

Деменок С. Л., Медведев В. В., Сивуха С. М.

# ГИДРОДИНАМИКА И ТЕПЛОБМЕН В ШАРОВЫХ УКЛАДКАХ



ОСНОВЫ ЭНЕРГОСБЕРЕЖЕНИЯ

УДК 532.546:536.24  
ББК 30.124:31.31  
Д30

Рецензенты:

Кафедра теплофизических основ судовой энергетики Санкт-Петербургского государственного морского технического университета (зав. кафедрой, доктор технических наук, профессор А. Н. Дядик), доктор технический наук, профессор В. Л. Ерофеев

**Д30 Деменок С. Л., Медведев В. В., Сивуха С. М.**

Гидродинамика и теплообмен в шаровых укладках: монография. – СПб.: Страта, 2012. – 192 с.

ISBN 978-586983-090-6

В монографии рассмотрены вопросы, связанные с применением шаровых укладок в теплообменных и технологических устройствах и аппаратах. Особое внимание уделено анализу влияния на гидродинамику и теплообмен геометрических параметров шаровых укладок, как регулярных, так и случайных. На основании проведенных экспериментальных исследований и анализа данных других авторов предложены зависимости для учета воздействия дополнительных факторов: числа рядов в укладке; ограждающих проницаемых поверхностей; градиента потока и температурного фактора.

Предназначена для специалистов-теплотехников, занимающихся решением теоретических и прикладных задач по тепло- и массообмену.

Ил. 71. Табл. 22. Библиогр.: 295 назв.

ISBN 978-586983-090-6

© С. Л. Деменок, 2012  
© В. В. Медведев, 2012  
© С. М. Сивуха, 2012

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ПРЕДИСЛОВИЕ. А. В. Федоров. Исследования процессов тепло- и массообмена – путь к энергосбережению</b> . . . . . | <b>5</b>  |
| <b>ВВЕДЕНИЕ / INTRODUCTION</b> . . . . .                                                                           | <b>10</b> |
| <b>ГЛАВА I. СТРУКТУРА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШАРОВЫХ УКЛАДОК</b> . . . . .                                | <b>15</b> |
| 1.1. Регулярные шаровые укладки. . . . .                                                                           | 15        |
| 1.2. Случайные шаровые укладки . . . . .                                                                           | 23        |
| 1.3. Основные геометрические характеристики шаровых укладок в цилиндрических каналах. . . . .                      | 27        |
| <b>ГЛАВА II. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ШАРОВЫХ УКЛАДОК</b> . . . . .                                            | <b>31</b> |
| 2.1. Гидродинамика обтекания шаров в засыпке . . . . .                                                             | 31        |
| 2.1.1. Состояние вопроса . . . . .                                                                                 | 31        |
| 2.1.2. Динамическая модель течения несжимаемой сплошной среды в шаровом слое . . . . .                             | 34        |
| 2.1.3. Модель обтекания одиночного шара в засыпке . . . . .                                                        | 43        |
| 2.2. Гидравлическое сопротивление при малом отношении диаметра канала к диаметру шара . . . . .                    | 53        |
| 2.3. Определение коэффициента проницаемости анизотропных пористых сред . . . . .                                   | 60        |
| 2.4. Гидравлическое сопротивление тонкослойных шаровых укладок в зоне градиентного течения . . . . .               | 63        |
| 2.5. Гидравлическое сопротивление ограниченных перфорированными пластинами регулярных шаровых укладок . . . . .    | 72        |
| 2.6. Определение перепада давления на пористом слое коллекторных теплообменников. . . . .                          | 81        |

