

С. Л. Деменок, Л. И. Высоцкий, В. В. Медведев, С. М. Сивуха

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ



ОСНОВЫ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ

УДК 532.546:536.24
ББК 30.124:31.31
П64

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор *А.И.Есин*,
кандидат технических наук, доцент *Б.И.Юдин*.

Деменок С.Л., Высоцкий Л.И., Медведев В.В., Сивуха С.М.

П64 Потенциальные течения жидкости в каналах: монография.
– СПб.: Страта, 2015. – 106 с.
ISBN 978-5-906150-22-6

В монографии рассмотрены вопросы, связанные с разработкой и применением моделей потенциальных течений в каналах теплообменных и технологических устройств и аппаратов. Приведены фотографии картин течения.

Предназначена для специалистов, занимающихся решением теоретических и прикладных задач по гидродинамике, тепло- и массообмену.

Ил. 43. Табл. 8. Библиогр.: 29 назв.

УДК 532.546:536.24
ББК 30.124:31.31

ISBN 978-5-906150-22-6

© С.Л.Деменок, 2015
© Л.И.Высоцкий, 2015
© В.В.Медведев, 2015
© С.М.Сивуха, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ.....	7
1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ	11
2. ПОЛУЧЕНИЕ ЛИНИЙ ТОКА НА ПРИБОРЕ ХИЛ-ШОУ.....	17
3. ОПТИЧЕСКИ АКТИВНАЯ ЖИДКОСТЬ. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА ВИЗУАЛИЗАЦИИ	23
3.1. История вопроса	23
3.2. Выбор оптически активной жидкости	25
3.3. Свойства водного раствора пентаоксида ванадия	27
3.4. Методика исследования картины движения жидкости.....	28
3.5. Описание стенда по визуализации потоков и принципа его работы.....	32
3.6. Примеры визуализации потоков	37
4. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛИ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ	42
4.1. Течение в диффузорах, конфузорах и каналах с волнообразными стенками	42
4.1.1. Исходные уравнения и их решения.....	42
4.1.2. Плоский потенциальный поток в канале с волнообразными стенками	43
4.1.3. Осесимметричный потенциальный поток в канале с волнообразными стенками.....	49
4.1.4. Плоский и осесимметричный потоки в канале с монотонно расходящимися и сходящимися границами	53
4.1.5. Плоский и осесимметричный потоки в каналах с заданным распределением скоростей в их входных сечениях.....	59
4.1.6. Связь между характеристиками плоского и осесимметричного каналов	62
4.2. Течение потока охлаждающего воздуха в носовой части дефлекторной лопатки.....	64
4.2.1. Постановка задачи	64
4.2.2. Наложение прямолинейно-поступательного потока на плоский источник	65
4.3. Течение пристенной струи, вытекающей в ограниченное пространство.....	73
4.3.1. Постановка задачи	73
4.3.2. Расчет границы плоской струи, вытекающей в ограниченное пространство	74
4.4. Обтекание шаров и шаровых укладок в каналах	86

4.5. Профилирование тройников и отводов	89
4.6. Профилирование каналов первичных преобразователей расхода	93
4.7. Профилирование подводящих и отводящих каналов	95
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	101
Список литературы.....	103

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Течение вязкой ньютоновской жидкости описывается системой уравнений Навье-Стокса и неразрывности. В случае постоянной плотности ($\rho = const$) они, в проекциях на оси декартовой системы координат x, y, z , имеют вид:

$$a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x = \frac{du_x}{dt}; \quad (1.1)$$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta u_y = \frac{du_y}{dt}; \quad (1.2)$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta u_z = \frac{du_z}{dt}; \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (1.4)$$

где a_x, a_y, a_z – проекции ускорения массовых сил \vec{a} на оси x, y, z ; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематическая вязкость жидкости; u_x, u_y, u_z – проекции скорости на оси координат;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Правые части уравнений Навье-Стокса представляют собой проекции ускорений движения жидких частиц на оси x, y, z .

В случае плоского течения жидкости одна из компонент скорости (например u_z) равна нулю ($u_z \equiv 0$), а линии тока в параллельных плоскостях (плоскостях течения) должны иметь совпадающую конфигурацию. Поэтому плоское течение называют также двухмерным. Для такого течения уравнения Навье-Стокса упрощаются и принимают вид

$$a_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u_x = \frac{du_x}{dt}; \quad (1.5)$$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta u_y = \frac{du_y}{dt}; \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (1.7)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Проекции ускорений жидких частиц можно представить в форме Громеки-Ламба:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega_z u_y + 2\omega_y u_z; \quad (1.8)$$

$$\frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} - 2\omega_x u_z + 2\omega_z u_x; \quad (1.9)$$

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} - 2\omega_y u_x + 2\omega_x u_y, \quad (1.10)$$

где обозначено

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right); \quad (1.11)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \quad (1.12)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right); \quad (1.13)$$

причем $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора угловой скорости вращения жидких частиц $\vec{\omega}$.

