, определяется суммарным эффектом от всех возможных путей, ведущих в эту точку.

У Хорхе Луиса Борхеса есть эссе «Сад расходящихся тропок». В Саду расходящихся тропок герой выбирает всё разом, идет всеми возможными путями.

> *«Тем самым он творит различные будущие времена, которые, в свою очередь, множатся и ветвятся... Реализуются все... исходы, и каждый из них даёт начало новым развилкам».*

И ещё одна притча есть у Борхеса – «Вездесущий». Вот она.

> *«По пути из города Шравасти Будда должен был пересечь пространную равнину. С различных небес боги сбросили ему зонтики, чтобы предохранить от солнца. Дабы не обидеть благодетелей, Будда почтительно умножился, и каждый из богов видел Будду, шагавшего под его зонтиком».*

Судя по всему, наши далёкие предки верили в бесчисленность временных рядов, в растущую головокружительную сеть расходящихся, сходящихся и параллельных миров, которые сближаются, ветвятся, перекрещиваются или век за веком так и не соприкасаются, заключают в себе все мыслимые возможности и даже возможность существовать одновременно, сопричастно и всё-таки раздельно.

Однако эти воззрения оставались в области фантастического. Теперь эти старые модели реальности обретают техническую ипостась и математически точные формулировки.

Прежде всего – понятие фазового портрета. Формально фазовый портрет – это точки, соответствующие всем возможным состояниям системы в воображаемом n-мерном фазовом пространстве. Число измерений фазового пространства соответствует числу параметров рассматриваемой динамической системы, за исключением времени. В свою очередь, динамическая система – это некоторый фрагмент, мысленно вырезанный из окружающей алеаторной[1] среды, для которого установлен набор характерных параметров.

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Когда-то в понятие динамической системы вкладывали чисто механическое содержание, имея в виду набор тел, связанных силовыми взаимодействиями и подчиняющихся системе дифференциальных уравнений, вытекающих из законов Ньютона. Постепенно это понимание изменилось.

Сегодня динамической называется такая система, в которой каждое значение параметра в любой последующий момент времени получается из исходного набора параметров по определённому правилу. Это правило задаёт оператор эволюции динамической системы. Оператор эволюции может быть описан дифференциальным уравнением, если система ведёт себя как поток, или рекуррентным отображением, если система ведёт себя как каскад. В первом случае траектория системы есть непрерывная линия в фазовом пространстве. Во втором случае фазовой траекторией динамической системы является дискретная последовательность точек в фазовом пространстве.

Оператор динамической системы может представлять собой набор операций. При этом сложность динамических траекторий возрастает. Например, траектория броуновского движения частицы сложна и непред-

1 ***Алеатор*** (от лат. alea – игральная кость) – играющий в кости; алеаторный – полагающийся на случай; алеаторические условия – такие, исход которых зависит от случайностей.

сказуема – хаотична. И, между тем, совершенно случайной её не назовёшь. Как сказал Моше, совершенная случайность, как и совершенный хаос, – это, по иронии судьбы, некое совершенство. Под микроскопом величина и направление видимой скорости броуновской частицы изменяются самым безумным образом. Но присмотримся внимательнее. На отдельных участках частицы движутся по прямой. Если регистрировать частицу в сто раз чаще, мы получим сто промежуточных положений частицы. Эти новые данные превращают участок прямой траектории в ломаную, сложную кривую, сильно напоминающую исходную. Более ста лет тому назад Жан Батист Перрен[1] обнаружил удивительное свойство броуновской траектории: на любом масштабе эта траектория самоподобна.

Самоподобие – это уже некоторый порядок, нить Ариадны в самую гущу хаоса.

Классическая физика занималась такими динамическими системами, которые можно было не только выделить, но и отделить, изолировать от окружающей среды. В модели изолированной динамической системы её энергия сохраняется. Такие системы называют консервативными. В частности, маятник, совершающий колебания без трения, представляет собой консервативную динамическую систему. В реальности механическая энергия не сохраняется, а постепенно рассеивается (диссипирует) и переходит в тепло, т. е. в энергию микроскопического движения молекул, составляющих систему и её окружение. Такая модель называется диссипативной динамической системой. Строго говоря, в этом случае временная эволюция должна определяться не только состоянием самой системы, но и её окружением. При этом оператор эволюции может обусловливать деградацию системы и её «тепловую смерть», но может приводить к усложнению и развитию динамической системы.

Пусть в некотором фазовом пространстве есть кластер динамических систем, которые подчиняются единому оператору эволюции. Динамические системы кластера отличаются друг от друга только начальными параметрами. С течением времени каждая точка кластера перемещается в фазовом пространстве, как предписано оператором системы, так что форма кластера и его размеры будут меняться. Может случиться, что фазовый объём кластера в процессе временной эволюции будет оставаться постоянным. Это характерно для консервативных систем.

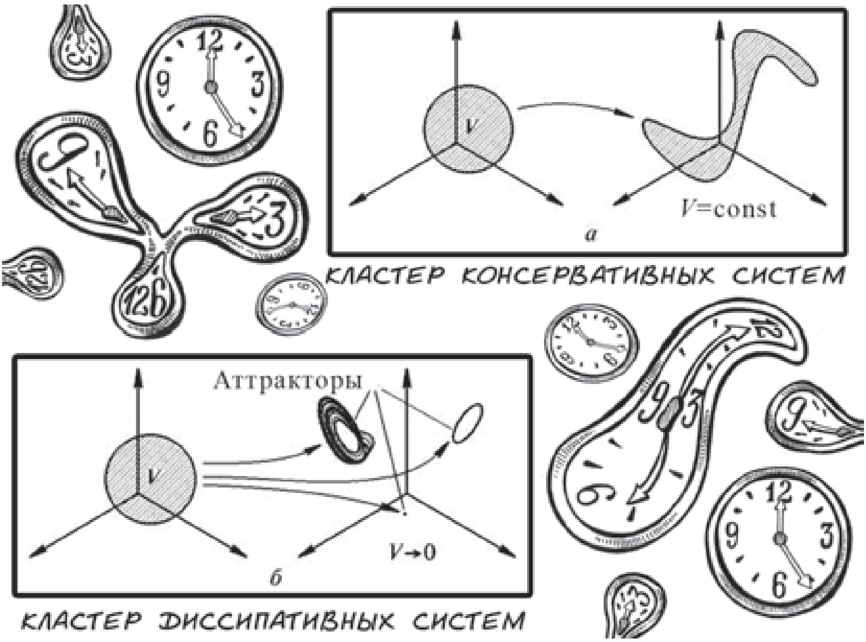
Кластер диссипативных систем ведёт себя иначе. С течением времени он «съёживается» и концентрируется в итоге на одном или нескольких