|                                                                                                                                       |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>ГЛАВА III. ТЕПЛООБМЕН В ШАРОВЫХ УКЛАДКАХ.....</b>                                                                                  | <b>85</b>  |
| 3.1. Теплоотдача замороженного шара .....                                                                                             | 85         |
| 3.2. Обобщение опытных данных по конвективному<br>теплообмену в укладках шаров .....                                                  | 90         |
| 3.3. Конвективный теплообмен в двухрядных засыпках<br>с регулярными укладками шаров .....                                             | 106        |
| 3.3.1. Влияние числа рядов на теплоотдачу неограниченных<br>кубических шаровых укладок .....                                          | 106        |
| 3.3.2. Влияние проницаемости стенок на теплоотдачу<br>тонкослойных шаровых укладок .....                                              | 110        |
| 3.3.3. Влияние ускорения теплоносителя на среднюю<br>теплоотдачу шаровых укладок .....                                                | 117        |
| 3.4. Анализ влияния температурного фактора на гидравлическое<br>сопротивление и теплоотдачу в каналах с шаровыми засыпками ..         | 120        |
| 3.5. Использование теории размерности для оценки влияния<br>на теплообмен течения через шаровой слой<br>с перетечкой вдоль слоя ..... | 127        |
| 3.6. Фактор аналогии Рейнольдса в шаровых укладках .....                                                                              | 128        |
| 3.7. Теплообмен при малом отношении диаметра канала<br>к диаметру шара .....                                                          | 133        |
| <b>ГЛАВА IV. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ШАРОВ И ИХ УКЛАДОК<br/>ДЛЯ ИНТЕНСИФИКАЦИИ ТЕПЛООБМЕНА .....</b>                                            | <b>139</b> |
| 4.1. Тепловая и энергетическая эффективность шаровых укладок .....                                                                    | 139        |
| 4.2. Примеры использования шаров и шаровых укладок<br>для интенсификации тепло- и массообмена .....                                   | 143        |
| 4.3. Некоторые вопросы термогазодинамического моделирования<br>элементов энергетического оборудования .....                           | 160        |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ / CONCLUSION.....</b>                                                                                                   | <b>167</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ .....</b>                                                                                                               | <b>172</b> |
| Список литературы к главе I .....                                                                                                     | 172        |
| Список литературы к главе II .....                                                                                                    | 175        |
| Список литературы к главе III .....                                                                                                   | 181        |
| Список литературы к главе IV .....                                                                                                    | 189        |
| Перечень авторских публикаций, не вошедших<br>в списки литературы к главам монографии .....                                           | 190        |
| Дополнение к главе II .....                                                                                                           | 192        |

# ГЛАВА I.

## СТРУКТУРА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ШАРОВЫХ УКЛАДОК

### 1.1. Регулярные шаровые укладки

Первое детальное описание геометрии регулярных шаровых упаковок сделал И. Кеплер в трактате «О шестиугольном снеге» (1611 г.). Идею о сложении кристаллов из шаровых частиц развивал Р. Гук в «Микрографии» (1667), ей следовал М. В. Ломоносов в диссертации «О рождении и природе селитры». Различая два типа шаровых упаковок на плоскости, кубический и гексагональный, эти ученые предугадывали будущий закон кристаллографических пределов Е. С. Федорова (1891) [26]. Однако они рассматривали простейшие упаковки, центры шаров которых образуют в пространстве периодическую решетку, обладающую дальним порядком, трансляционным и ориентационным [22]. В XIX веке была осознана возможность построения правильных шаровых упаковок с нарушенным трансляционным порядком [27]. Исследования геометрии шаровых упаковок стимулировались потребностями молекулярной физики и кристаллографии, а потому основывались на теории правильных точечных систем [11]. Анализ шаровых структур с позиций теории точечных систем показывает, что существуют правильные регулярные шаровые упаковки с нарушенным трансляционным порядком менее плотные, чем кубическая [11], [38]. Например, молекулы льда образуют правильную тетраэдральную упаковку ( $\varepsilon = 0,6599$ ), элементом которой является шар с четырьмя другими, образующими правильный тетраэдр. Наименее плотная правильная упаковка, по-видимому, пирамидальная ( $\varepsilon = 0,8780$ ), элементом которой является правильная треугольная пирамида с шарами, расположенными в ее вершинах и в центре [11].

Плотные шаровые упаковки, образующие в пространстве правильные решетки, рассмотрены в работах [3], [4], [17], [27], [31].

Все указанные выше работы акцентируют внимание на взаимном расположении шаров в упаковке. С конца XIX века появились описания регулярных шаровых упаковок применительно к теории фильтрации [18], [19], [30], [32], [33], [39], [45], [48].

Последнее время исследования структуры шаровых упаковок определяются потребностями развития технологических аппаратов с шаровым заполнением [2], [8], [13], [25], [37], [43], [47]. Условия движения жидкости или газа в порах между шарами определяют гидравлическое сопротивление, интенсивность тепло- массообменных процессов в шаровом слое. Поэтому существенное значение в перечисленных работах уделяется описанию пространства пор в шаровых упаковках.

В настоящее время можно считать установленным, что для описания гидродинамических и теплообменных процессов в шаровом слое наиболее существенными являются следующие характеристики шаровых упаковок: относительные проходные сечения – минимальное и максимальное, концентрация шаров в упаковке или порозность, относительное расстояние между соседними слоями шаров, а также – наличие или отсутствие сквозных каналов в слое [14].

Для технологических аппаратов с шаровым заполнением практический интерес могут представлять девять наиболее характерных регулярных шаровых упаковок [2]. Однако в литературе не существует анализа геометрических параметров этих упаковок с единых позиций, нет единства и в названиях упаковок. Приводимые в литературе геометрические параметры характерных упаковок шаров относятся к случаю, когда можно пренебречь влиянием на них ограничивающих стенок, т. е. для бесконечно больших объемов упаковок. Между тем на практике возникает необходимость укладки шаров в относительно небольших объемах. Поэтому практически важно получить достаточно общие зависимости между геометрическими параметрами шаровых упаковок с учетом ограничивающих стенок.