При плоском течении, очевидно, ненулевое значение может иметь лишь одна компонента угловой скорости. Например, при условии $u_z = 0$ для двухмерного течения существует лишь ω_z , а $\omega_x = \omega_y = 0$.

Наиболее простой моделью плоского течения является так называемое безвихревое течение, то есть такое, при котором ни одна из

частиц жидкости не участвует во вращательном движении. Следовательно, условием такого течения (для двухмерного случая) является требование

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0. \quad (1.14)$$

Это равносильно условию

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (1.15)$$

Легко показать, что в этом случае **обе** компоненты скорости u_x и u_y можно выразить через одну функцию, которую называют **потенциалом скорости** φ . Эта функция обладает свойством, – частная производная от нее по какому-либо направлению равна проекции скорости \vec{u} на это же направление. То есть, если выполнить операции $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ или (в общем случае) $\frac{\partial}{\partial \ell}$ над φ , то по определению должны получить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = u_z, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \ell} = u_\ell. \quad (1.16)$$

Если (в двухмерном течении) $u_z = 0$, то $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$, следовательно, в этом случае потенциал скорости является функцией лишь двух координат x и y :

$$\varphi = \varphi(x, y). \quad (1.17)$$

Легко доказать, что потенциал скорости существует лишь в случае безвихревого течения жидкости. Доказательство проводится простой проверкой. Подставим, например, условие (1.16) в выражение, справедливое лишь при безвихревом течении (1.15). Получим в результате

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right).$$

Это равносильно тождеству

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x},$$

что и доказывает сформулированное утверждение (получите самостоятельно еще два аналогичных тождества).

Поскольку, как оказалось, потенциал скорости существует только при безвихревом течении, последнее также часто называют **потенциальным**.

В случае плоского течения можно ввести еще одну функцию

$$\psi = \psi(x, y), \quad (1.18)$$

обладающую свойствами

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_y, \quad (1.19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u_x. \quad (1.20)$$

Также легко проверить, что эта функция сохраняет свою величину постоянной вдоль конкретной линии тока. На самом деле полный дифференциал $d\psi$ этой функции

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy,$$

после подстановки в него значений $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, получает вид

$$d\psi = -u_y dx + u_x dy. \quad (1.21)$$

Но известно, что уравнение линии тока записывается следующим образом (для двумерного течения):

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}. \quad (1.22)$$

Перепишем его иначе:

$$u_x dy - u_y dx = 0. \quad (1.23)$$

Сопоставляя выражения для полного дифференциала (1.21) и линии тока (1.23), заключаем, что для линии тока

$$d\psi \equiv 0. \quad (1.24)$$

Следовательно,

$$\psi = const, \quad (1.25)$$

то есть функция ψ сохраняет вдоль линии тока свое значение постоянным. Это обстоятельство послужило основанием назвать функцию ψ **функцией тока**.

В случае потенциального течения линии равных значений φ (эквипотенциали) и равных значений ψ (линий тока) оказываются взаимно ортогональными, что легко проверить по соблюдению условия ортогональности двух функций. Известно, что две функции φ и ψ взаимно ортогональны, если выполняется условие

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \quad (1.26)$$

Подставим в выражение (1.26) значения частных производных функций φ и ψ . Получим

$$u_x (-u_y) + u_y u_x \equiv 0, \quad (1.27)$$

что и требовалось проверить.

Сетка, полученная в результате построения двух семейств линий $\varphi = const$ и $\psi = const$ (эквипотенциалей и линий тока), называется **гидродинамической сеткой**.

Гидродинамическая сетка показывает в деталях особенности обтекания плоским потенциальным потоком твердого тела (рис.1.1).