1 ***Жан Батист Перрен*** (1870–1942) – французский физик, лауреат Нобелевской премии по физике 1926 года «за работу по дискретной природе материи и в особенности за открытие седиментационного равновесия». Опыты по исследованию броуновского движения проводились в 1908–1909 гг.

аттракторах – подмножествах фазового пространства нулевого или ограниченного объёма. С точки зрения динамики во времени это означает, что режим, возникающий в системе, предоставленной самой себе, в течение времени «забывает» своё начальное состояние и принимает состояние аттрактора, к которому стремится.

Динамическая система может вести себя устойчиво или неустойчиво. В первом случае траектории, близкие в начальном состоянии, остаются близкими в процессе эволюции динамической системы. Во втором случае траектории, близкие в начальный момент, в процессе эволюции динамической системы быстро удаляются друг от друга. Сколь бы малой ни была погрешность в определении исходного состояния системы, со временем она быстро нарастает, пока не достигнет размера аттрактора. После этого положение динамической системы в фазовом пространстве становится «размыто» и точно предсказать поведение системы практически невозможно. Однако можно говорить о вероятности того, что динамическая система обнаружит себя в той или иной точке аттрактора.

Между теорией динамических систем и теорией вероятности много общего. Так, множеству событий в ограниченном объёме фазового пространства можно приписать некоторое число, аналогичное понятию вероятности. Это число получило название «инвариантной меры». Её можно интерпретировать как вероятность того, что траектория посетит данное множество.



Связь между теорией динамических систем и теорией вероятностью оказывается глубже, чем формальная аналогия. Дело в том, что в основе теории динамических систем лежит понятие фазового пространства, а в основе теории вероятности – «пространство элементарных событий». То и другое исключают только один параметр – время. Пространство элементарных событий подразумевает идею о том, что все возможные исходы случайного процесса можно представить в виде точек в пространстве. В простых случаях это пространство сводится к нескольким точкам, однако в сложных ситуациях может представлять собой их непрерывное множество, совсем как фазовое пространство.

В пространстве элементарных событий также существуют области притяжения – аттракторы. Уже в «Трактате об азартных играх» Джероламо Кардано[1] отделял фатум, удачу и примету от манипуляций при играх в карты или в кости. Он, опытный игрок, знал лучше многих, как изменение центра тяжести кости притягивает более частое выпадение одной из её сторон. Реализацию одного из элементарных событий система притягивает как магнит. И это напоминает области притяжения динамических систем в фазовом пространстве – аттракторы.

1 ***Джероламо Кардано*** (1501 –1576) – итальянский математик, инженер, философ, медик и астролог. В его честь названы открытые формулы решения кубического уравнения (Кардано был их первым публикатором), карданов подвес и карданный вал.

Траектории диссипативной динамической системы, выходящие из различных начальных точек, с течением времени стремятся собраться в некоторых сравнительно небольших областях фазового пространства. Эти области называют аттракторами. Если нет существенных внешних возмущений, то траектории динамических систем, попав в область аттрактора, остаются в ней постоянно. Картина напоминает ситуацию в бассейне реки или моря – потоки воды сливаются в реки, которые впадают в море. Поэтому область притяжения, в которой траектории стремятся к одному или нескольким аттракторам, называют бассейном аттракторов.

В этом ракурсе траектория динамической системы является либо переходной на пути к аттрактору, либо асимптотической, когда траектория вышла на аттрактор. Попав в бассейн аттрактора, динамическая система не может его покинуть. Напротив, она рано или поздно будет «втянута» в фазовое пространство, занятое аттрактором. Аттрактор притягивает к себе динамические системы, как чёрные дыры притягивают материю, волны и даже свет. Каким бы ни было начальное состояние системы, оно будет «забыто». После поглощения системы аттрактором мы сможем сказать лишь то, что оно «где-то на аттракторе». Можно выделить несколько типовых по своей структуре аттракторов.

Простейшим видом асимптотического поведения является состояние равновесия, которому соответствует неподвижная точка в фазовом пространстве. Такой аттрактор называется точечным. Это, например, точка равновесия для маятника с трением.

Более сложным является периодическое поведение, которому соответствует круговой аттрактор. Например, орбита в задаче Ньютона о вращении одного тела относительно другого. Ещё более замысловато, чем движение по кругу, выглядит циклическое движение на поверхности тора. Спиралевидные круги после множества оборотов возвращаются в исходную точку, и цикл повторяется.

Гораздо более сложным являются квазипериодические колебания, когда в системе наблюдаются две частоты ω_1 и ω_2, причём их отношение ω_1/ω_2 – иррациональное число. Эта ситуация реализуется только если размерность фазового пространства не меньше трёх. Асимптотическое поведение такой системы соответствует заполнению траекторией поверхности двумерного тора (поверхности бублика).

Так, ни одна весна не походит на другую. Но каждый год возвращается весна. Ни один поворот планеты вокруг Солнца не тождественный с другим, ибо отклонения изменяют линию орбиты, изменяется тело планеты, из-

меняется Солнце, вся планетная система передвигается в мировом пространстве, и, тем не менее, каждая планета вращается вокруг своего Солнца по постоянной орбите.

Далее степень сложности может нарастать при увеличении числа независимых частот. Траектория при этом может заполнять трёхмерный, четырёхмерный и многомерный тор.