Будем рассматривать регулярные шаровые упаковки с позиций теории правильных точечных систем. Первый слой шаров на пути набегающего потока будем называть базовым. Теорию точечных систем можно применить, если центры шаров базового слоя образуют ромбическую решетку, и каждый последующий слой упаковки полностью повторяет базовый, расположен в плоскости, параллельной плоскости базового слоя, и соприкасается с соседними слоями.

Принятые допущения позволяют выделить базовый элемент, последовательное повторение которого в пространстве по определенному правилу воссоздает данную шаровую упаковку. Как видно из рис. 1.1, координаты базового элемента могут быть представлены в декартовой системе координат при помощи плоских углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  следующей матрицей:

$$D = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & \cos \gamma & \cos \alpha \\ 0 & \sin \gamma & \cos \beta \\ 0 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (1.1)$$

где  $d$  – диаметр шара упаковки, м.

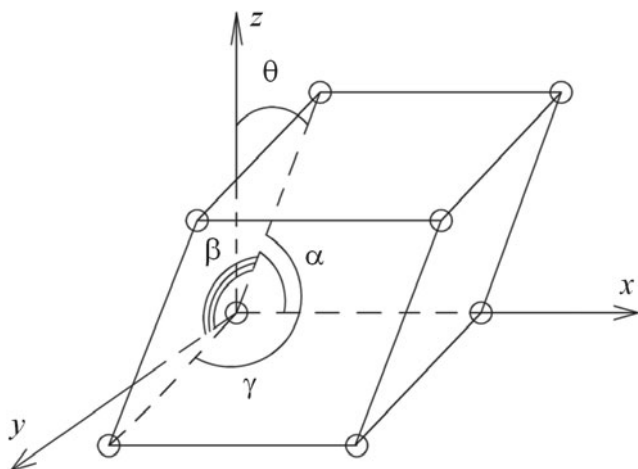


Рис. 1.1. Базовый элемент шаровой укладки

При этом порозность базовой ячейки, как отношение свободного от шаров объема к объему ячейки, равна:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\pi d^3 / 6}{\det D}, \quad (1.2)$$

или

$$\varepsilon = 1 - \frac{\pi d}{6 \cos \theta \sin \gamma}. \quad (1.3)$$

Такая формула для определения порозности упорядоченной укладки шаров предложена В.М. Боришанским [8].

Относительное расстояние между соседними слоями шаров в укладке составляет:

$$h/d = \cos \theta. \quad (1.4)$$

Каждый шар в упаковке имеет некоторое координационное число  $N_k$  контактов с соседними шарами, обеспечивающих его неподвижность. Координационное число представляет собой сумму точек контакта, лежащих в плоскости миделевого сечения  $N_{kp}$  (число контактов в плане), и точек контакта вне этого сечения  $N_{k0}$  [25]. Минимальное возможное значение координационного числа  $N_k = 4$  достигается в тетраэдральной ( $\varepsilon = 0,6599$ ) и пирамидальной ( $\varepsilon = 0,8770$ ) укладках [8]. Такие укладки структурно неустойчивы и нами не рассматриваются.

Число контактов шара в плоскости базового слоя связано с углом  $\gamma$  :

$$\gamma = 2\pi / N_{\text{кр}}. \quad (1.5)$$

Максимальное число контактов  $N_{\text{кр}}^{\text{max}}$  не всегда находится в плоскости базового слоя. Поэтому в наиболее общем виде относительное минимальное проходное сечение (доля свободного от шаров сечения в плоскости максимального числа контактов) равно:

$$\Psi_{\text{min}} = 1 - \frac{\pi}{4 \sin(2\pi / N_{\text{кр}}^{\text{max}})}. \quad (1.6)$$

Относительные минимальное и максимальное проходные сечения в плоскостях, параллельных базовому слою, можно рассчитать по формулам:

$$\Psi_{\text{min}} = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \gamma}; \quad (1.7)$$

$$\Psi_{\text{max}} = 1 - \frac{\pi}{\sin \gamma} \cos \theta (1 - \cos \theta). \quad (1.8)$$

Относительное максимальное проходное сечение в укладке шаров может быть рассчитано по формуле (1.8), если значение  $\cos \theta$  определить на основании (1.3) следующим образом:

$$\cos \theta = \frac{\pi}{6(1-\varepsilon) \sin(2\pi / N_{\text{кр}}^{\text{max}})}. \quad (1.9)$$