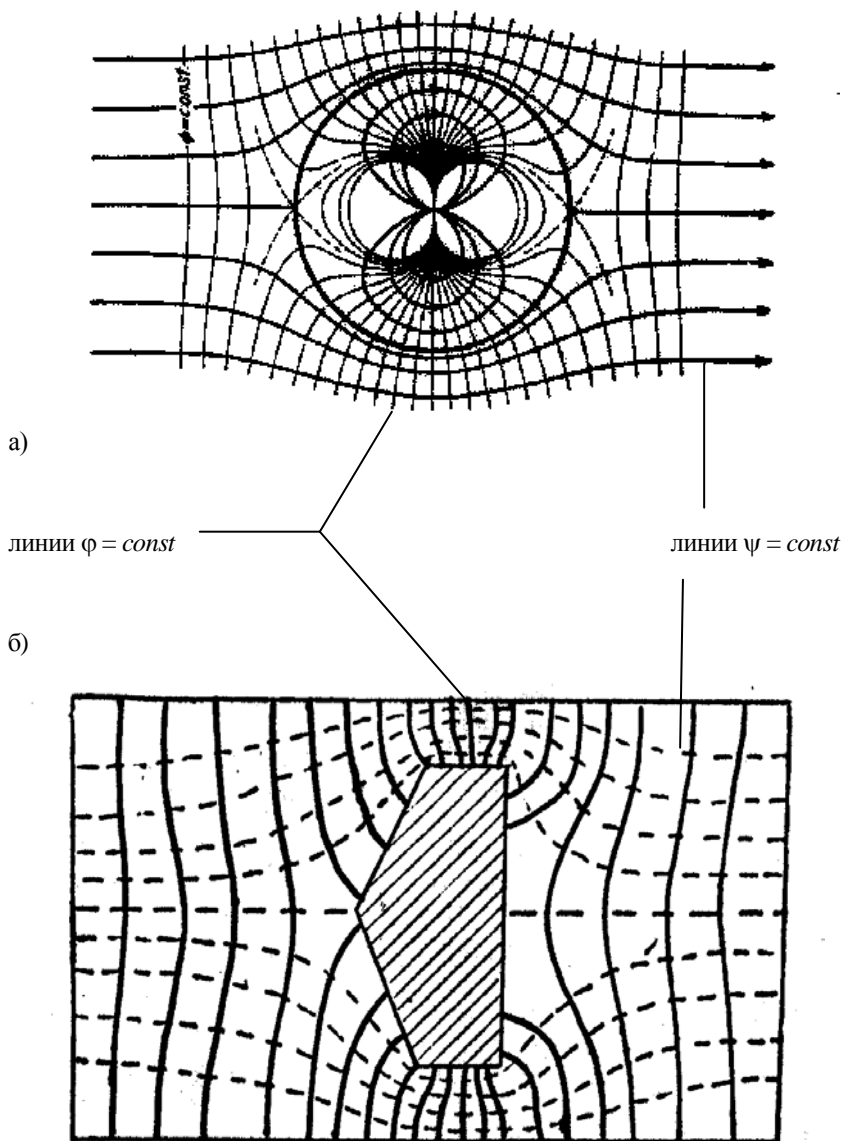


Рис.1.1. Примеры гидродинамических сеток

2. ПОЛУЧЕНИЕ ЛИНИЙ ТОКА НА ПРИБОРЕ ХИЛ-ШОУ

Принцип действия прибора Хил-Шоу основан на результате, полученном из уравнений движения вязкой жидкости Навье-Стокса, при условии протекания ее тонким слоем между двумя близко расположенными параллельными пластинами. Если координатные оси x и y направить вдоль и поперек пластин, то есть потребовать, чтобы координатная поверхность $x=0$ лежала в плоскости пластин, а ось z была направлена по нормали к ним, то компонента скорости u_z будет отсутствовать, а уравнения Навье-Стокса соответственно упростятся и примут вид (при установившемся движении)

$$-\frac{\partial}{\partial x}(P + P) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right); \quad (2.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(P + P) = u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right); \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}(P + P) = 0, \quad (2.3)$$

где P – потенциал массовых сил; $P = \frac{p}{\rho}$ – функция давления.

Из последнего уравнения следует, что давление по оси z , то есть по нормали к пластинам распределяется по гидростатическому закону, а величина $P + P$ не зависит от z . Следовательно, она может зависеть только от координат x и y . Это обстоятельство, в свою очередь, позволяет заключить, что по какому бы закону скорость (и ее компонента u_x и u_y) не изменялась бы по оси z , направление ее в данной точке с координатами x и y не зависит от координаты z . Другими словами, – все скорости на данной нормали к пластинам имеют одно и то же **направление**. Следовательно, и очертание линий тока во всех параллельных плоскостях будет одинаковым.

Далее, при малых скоростях можно пренебречь градиентами их компонент по любому из направлений x и y :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} \approx \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} \approx \frac{\partial u_y}{\partial y} \approx 0.$$

Тогда уравнения (2.1) и (2.2) упростятся:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\Pi + P) = -\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}; \quad (2.4)$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\Pi + P) = -\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2}. \quad (2.5)$$

Расположим начало координат посередине между пластинами. Если расстояние между ними равно 2δ , то от начала координат до пластин по оси z расстояния составят $\pm\delta$.