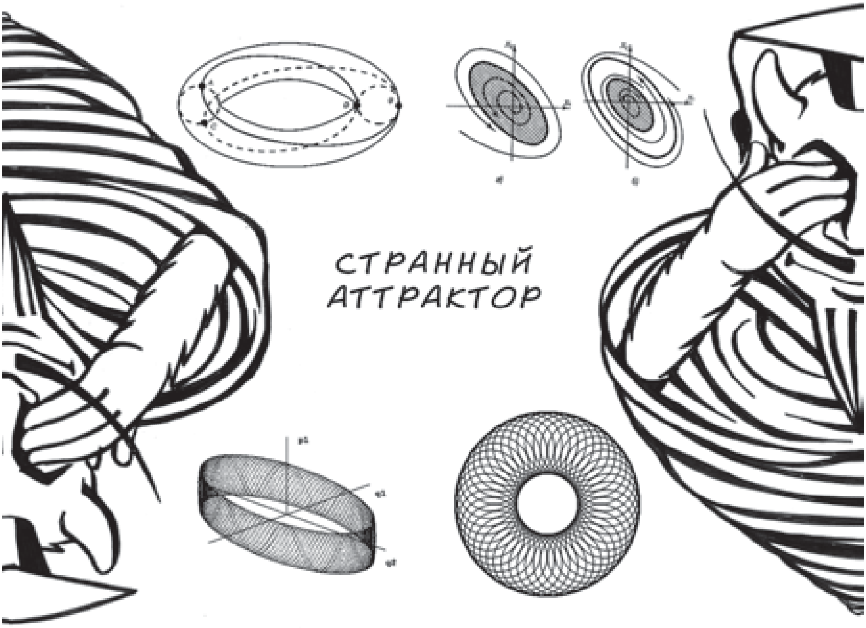
В 1944 году Л. Д. Ландау[1] построил модель турбулентного потока как каскада вихрей всех возможных масштабов. Такой режим представляет собой вихрь, наложенный на вихрь. Согласно гипотезе Ландау турбулентное течение в фазовом пространстве представляет собой тор очень большой или даже бесконечной размерности. Ничего нереального в этой гипотезе нет, но изучение статистических свойств турбулентности показало, что она не согласуется с экспериментальными данными. Это послужило стимулом для разработки новой модели турбулентности.

В 1970-х годах Рюэль[2] и Такенс[3] предположили, что может существовать аттрактор с набором характеристик турбулентного потока: устой-

1 ***Лев Давидович Ландау*** (1908–1968) – советский физик-теоретик, основатель научной школы, академик АН СССР. Лауреат Нобелевской премии по физике 1962 года «за пионерские теории конденсированных сред, в особенности жидкого гелия».

2 ***Давид Рюэль*** (род. 1935) – бельгийско-французский математический физик, работающий в области статистической физики и теории динамических систем.

3 ***Флорис Такенс*** (1940–2010) – голландский математик, внёсший известный вклад в теорию хаотических динамических систем.



чивостью, ограниченным числом степеней свободы и иррегулярностью. С геометрической точки зрения вопрос казался чистой головоломкой. Какой вид должна иметь орбита, изображаемая в ограниченном пространстве, чтобы она никогда не повторяла и не пересекала саму себя? Чтобы воспроизвести каждый ритм, орбита должна являть собой бесконечно длинную линию на ограниченной площади. Другими словами, её аттрактор должен быть фракталом.

На тот момент фракталы ещё не были определены, но геометрические формы с такими свойствами – «пыль Кантора», «снежинка Коха», «ковер Серпинского»[1] – уже были описаны математиками. Более того, уже в 1963 году американский математик и метеоролог Эдуард Лоренц описал подобный объект – устойчивую, иррегулярную траекторию с ограниченным числом степеней свободы – в метеорологии.

Эта траектория не выходила за ограниченную область пространства и никогда не пересекала сама себя. Если бы подобное случилось и она возвратилась бы в точку, которую уже миновала, движение в дальнейшем повторялось бы, образуя тороидальный аттрактор, но такого не происходило.

Давид Рюэль назвал такой объект «странным аттрактором». В самом деле, траектории на таком аттракторе ведут себя довольно странно. Если в начальный момент выделить некоторый малый объём – «каплю» – в фазовом

1 ***Подробней см.:*** Деменок С. Л. Просто фрактал. – СПб.: ООО «Страта», 2012. ISBN 978–5-906150–01–1

пространстве на «странном аттракторе», то с течением времени эта «капля» размажется по всему аттрактору. Такое интенсивное перемешивание указывает на то, что любые близкие траектории быстро расходятся, иными словами, они локально неустойчивы. Следствием этого является существенная зависимость от начальных условий: малейшее изменение начальных условий существенно влияет на положение системы в процессе её эволюции.

Траектория динамической системы, попав в область «странного аттрактора», совершает причудливые маневры, ухитряясь никогда не пересекать саму себя, с собой не соприкасаться и при этом не выходить за пределы аттрактора. Траектория динамической системы при этом никакой гладкой поверхности в фазовом пространстве не заполняет. Будучи локализованной в небольшой области фазового пространства, траектория демонстрирует сложную структуру, определяющую весьма запутанное и одновременно точное и строгое поведение динамической системы.

Такая филигранная точность предполагает существенную зависимость поведения траектории от начальных условий.

Это качество часто приводят как определение динамического или регулярного хаоса. На самом деле оно является необходимым, но не достаточным условием для формирования динамического хаоса.

В геометрическом плане фазовый портрет странного аттрактора выглядит крайне запутанным. Если разрезать его по сечению Пуанкаре, то перед нами будет поверхность со множеством тончайших проколов от пересекающей её траектории. Причем проколы размещены не как попало, но согласно строжайшему правилу и так, что между любыми двумя проколами рано или поздно обязательно появится ещё прокол. Так в сечении формируется рваная, изрезанная, «дырявая» форма, напоминающая «пыль Кантора». Эта форма имеет дробную размерность и представляет собой несвязный фрактал.