Далее ограничимся рассмотрением шаровых укладок, построенных на базе гексагонального ( $\gamma = \pi/3$ ) и кубического ( $\gamma = \pi/2$ ) слоев. Относительное эффективное сечение [37] кубического слоя равно:

$$q = \frac{\pi d^2 / 4}{d^2} \approx 0,1374, \quad (1.10)$$

гексагонального слоя –

$$q = \frac{\pi d^2 / 4}{\frac{\sqrt{3}}{4} d^2} \approx 0,0434. \quad (1.11)$$

В простейших укладках центры шаров образуют периодическую решетку, обладающую дальним порядком, трансляционным и ориентационным. При этом каждый третий ряд шаров повторяет первый, а между шарами об-



## 1.1. Регулярные шаровые укладки

разуются сквозные каналы. При гексагональном базовом слое в такие сквозные каналы можно продеть стержни диаметром:

$$d_0 = \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) d \approx 0,153 d, \quad (1.12)$$

при кубическом базовом слое –

$$d_0 = (\sqrt{2} - 1) d \approx 0,414 d. \quad (1.13)$$

Можно построить шаровые укладки с нарушенным трансляционным порядком, например, каждый четвертый ряд может повторять первый. В таких укладках нет сквозных каналов. Взаимная ориентация шаров простейших упаковок показана на рис. 1.2, их основные геометрические характеристики приведены в табл. 1.1, там же указаны альтернативные названия упаковок, встречающиеся в литературе.

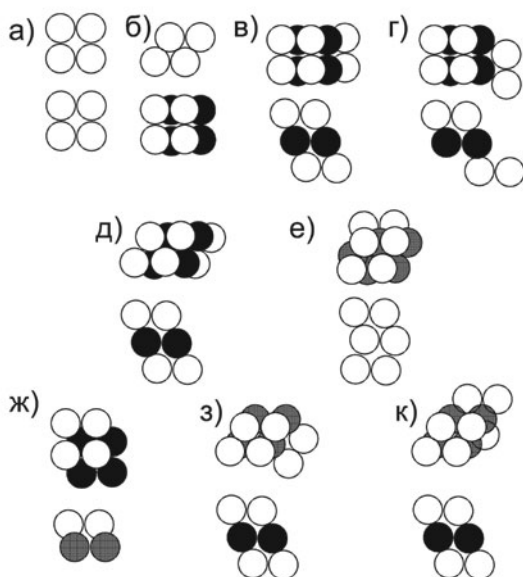


Рис. 1.2. Простейшие шаровые укладки:

- а) кубическая, б) орторомбическая, в) ромбическая со сквозными каналами,
- г) ромбическая с блокированными каналами, д) биромбическая со сквозными каналами,
- е) биромбическая с блокированными каналами,
- ж) октаэдрическая, з) тетраэдрическая с блокированными каналами,
- к) тетраэдрическая со сквозными каналами

Как отмечалось, на практике шаровые укладки размещаются в каналах, относительный размер которого можно описать параметром  $D/d$ , где  $D$  – гидравлический диаметр канала. При  $D/d \rightarrow \infty$  зависимость порозности от числа рядов  $n$  шаровой укладки можно представить следующим образом:

$$\varepsilon(n) = 1 - \frac{\pi}{6 \sin \gamma \overline{\cos \theta}}, \quad (1.14)$$

$$\text{где } \overline{\cos \theta} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \cos \theta.$$

Таблица 1.1

## Геометрические характеристики шаровых укладок

| № | Наименование укладки           | $\varepsilon$ | $N_k$ | $N_{кр}^{\max}$ | $\Psi_{\min}$ | $\sin \gamma$ | $\cos \theta$ | Альтернативные названия                                  |       |                                                                       |
|---|--------------------------------|---------------|-------|-----------------|---------------|---------------|---------------|----------------------------------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1 | Кубическая                     | 0,4764        | 6     | 4               | 0,214         | 1,0           | 1,0           |                                                          |       |                                                                       |
| 2 | Ромбическая [6]                | 0,3954        | 8     | 4               | 0,214         | 1,0           | 0,866         | Ромбоздрическая [13]<br>Орторомбическая [1]              |       |                                                                       |
| 3 | Орторомбическая                |               |       |                 |               |               |               | 6                                                        | 0,866 | 1,0                                                                   |
| 4 | Биромбическая [6]              | 0,3019        | 10    | 6               | 0,093         | 0,866         | 0,866         | Гексагонально-сферидальная [1]<br>Тетрагональная II [25] |       |                                                                       |
| 5 | Тетраздрическая [13]           | 0,2595        | 12    |                 |               |               |               | 1,0                                                      | 0,816 | Ромбоздрическая [25]<br>Тетраоктоэдрическая [6]<br>Ромбоздральная [1] |
| 6 | Октаэдрическая [6], [22], [38] |               |       |                 |               |               |               |                                                          |       | 0,707                                                                 |