Проинтегрируем уравнения (2.4) и (2.5) по z :

$$-z \frac{\partial}{\partial x}(\Pi + P) = -\nu \frac{\partial u_x}{\partial z} + C_2; \quad (2.6)$$

$$-z \frac{\partial}{\partial y}(\Pi + P) = -\nu \frac{\partial u_y}{\partial z} + C_1. \quad (2.7)$$

Постоянные интегрирования найдем из удовлетворения следующих условий. В координатной плоскости $z = 0$ скорости должны быть максимальны, следовательно, при $z = 0$ необходимо принять

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0. \quad \text{Отсюда легко получаем, что значения } C_1 \text{ и } C_2$$

оказываются нулевыми

$$C_1 = C_2 = 0.$$

Повторно проинтегрируем полученные уравнения (2.6) и (2.7):

$$\frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\Pi + P) = \nu u_x + C_3; \quad (2.8)$$

$$\frac{z^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}(\Pi + P) = \nu u_y + C_4. \quad (2.9)$$

Определим константы C_3 и C_4 из граничных условий: при $z = \pm\delta$ скорости u_x и u_y должны быть нулевыми (из-за прилипания жидкости к твердой границе).

Получим

$$C_3 = \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\Pi + P); \quad (2.10)$$

$$C_4 = \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (\Pi + P). \quad (2.11)$$

Окончательно получим выражение для

$$u_x = \frac{z^2 - \delta^2}{2\nu} \frac{\partial}{\partial x} (\Pi + P); \quad (2.12)$$

$$u_y = \frac{z^2 - \delta^2}{2\nu} \frac{\partial}{\partial y} (\Pi + P). \quad (2.13)$$

Но полученный результат свидетельствует о том, что в данном случае скорость имеет потенциал, в качестве которого выступает функция

$$\varphi = \frac{z^2 - \delta^2}{2\nu} (\Pi + P). \quad (2.14)$$

Напомним, что этот удивительный результат может иметь место только при крайне малых градиентах скорости в направлениях x и y , то есть при так называемых *ползущих течениях*.

Изложенное выше позволило Хил-Шоу обосновать и предложить прибор для демонстрации, изучения и анализа плоских потенциальных потоков, обтекающих твердые тела.

Схема прибора представлена на рис.2.1 и 2.2.

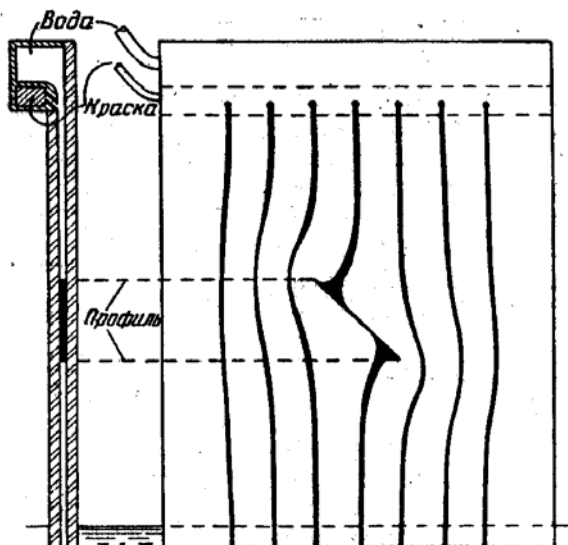


Рис. 2.1. Прибор Хил-Шоу для визуального изучения потенциального потока

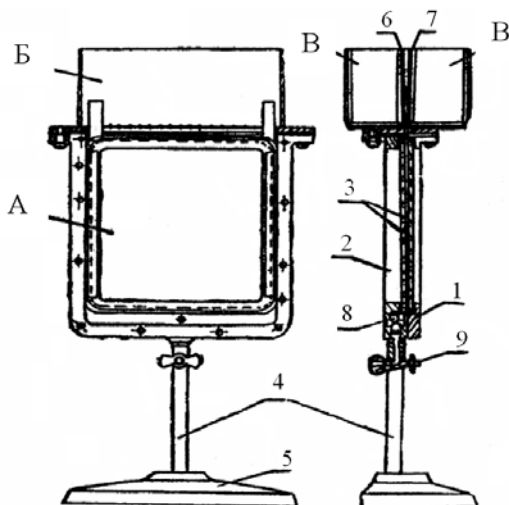


Рис. 2.2. Схема работы прибора Хил-Шоу:

А – плоский сосуд; 1-2 – металлические рамы; 3 – стеклянные пластины с зазором в 1 мм; 4 – стойка; 5 – подставка; Б – резервуар; 6-7 – перегородки; В-В – камеры; 8 – сливные каналы; 9 – краник

Между стеклянными пластинами зажимается профиль твердого тела, имеющий конфигурацию, обтекание которой потенциальным потоком требуется изучить. На входе через обычно равномерно расположенные отверстия впускается краска, с помощью которой подкрашивается нужное число струек. Впуском или отсасыванием жидкости в нужных точках можно визуализировать также картины взаимодействия источников и стоков [1] (рис.2.3).

Известно, что при потенциальных течениях форма линий тока не зависит от величины скоростей движения жидкости, а определяется исключительно формой твердых границ.

На приборе Хил-Шоу можно воспроизводить не только простейшие типы течений, аналитические решения для которых известны, но и для областей, сложных для теоретического анализа.

Укажем еще на одно обстоятельство, – вблизи от твердых границ (профиля тела и боковых границ) условия потенциальности, строго говоря, нарушаются из-за прилипания жидкости к ним. Однако этот слой имеет порядок расстояния между пластинами и если оно мало, то соответствующим искажением можно пренебречь.

С помощью прибора Хил-Шоу удалось решить немало задач в области гидравлики водопропускных сооружений, фильтрации и т.п.

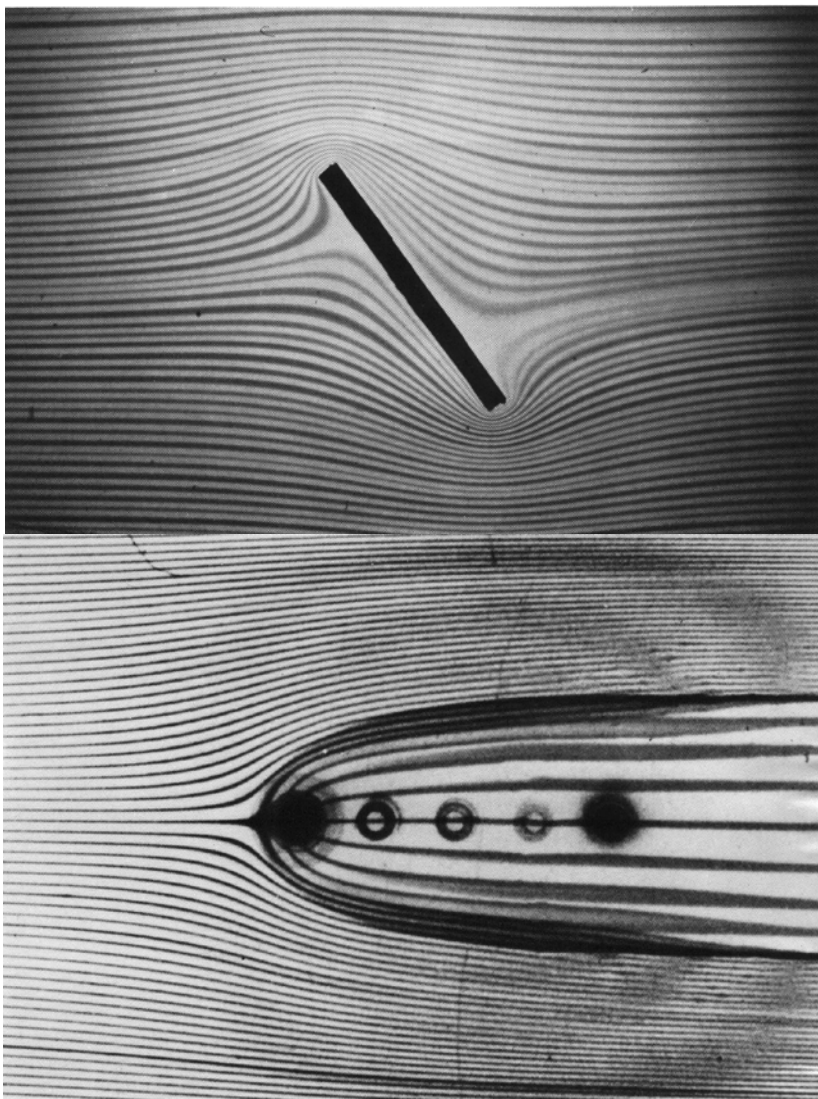


Рис. 2.3. Фото линий тока