ФРАКТАЛ – «ЦАРАПИНА НА ПОВЕРХНОСТИ ВСЕГО»

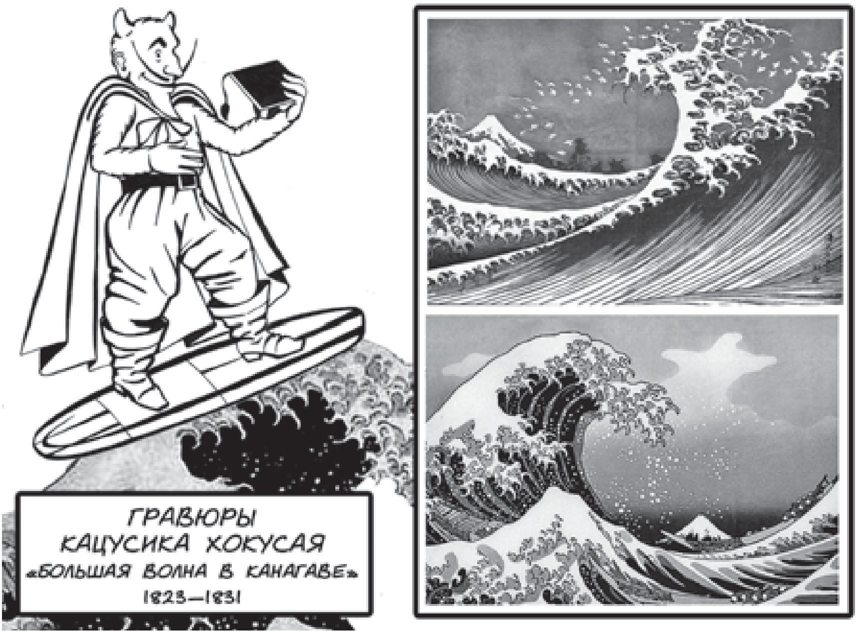
Изломанный, изрезанный, раздробленный, скомканный – формальные признаки, которые усиливаются по мере перехода к хаосу. Всё мирное, надёжное, устойчивое не терпит скачков. Всё страшное, нервное, рваное предвещает срыв, сдвиг, опасность. Всё хорошее должно быть плавным, гладким, прямым или округлым, но, главное, доступным описанию и предсказуемым. Всё пугающее – неописуемо и непредсказуемо.

В XX веке по всему фронту коллективного восприятия реальности прошла трещина. Если раньше было принято видеть «гармонию сфер» за шумом мелких и случайных событий, то теперь всё переменилось. Принцип неопределённости Гейзенберга, относительность в интерпретации Эйнштейна, роль слабых возмущений в трактовке Пуанкаре вели на путь описания неописуемого.

На подступах к хаосу в XX веке учёные, художники, композиторы, поэты искали новые формальные, визуальные, музыкальные средства для описания дискретности, иррегулярности и одновременно связности окружающей реальности. В этом глобальном тренде открытие Мандельброта и естественно, и логично. Он обнаружил, что в природе почти повсеместно присутствует одно общее свойство – самоподобие на разных масштабах. Самый простой пример – волна, покрытая рябью (более мелкими волнами), которые, в свою очередь, покрыты рябью, как на картинах Кацусика Хокусая[1].

Говоря упрощённо, фракталы – это всё, что изломано и пористо, разветвлено, измято и разорвано, причём остаётся таким, как пристально мы бы в эти объекты ни вглядывались. Дерево состоит из веток и веточек, облако – из меньших облачков, заливы – из бухт, и так много раз, почти бесконечно.

1 ***Кацусика Хокусай*** (1760–1849) – великий японский художник укиё-э (яп. – образы изменчивого мира), иллюстратор, гравёр. Работал под множеством псевдонимов. Является одним из самых известных на Западе японских гравёров, примечательнейший мастер завершающего периода японской ксилографии.



Беря всё более и более сильный бинокль, мы видим заливы между скалами, камешками, песчинками. Определённость фрактальной формы в целом сочетается с её локальной неопределённостью. Так, ни один лист на дереве не похож на любой другой, но, тем не менее, на берёзе ежегодно появляются только берёзовые листья, а не листья липы, тополя, дуба.

Структуры, состоящие из частей, которые «в каком-то смысле подобны целому», Бенуа Мандельброт назвал фракталами. Он пояснял:

> *«Все фигуры, которые я исследовал и называл фракталами, в моём представлении обладали свойством быть нерегулярными, но самоподобными».*

При этом слово «подобный» не всегда имеет классический смысл «линейно увеличенный или уменьшенный», но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий». Широкое толкование позволяло включить в число фракталов давно известные в математике множества Кантора, Коха, Серпинского, Пеано, Жюлиа и др. Эти конструкции противоречили интуиции, их считали монстрами – удивительными, но досадными исключениями. Встречаясь с этими образами, математики и учёные «закрывали глаза», поскольку из-за их нерегулярности, почти хаотичности, Евклидова геометрия не могла с ними справиться. Именно эта почти хаотичность, в пределах самоподобия, была тем, что хотел выразить в новом понятии Мандельброт.

«Моя атака в новой области, – пишет он, – имела целью разделить на части понятие хаоса. Одна часть при этом так и осталась нетронутой, поскольку мы не знаем, как её исследовать. Вторая же, хотя и менее общего вида, но весьма внушительная, заслуживает быть выделенной. Её следовало бы изучить, хотя бы в силу многочисленности примеров самоподобия в природе, а ещё потому, что именно из-за самоподобия она вполне поддаётся изучению».

Мандельброт нашёл, как с помощью дробной размерности Хаусдорфа-Безиковича[1] зафиксировать и описать связность «рваных» фрактальных форм. Иногда фрактал даже определяли как геометрический объект, имеющий дробную размерность. Однако Мандельброт всегда подчёркивал, что размерность Хаусдорфа-Безиковича позволяет различать категории «гладкий» и «хаотичный», но не разделяет категории «нерегулярный, но самоподобный».

Таким образом, есть «дикий хаос» – совершенно безумный и недоступный никакому описанию хаос, и есть «ручной хаос», поддающийся изучению и описанию благодаря фракталам.