При конечном значении параметра  $D/d$  влияние ограничивающих укладку стенок канала можно, по аналогии с учетом рядности, учесть осредненным (приведенным) значением  $\sin \gamma$  таким, что в плоскости базового слоя:

$$\Psi_{\min} = 1 - \frac{\pi}{4 \sin \gamma}. \quad (1.15)$$

## 1.1. Регулярные шаровые укладки

Тогда среднеобъемная порозность (отношение свободного от шаров объема к объему, занятому укладкой) равна:

$$\bar{\varepsilon} = 1 - \frac{\pi}{6 \overline{\sin \gamma} \overline{\cos \theta}}, \quad (1.16)$$

откуда

$$\psi_{\min} = 1 - \frac{3}{2} \overline{\cos \theta} (1 - \bar{\varepsilon}), \quad (1.17)$$

$$\psi_{\max} = 1 - \frac{\pi}{\overline{\sin \gamma}} \overline{\cos \theta} (1 - \overline{\cos \theta}). \quad (1.18)$$

При  $n \rightarrow \infty$ ,  $\overline{\cos \theta} = \cos \theta$  и  $\varepsilon = \varepsilon_0$ .

В настоящее время общепринятым являются два подхода к описанию протекания потока через шаровой слой. Один из них связан с рассмотрением обтекания одиночного шара в укладке (внешняя задача), другой подход основан на рассмотрении течения в каналах, образованных между шарами (внутренняя задача). Более подробно это рассмотрено в главе 2.

На наш взгляд, течение в шаровой ячейке с заблокированными каналами (рис. 1.3,а) целесообразно рассматривать с позиций внешней задачи, а течение в шаровой ячейке со сквозными каналами (рис. 1.3,б) – с позиций внутренней задачи.

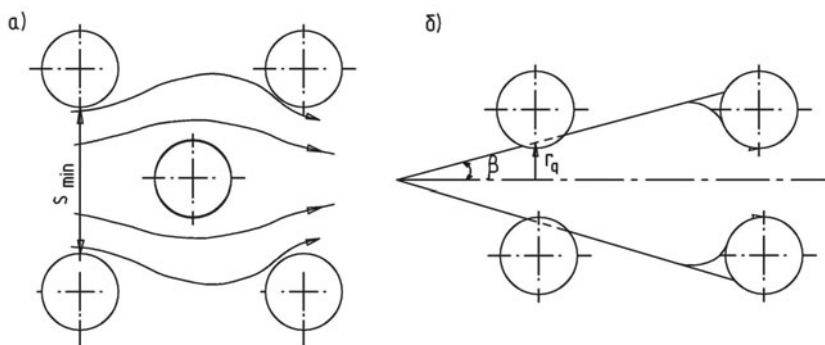


Рис. 1.3. Схемы течений в шаровой ячейке:  
а) с заблокированными каналами, б) со сквозными каналами

В первом случае важной геометрической характеристикой шаровой укладки является отношение площади минимального просвета между шарами укладки к площади миделевого сечения шара [13], которое можно рассчитать по формуле:

$$\frac{S_{\min}}{\pi d^2/4} = \frac{m}{\pi} \left[ \operatorname{tg} \left( \pi / N_{\text{кр}}^{\max} \right) - \pi / N_{\text{кр}}^{\max} \right], \quad (1.19)$$

где  $m = 2 N_{\text{кр}}^{\max} / (N_{\text{кр}}^{\max} - 2)$ .

При  $N_{\text{кр}}^{\max} = 4$  эта формула совпадает с зависимостью М. А. Гольдштика [13]:

$$\frac{S_{\min}}{\pi d^2/4} = \Psi_{\min} / (1 - \Psi_{\min}), \quad (1.20)$$

тогда как для гексагонального слоя ( $N_{\text{кр}}^{\max} = 6$ ) отличается от нее в два раза:

$$\frac{S_{\min}}{\pi d^2/4} = 0,5 \Psi_{\min} / (1 - \Psi_{\min}). \quad (1.21)$$

Во втором случае течение в поровом пространстве шаровой ячейки носит струйный характер. Важнейшими геометрическими характеристиками течения при этом являются угол расширения струи и степень расширения струи (рис. 1.3,б) –

$$f = \frac{r_q}{r_0} = \frac{r_q \operatorname{ctg} \beta}{(r_q \operatorname{ctg} \beta + 2r \cos \theta - x)}. \quad (1.22)$$

После ряда преобразований формулу (1.22) запишем в форме:

$$f = \frac{q^2}{(q + 2 \operatorname{tg} \beta \cos \theta - \bar{x} \operatorname{tg} \beta)}, \quad (1.23)$$

где  $\bar{x} = x/r = \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta - \bar{a}^2} - \bar{a} \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$ ,

$$\bar{a} = 1 + d_0/d - q - 2 \operatorname{tg} \beta \cos \theta.$$

Полученные выше соотношения позволяют определить параметры, существенные для описания процессов тепло- и массопереноса в регулярных шаровых укладках. Рассмотрим далее случайные укладки шаров.

## 1.2. Случайные шаровые укладки

Геометрические характеристики случайной укладки шаров зависят от способа засыпки шаров, но не очень сильно [1], [13], [29]. Укладка шаров, образованная случайным образом, неоднородна по своему объему. Необходимо различать ядро слоя, геометрические характеристики которого изотропны и постоянны по сечению, и пристенную область, в которой проявляется влияние стенок канала на геометрические характеристики слоя [28], [34], [35], [36], [41], [42], [44], [47].

Ядро шаровой укладки характеризуется стабильной структурой, имеющей порозность  $0,385 \div 0,387$  [23], [25]. Вблизи стенки случайные укладки характеризуются повышенным значением порозности, которое локально близко к порозности кубической укладки [13]. Влияние стенок канала приводит к тому, что порозность случайной укладки шаров на практике принимает значения  $0,38 \div 0,40$ .

Согласно принципу Ковальери – Аккера: среднее по высоте шарового слоя относительное проходное сечение в случайной шаровой укладке равно ее среднеобъемной порозности  $\bar{\psi} = \bar{\varepsilon}$ . Смысл принципа Ковальери – Аккера состоит в том, что, если несколько групп тел, расположенных между двумя плоскостями имеют сечения, площади которых находятся в постоянном отношении на любой плоскости, параллельной двумя данным, то объемы этих групп тел находятся в том же соотношении. Следовательно, в ядре шаровой укладки  $\psi_{\min} = \psi_{\max} = \bar{\psi} = 0,385 \div 0,387$ . Влияние стенок канала на геометрию случайной шаровой укладки приводит к появлению отличий предельных относительных проходных сечений от среднеобъемной порозности укладки.

Ряд авторов предполагают однозначную зависимость между минимальным относительным проходным сечением и среднеобъемной порозностью случайной шаровой укладки. Приводимые в литературе зависимости показаны на рис. 1.4. Многие из приведенных зависимостей получены на основе линейной интерполяции, а в качестве базовых рассматриваются те или иные упорядоченные укладки. Из табл. 1.1 видно, что между минимальным относительным проходным сечением и порозностью регулярных шаровых упаковок однозначной зависимости не существует. Это обуславливает отличия интерполяционных формул, предлагаемых разными авторами. В то же время, из табл. 1.1 видно, что в упорядоченных шаровых укладках существует однозначная зависимость между порозностью и координационным числом контактов шаров. С уменьшением порозности координационное число контактов шаров в укладках растет. Приводимые в литературе зависимости координационного числа от порозности показаны на рис. 1.5. Наиболее обоснованной, на наш взгляд, аппроксимационной зависимостью между средне-

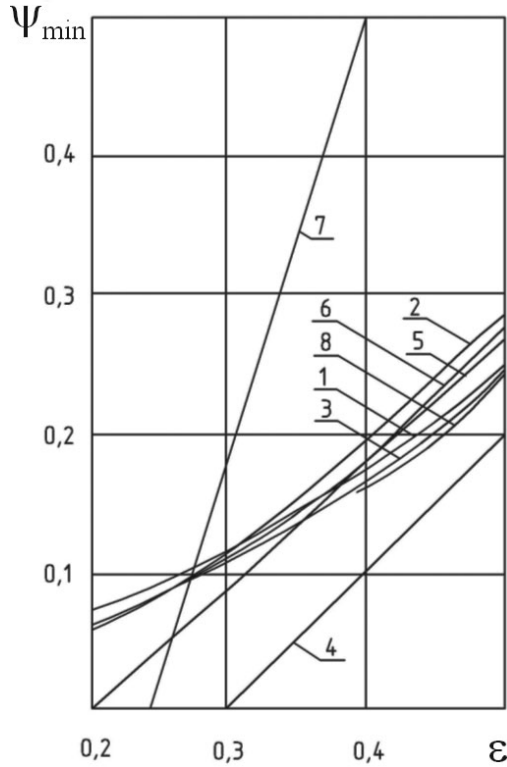


Рис. 1.4. Зависимость относительного минимального проходного сечения от порозности случайной шаровой укладки

$$1 - \Psi_{\min} = 0,625 \varepsilon^{1,4} [19];$$

$$2 - \Psi_{\min} = 0,95 \varepsilon^{1,75} [5];$$

$$3 - \Psi_{\min} = 0,61 \varepsilon^{1,4} [6];$$

$$4 - \Psi_{\min} = 1 - 1,27 (1 - \varepsilon)^{2/3} [24];$$

$$5 - \Psi_{\min} = 1,17 (1 - \varepsilon)^{2/3} [12];$$

$$6 - \Psi_{\min} = 1 - 1,64 (1 - \varepsilon)^{2/3}$$

$$\text{при } 0,4 \leq \varepsilon \leq 1 \text{ и } \Psi_{\min} = 0,508 - 0,56 (1 - \varepsilon) \text{ при } \varepsilon \leq 0,4 [13];$$

$$7 - \Psi_{\min} = 2,23 - 0,488 \varepsilon \text{ при } 0,315 \leq \varepsilon \leq 0,4 \text{ и } \Psi_{\min} = \varepsilon - 0,01$$

$$\text{при } 0,4 \leq \varepsilon \leq 0,51 [25];$$

$$8 - \Psi_{\min} = 1 - \frac{3 \pi}{N_k + 6} \operatorname{ctg} \left( \frac{3 \pi}{N_k + 6} \right), \text{ где } N_k = 27,7(1 - \varepsilon) - 8,5 [13]$$