С самого начала Мандельброт оставил возможность для широкой трактовки понятия «фрактал». По сути, фрактал есть геометрическая форма, построенная по определенному правилу (алгоритму), и, как результат, обладает масштабной инвариантностью – размерностью Хаусдорфа-Безиковича. Таким образом, небольшая часть фрактала как бы содержит информацию обо всём фрактале. В каком бы приближении мы ни рассматривали фрактал, мы всегда видим одно и то же или, во всяком случае, нечто близкое, подобное.

Фрактал иллюстрирует связность трёх планов реальности – формальный (имеющий форму), операциональный (функциональный) и символический (означаемый знаком, числом). Фрактал демонстрирует возможность сочетания сложности формы с простотой операции. Он иллюстрирует то, как хаос и сложность могут возникать в результате действия простых за-

1 ***Феликс Хаусдорф*** (1868–1942) – немецкий математик, один из основоположников современной топологии. ***Абрам Самойлович Безикович*** (1891–1970) – российский и британский математик караимского происхождения. В России работал в Санкт-Петербургском и Пермском университетах, в Великобритании – в университетах Ливерпуля, Кембриджа (Тринити-колледж).

конов и правил. Фракталы позволили описать совершенно иной уровень сложности, который до этого выглядел неописуемым и хаотичным. Фракталы открыли иерархию совершенно нового уровня сложности, структура которого раскрывается не сразу, но только при внимательном и сосредоточенном рассмотрении.

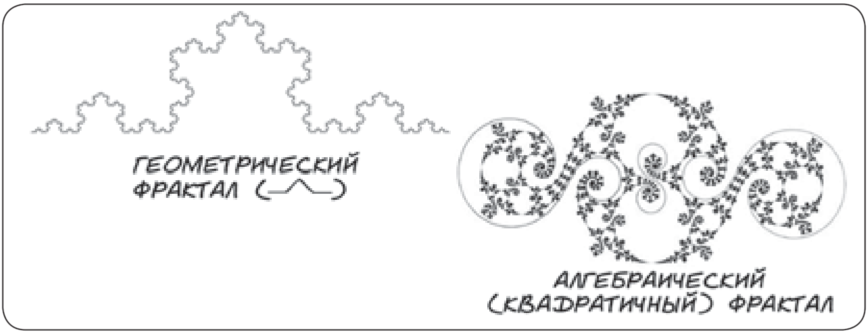
Истоки фрактальной геометрии восходят к 1959 году, когда Мандельброт изучал биржевые скачки цен. Они никак не вписывались в колокообразное (нормальное) распределение из-за «слишком толстых» хвостов. Экономистами было замечено, что скачки цен склонны формироваться в кластеры. Кроме того, было замечено, что если из графиков цен для разных промежутков времени убрать все свидетельства о масштабе, то невозможно будет определить, говорят они о днях, месяцах или годах. Это наблюдение ясно указывало на некое масштабное самоподобие.

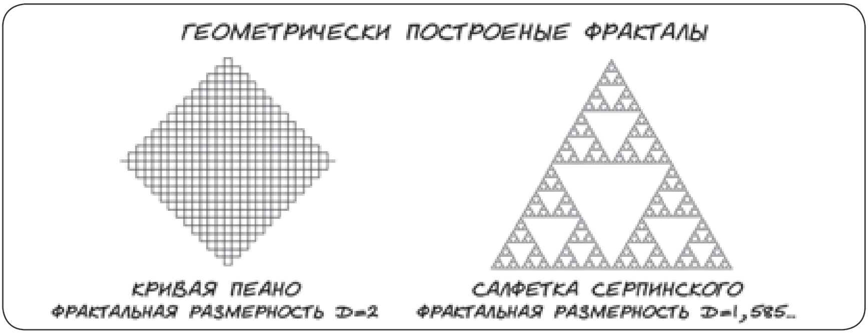
Мандельброт обнаружил, что это самоподобие выражается в том, что между размером скачков курсов и частотой их появления существует степенная зависимость. Мандельброт нашёл точку опоры. В 1964 году Мандельброт высказался в том смысле, что надо отличать «ручной» случай от стихийного, «дикого» случая. Впоследствии эти работы помогли Мандельброту справиться с «шумами», которые возникают при передаче данных между компьютерами, и открыть фрактальную геометрию.

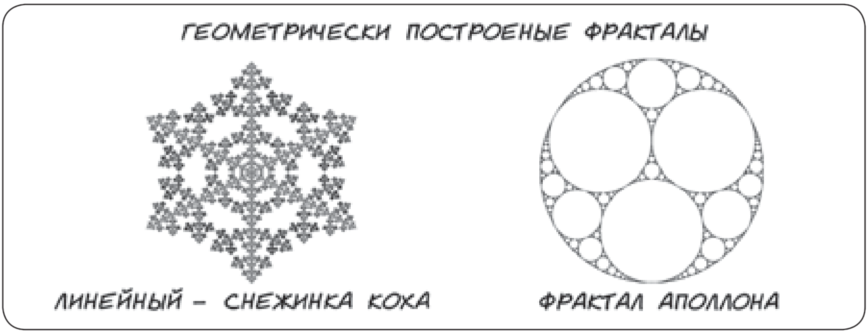
> *«Я приучал свою интуицию воспринимать как должное те формы, которые считались абсурдными и отвергались с самого начала», – писал Мандельброт.*

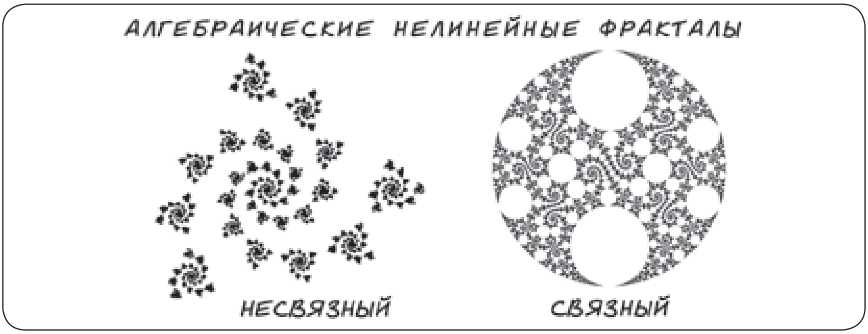
Таких форм стало появляться всё больше и больше. Разнообразие, сначала восхитившее, теперь начинало страшить. Чтобы не растеряться в этих «фрактальных джунглях» необходим хоть какой-то ориентир. В последние годы сложилась некая классификация фракталов. Мы должны отдавать себе отчёт, что любая классификация есть, прежде всего, интерпретация и потому она всегда условна. Не следует удивляться тому, что границы нашей классификации размыты, – таково свойство любой интерпретации.

Фрактал имеет три ипостаси – формальную, операциональную и символическую, которые ортогональны друг другу. И это значит, что одна и та же форма фрактала может быть получена посредством разных алгоритмов, а одно и то же число – фрактальная размерность – может появиться у совершенно разных по форме фракталов. С учётом этих замечаний классифицируем фракталы по символическому, формальному и операциональному признакам:


ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ФРАКТАЛ
АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ (КВАДРАТИЧНЫЙ) ФРАКТАЛ


ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ПОСТРОЕНЫЕ ФРАКТАЛЫ
КРИВАЯ ПЕАНО
ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ D=2
САЛФЕТКА СЕРПИНСКОГО
ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ D=1,585...


ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ПОСТРОЕНЫЕ ФРАКТАЛЫ
ЛИНЕЙНЫЙ – СНЕЖИНКА КОХА
ФРАКТАЛ АПОЛЛОНА


АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ФРАКТАЛЫ
НЕСВЯЗНЫЙ
СВЯЗНЫЙ

- в символическом плане характерная для фрактала размерность может быть целой или дробной;
- по формальному признаку фракталы могут быть связные, как лист или облако, и несвязные, как пыль;
- по операциональному признаку фракталы могут быть разделены на регулярные и стохастические.

Регулярные фракталы строятся по строго детерминированному алгоритму, который может быть задан геометрическим правилом или алгебраической формулой. Кроме того, регулярные фракталы могут быть линейными или нелинейными.

Стохастические фракталы, подобные в стохастическом смысле, возникают, когда в алгоритм их построения вводится случайная величина. Интенсивность и вероятность случайного воздействия в процессе построения фрактала отражаются в его форме. В процессе многократного повторения операций построения фрактала с заданной интенсивностью и вероятностью случайных воздействий происходит синхронизация выбранных случайным образом исходных точек в неслучайную, более того, строго определённую форму. Стохастические фракталы по принципу построения делятся на СИФ-фракталы, алгоритм построения которых разработан Майклом Барнсли[1] в середине 1980-х, и алеаторные фракталы, алгоритм построения которых предложен мной в 2010 году.

Алеаторные фракталы представляют собой новое семейство фракталов. Они отличаются от всех известных фракталов тем, что они необратимы. Мы всегда можем повторить геометрические или алгебраические алгоритмы построения линейных и нелинейных фракталов в обратном направлении. СИФ-фракталы также обратимы в том смысле, что обратимые операции выбираются по случаю и с определённой вероятностью воспроизведут качественную картину построения фрактала в обратном порядке. В моей книге «Фрактал: между мифом и ремеслом»[2] описано новое множество фракталов, которые я назвал алеаторными (от лат. ālea – игральная кость) на том основании, что в каждый шаг итерационного процесса встроен генератор случайных чисел. Такая модель имитирует то обстоятельство, что в окружающей нас реальной жизни любой процесс происходит в поле воздействия многих случайных сил.

В разработанной для этой книги новой версии программы «Фрактория™ 2.0» за основу принят метод «систем итерируемых функций» (СИФ), на каждом шаге которого добавлен генератор случайных чисел,

1 ***Майкл Филдинг Барнсли*** (Michael Barnsley) – британский математик, исследователь и предприниматель, разработчик алгоритма фрактального сжатия изображений (совместно с Аланом Слоуном (Alan Sloan)).

2 Деменок С. Л. Фрактал: между мифом и ремеслом. – СПб.: ООО «Ринвол», Академия исследования культуры, 2011.

который фиксируется заданием двух параметров – математическим ожиданием μ (x) и среднеквадратичным отклонением σ (x) случайной величины x.

Математическое ожидание – число, вокруг которого сосредоточены значения случайной величины, а среднеквадратичное отклонение – мера рассеяния случайной величины от его математического ожидания. Если оба параметра равны нулю, то мы исключаем генератор случайных чисел и результатом построения являются общепринятые фракталы. Применение генератора случайных чисел позволяет расширить область фрактального моделирования.

Надо признать, что результат превзошёл ожидания. На дисплее компьютера возникали не только размытые образы фракталов хорошо известных, но появлялись и довольно часто образы новые, эстетически привлекательные. Некоторые из них приведены на иллюстрации на следующей странице.

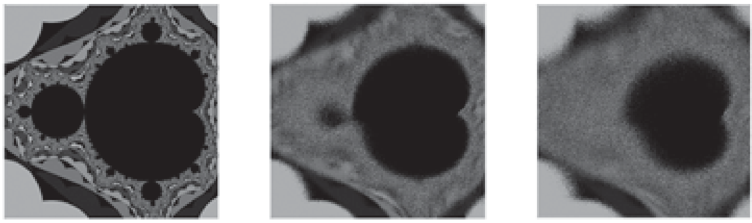
ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС

Успехи классической механики в XVII–XIX вв. были столь впечатляющими, что стало казаться возможным представлять себе всю Вселенную как одну гигантскую динамическую систему. Эту позицию чётко сформулировал Лаплас:

«Состояние природы в настоящем есть, очевидно, следствие того, каким оно было в предыдущий момент, и если мы представим себе разум, который в данное мгновение постиг все связи между объектами Вселенной, то он сможет установить соответствующие положения, движения и общие воздействия этих объектов в любое время в прошлом или в будущем» (1776 год).