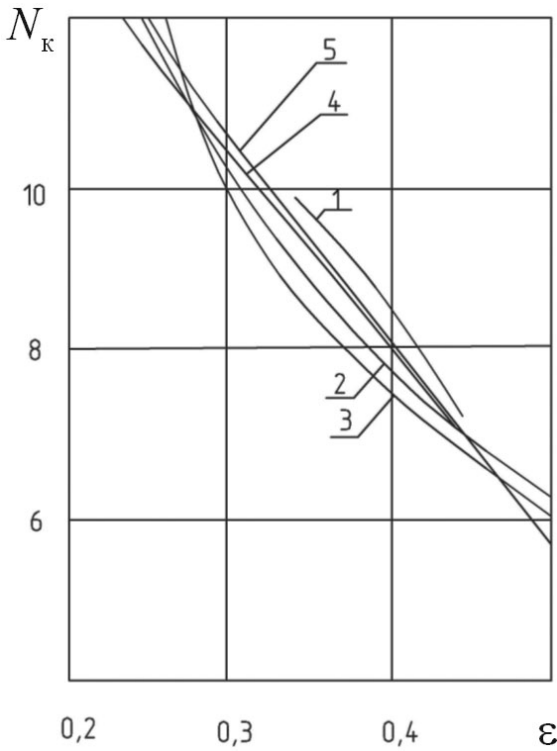


Рис. 1.5. Зависимости координационного числа от порозности случайной шаровой укладки:

$$1 - \varepsilon = 0,695 - 0,03 N_k / [1 - 0,06 (N_k - 9)] \quad [46];$$

$$2 - \varepsilon = 1,072 - 0,1193 N_k + 0,00431 N_k^2 \quad [40];$$

$$3 - \varepsilon = 1 - 0,1 N_k + 0,00404 N_k^2 \quad [25];$$

$$4 - \varepsilon = 0,693 - 0,0372 N_k \quad [1];$$

$$5 - N_k = 27,7 (1 - \varepsilon) - 3,5 \quad [13]$$

объемной порозностью и координационным числом случайной шаровой укладки является [25]:

$$\bar{\varepsilon} = 1 - 0,1 N_k + 0,00404 N_k^2. \quad (1.24)$$

Величина  $N_{кр}^{\max}$ , как видно из табл. 1.1, зависит от порозности упорядоченных укладок неоднозначно. Однако если при одних и тех же значениях порозности величины минимальных относительных проходных сечений могут различаться примерно в 2,3 раза, то значения величины  $N_{кр}^{\max}$ , отличаются не более, чем в 1,5 раза. Поэтому линейная интерполяция величины  $N_{кр}^{\max}$  надежнее соответствующей интерполяции величины минимального относительного проходного сечения от среднееобъемной порозности или от координационного числа контактов шаров в укладках.

Выполненный авторами данной работы анализ правильных решеток из кругов на плоскости показал, что можно предложить для практического использования следующую зависимость:

$$\Psi_{\min} = 1 - \frac{\pi}{N_{кр}^{\max} \operatorname{tg}\left(\pi / N_{кр}^{\max}\right)}. \quad (1.25)$$

На основе линейной интерполяции предельных (плотнейшей и кубической) регулярных шаровых укладок можно считать, что:

$$N_{кр}^{\max} = \frac{N_k}{3} + 2. \quad (1.26)$$

В этом случае формула (1.25) совпадает с приводимой М. А. Гольдштиком [13].

Заметим, что максимальное относительное проходное сечение можно рассчитать по формуле (1.18), полагая:

$$\overline{\sin \gamma} = \frac{N_{кр}^{\max}}{4} \operatorname{tg}\left(\pi / N_{кр}^{\max}\right), \quad \overline{\cos \theta} = \frac{2}{3} \frac{1 - \Psi_{\min}}{1 - \bar{\varepsilon}}.$$

Полученные выше зависимости позволяют определить геометрические характеристики, существенные для описания процессов переноса в шаровом слое, по двум параметрам для регулярной шаровой укладки, например, по среднееобъемной порозности и числу рядов шаров в канале, и по одному параметру для случайной укладки, например, по среднееобъемной порозности шарового слоя в канале. Приведенные в настоящей работе зависимости



могут быть применимы для определения геометрических параметров шаровых укладок, размещенных в произвольных объемах, что обуславливает практическую ценность полученных результатов. Следует отметить, что разброс в параметрах укладок наблюдаемый на рис. 1.4 и 1.5 обусловлен стохастической природой образования случайных укладок. Поэтому существует отдельное направление по исследованию вопросов математического и имитационного моделирования случайной упаковки системы сферических частиц. С ним можно ознакомиться, например, в работе [21]. Там же выполнен обзор работ в этой области.