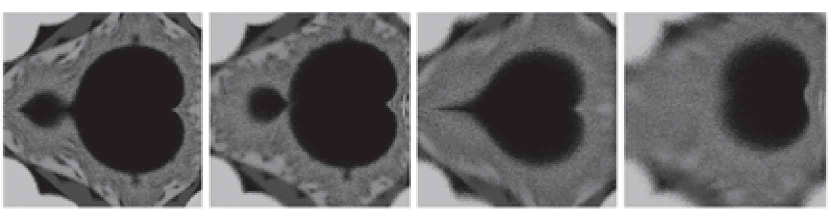
Эта доктрина – лапласовский детерминизм – исходила из полной предсказуемости поведения детерминированной динамической системы в той мере, в которой известны начальные условия и законы эволюции динамической системы. Напомним, что демон Лапласа знает начальное состояние любой системы и может рассчитать все последующие её состояния. Вот только на каждом шаге эволюции он будет вынужден беспрерывно уточнять параметры начального состояния, поскольку по мере развития системы её чувствительность к точности начальных параметров возрастает, и возрастает экспоненциально быстро. Выдержать этот дьявольский марафон без финишной черты даже демону Лапласа не под силу.

А)



Б)

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ФРАКТАЛЫ: ЛИСТ ПАПОРОТНИКА, ПОСТРОЕННЫЙ МЕТОДОМ СИСТЕМ ИТЕРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ М. БАРНСЛИ (А), И АЛЕАТОРНЫЙ ФРАКТАЛ МАНДЕЛЬБРОТА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ МАЛЫХ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ (Б)



А) Б) В) Г)

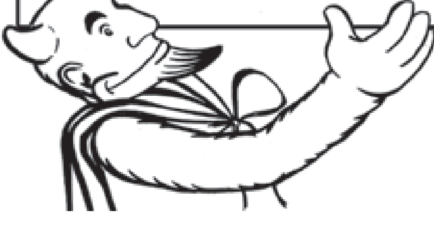
АЛЕАТОРНЫЕ ФРАКТАЛЫ МАНДЕЛЬБРОТА, ПОЛУЧЕННЫЕ В ОБЛАСТИ $X_{MIN}=-1.5$; $X_{MAX}=0.5$; $Y_{MIN}=-1$; $Y_{MAX}=1$:

А) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ X ПРИ $\mu=0.045$ И $\Sigma=0.045$;

Б) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ Y ПРИ $\mu=0.045$ И $\Sigma=0.045$;

В) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ X ПРИ $\mu=0.12$ И $\Sigma=0.12$;

Г) ВОЗДЕЙСТВИЕ ОПЕРАТОРА RANDOM ПО ПАРАМЕТРУ Y ПРИ $\mu = 0.12$ И $\Sigma = 0.12$



Как результат на смену детерминизму Лапласа пришла новая парадигма, сформулированная в 1903 году Анри Пуанкаре:

«Совсем незначительная причина, ускользнувшая от нашего внимания, вызывает значительный эффект, который мы не можем не заметить, и тогда мы говорим, что этот эффект вызван случаем. Если бы мы точно знали законы природы и положение Вселенной в начальный момент, мы могли бы точно предсказать положение той же Вселенной в последующий момент. Но даже если бы законы природы открыли нам все свои тайны, мы и тогда могли бы знать начальное положение только приближённо. Если бы это позволило нам предсказать последующее положение с тем же приближением, это было бы всё, что нам требуется, и мы могли бы сказать, что явление было предсказано, что оно управляется законами. Но это не всегда так; может случиться, что малые различия в начальных условиях вызовут очень большие различия в конечном явлении. Малая ошибка в первых породит огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, и мы имеем дело с явлением, которое развивается по воле случая».

Изучая стабильность солнечной системы, Пуанкаре пришёл к весьма важному утверждению, известному как «теорема возвращения». Эта теорема утверждает, что система из материальных точек, обладающих массами и движущихся по законам механики Ньютона, через некоторое время обязательно должна вернуться в состояние, весьма близкое к первоначальному. Теорема справедлива для многих дифференциальных уравнений, решения которых представляют собой квазипериодически повторяющиеся траектории. Теорема, однако, ничего не говорит о характере траектории таких динамических систем.

Заключительный том «Новых методов небесной механики» Пуанкаре вышел в свет в 1899 году. В нём автор описывает

«фигуру, образованную бесконечно многими пересечениями, причем сами пересечения формируют своего рода решётку, ткань или сетку с бесконечно малыми ячейками, через каждую из которых проходит кривая, изогнутая столь сложным образом, чтобы не пересечь саму себя».

Пуанкаре не дал графического представления о такой сети и таких кривых. Он просто отметил в конце книги, что эта картинка слишком сложна, чтобы её нарисовать. И он добавил, что во многих случаях нет никаких шансов предсказать следующий поворот кривой, если только не провести расчёт её траектории с самого начала.

Иногда и этого оказывалось мало. Расчёты траектории таких кривых часто оказывались столь чувствительны к начальным условиям, что точные предсказания становились практически невозможными. Таким образом, траектории кривых Пуанкаре, будучи полностью предопределёнными, оказывались непредсказуемыми. Но за эту черту между порядком и хаосом Пуанкаре всё-таки не переступил, хотя оставил множество оговорок, на которые мы ещё будем ссылаться.

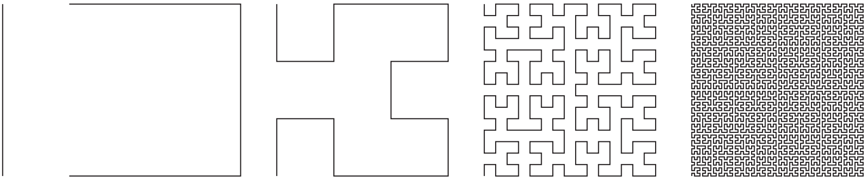
Феномен, подтверждающий правоту Пуанкаре, был открыт и стал общеизвестным в последние несколько десятилетий – это динамический или регулярный хаос.

Хаотическим режимам присуща нерегулярность и, как следствие, непредсказуемость. Режим динамического хаоса и предопределён и регулярен, но также непредсказуем. Динамический хаос ассоциируется с наличием странных аттракторов – сложно устроенных фрактальных множеств, притягивающих к себе все траектории из своего бассейна. Попав в область странного аттрактора, близкие траектории демонстрируют быстрое «разбегание» при том, что фазовый объём динамической системы не увеличивается. Любая сколь угодно малая область фазового пространства, выделенная в начальный момент, со временем «перемешивается», «распыляется» по всей области странного аттрактора. Происходит своего рода стирание памяти о начальном состоянии системы. Обратной стороной этого процесса является невозможность предсказания поведения системы в будущем, в силу сверхчувствительной зависимости режима к сколь угодно малым отклонениям начальных условий. Именно это ведет к потере предсказуемости. Поэтому динамическая система, будучи полностью предопределённой, ведёт себя непредсказуемо.

Согласно принятым сегодня представлениям, такой режим регулярного хаоса наступает при выполнении трёх условий:

1. Существует, по крайней мере, одна плотная орбита. Плотная орбита – это такое скопление точек, в любой окрестности каждой из которых со временем появиться точка той же орбиты.
2. Имеет место квазипериодическое возвращение траекторий, которому сопутствуют неустойчивость, нелинейность и перемешивание.
3. Наблюдается существенная зависимость поведения траекторий от начальных условий.

Поясним понятие плотной орбиты. Ещё Лейбниц утверждал, что линией как паутиной можно покрыть плоскость. В этом случае для любой точки на плоскости найдется сколь угодно близкая точка такой линии. В 1891-м году появилась статья Давида Гильберта[1], в которой он представил кривую, покрывающую плоскость без пересечений и касаний. Для любой точки этой линии, в любой сколь угодно малой её окрестности со временем появится точка, принадлежащая той же самой линии. Кривая Гильберта, таким образом, иллюстрирует плотную орбиту.



Построение кривой Гильберта. Шаги 1, 2, 3, 5, 7

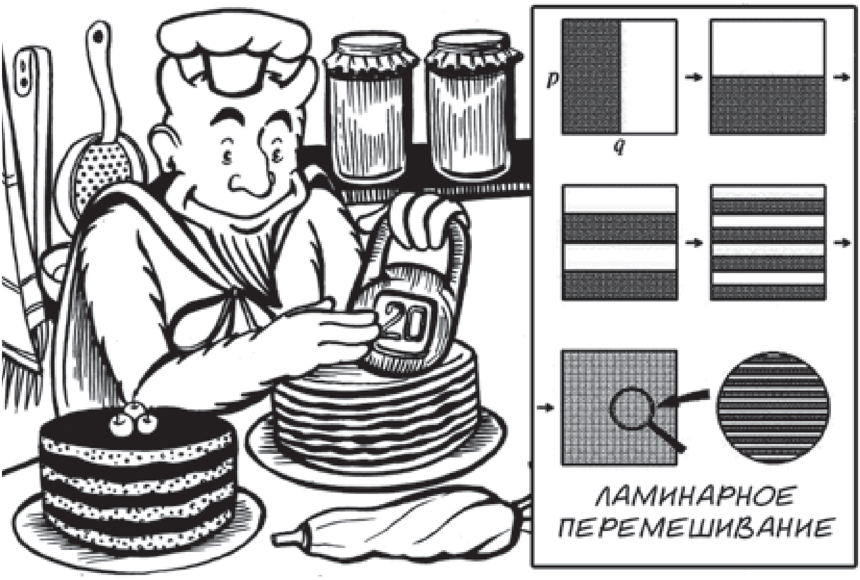
Что же такое «квазипериодическое возвращение траекторий»? Рассмотрим поведение нелинейной динамической системы с неустойчивым режимом. Слегка нарушив режим малым воздействием, мы поначалу будем фиксировать нарастание возмущения в силу неустойчивости режима. Будь система линейной, возмущение могло бы возрастать до бесконечности. В большинстве реальных диссипативных систем нарастание возмущений имеет предел. При больших отклонениях изменяется характер сил, определяющих поведение системы, и возмущение начинает затухать. Система начинает возвращаться в исходное состояние.

Однако возращение точно в то же состояние маловероятно, так как система неустойчива. Более вероятно, что система вернётся в малую окрестность исходного состояния (подойдёт очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнёт от него удаляться. Этот процесс будет длиться во времени без ограничений и без повторений.

Проиллюстрируем этот сценарий математическим примером.

Пусть зависимость амплитуды отклонения $\phi(x)$ от исходного состояния x определяется соотношением $\phi(x) = kx - bx^3$, где k и b – положительные коэффициенты, а $x = 0$ – точка неустойчивого равновесия. Если $x<<1$ и $bx^3 << kx$, то $\phi(x) \approx kx$. В этом случае $\phi(x)$ линейно возрастает с увеличением x. Если x становится сравнимым с единицей, то членом

1 ***Давид Гильберт*** (1862–1943) – немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики (теории инвариантов, теории алгебраических полей, функционального анализа и др.)



bx^3 пренебрегать уже нельзя. Здесь отклонение ϕ (x) начнёт испытывать ограничение. При некоторых x значение ϕ (x) вновь будет близко к нулю, т.е. система вернётся в малую окрестность исходного состояния (подойдёт очень близко к состоянию неустойчивого равновесия) и вновь (в силу неустойчивости) начнёт от него удаляться. Этот процесс будет длиться и длиться. В общем случае траектория, испытав действие механизма нелинейного ограничения, возвращается в окрестность исходного состояния. Такому возвращению сопутствует перемешивание.

Перемешивание можно проиллюстрировать в наглядной геометрической форме с помощью так называемого «отображения пекаря».

Рассмотрим единичный квадрат на плоскости (x, y). Разрезаем его пополам, как кусок теста, накладываем одну половинку на другую и раскатываем так, чтобы восстановить исходную форму. Для наглядности «тесто», оказавшееся слева при первом разрезе, изображено тёмным, а справа – светлым. На рисунке показано, как выглядит распределение тёмного и светлого теста на нескольких последовательных шагах.

При большом числе итераций это распределение принимает вид набора тонких и длинных чередующихся тёмных и светлых полосок. При многократном повторении процедуры, в конце концов, получаем кусок теста, который выглядит однородным. Взяв для пробы небольшой кусочек, мы обнаружим в нем присутствующие в равных долях тёмную и светлую составляющие.