### **1.3. Основные геометрические характеристики шаровых укладок в цилиндрических каналах**

Практический интерес представляет частный случай размещения шаровых укладок в цилиндрических каналах. Многочисленные исследования гидравлического сопротивления и теплообмена в засыпках шаров позволяют сделать вывод, что практически важными геометрическими характеристиками шаровых укладок в таких каналах являются следующие [15]:

- относительный размер канала с шаровым заполнением  $n_k = D/d$  ;
- расстояние между соседними слоями шаров, отнесенное к диаметру шара  $h/d$  ;
- объемная порозность шаровой засыпки  $\varepsilon$ , равная отношению свободного от шаров объема к объему канала, в котором размещены шары;
- относительное минимальное проходное сечение (просвет)  $\Psi$  .

На основании экспериментальных работ различных исследователей в [16] предложена зависимость для определения объемной порозности засыпок шаров в цилиндрических каналах, имеющих относительный размер  $n_k = 2,56 \div 41$ :

$$\frac{1 - \varepsilon}{[(n_k - 1)/n_k]^2} = 0,61 + 0,288 \left[ \left( \frac{n_k}{n_k - 1} \right)^2 - \left( \frac{n_k - 2}{n_k - 1} \right)^2 \right]. \quad (1.27)$$

Согласно исследованиям Р. Г. Богоявленского [7] экспериментальные значения объемной порозности хорошо совпадают с рассчитанными по формуле (1.27) при  $n_k \geq 3,5$ . Возможность возникновения упорядоченных шаровых структур при засыпке шаров в канал с  $n_k = 1,86 \div 3,5$  не позволяет подобрать однозначную зависимость  $\varepsilon(n_k)$ . Но во всем диапазоне значений

$n_k > 1,86$  относительное минимальное проходное сечение самопроизвольно образующихся упаковок связано с объемной порозностью интерполяционной формулой Лейбензона – Богоявленского [7]:

$$\psi = 0,61 \varepsilon^{1,4}. \quad (1.28)$$

М. А. Гольдштик [13] на основе анализа геометрии регулярных шаровых упаковок получил следующую зависимость:

$$\psi = 1 - \frac{3\pi}{N_k + 6} \operatorname{ctg} \left( \frac{3\pi}{N_k + 6} \right), \quad (1.29)$$

где координационное число контактов шара с соседними шарами в упаковках  $N_k$  для случайных упаковок шаров неплохо аппроксимируется так [13]:

$$N_k = 27,7(1 - \varepsilon) - 8,5. \quad (1.30)$$

Таким образом, зависимость М. А. Гольдштика (1.29) применима для регулярных и случайных упаковок. Для последних она мало отличается от формулы Р. Г. Богоявленского (1.28).

Засыпка шаров в трубе, имеющей относительный размер  $n_k = 1 \div 1,86$ , приводит к самопроизвольной упаковке шаров в шахматном порядке. Каждый шар при этом имеет точки контакта с двумя соседними шарами и стенкой трубы. Линия центров шаров располагается лишь в одной плоскости – диаметральной плоскости сечения трубы. Для шахматных шаровых упаковок получены следующие теоретические зависимости [10]:

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{3n_k^2 \sqrt{1 - (n_k - 1)^2}}; \quad (1.31)$$

$$\psi = 1 - \frac{2}{\pi n_k^2} \left( \pi - \arcsin \sqrt{1 - (n_k - 1)^2} + (n_k - 1) \sqrt{1 - (n_k - 1)^2} \right).$$

Последняя зависимость с погрешностью  $\pm 5\%$  описывается выражением [20]:

$$\psi = \frac{n_k - 1}{0,733(n_k - 1) + 1,387}. \quad (1.32)$$

### 1.3. Основные геометрические характеристики шаровых укладок в цилиндрических каналах

Следует отметить, что проточное сечение каналов с шахматной упаковкой шаров при  $n_k < 1,269$  увеличено по сравнению с рассчитанными по формуле (1.32), и окончательно для него получено [10]:

$$\psi = 0,4(n_k - 1,005)^{0,63} n_k^{0,55 \ln n_k} \quad (1.33)$$

для  $n_k = 1,060 \div 1,867$ .

Попутно заметим, что величина объемной порозности достигает максимального значения, равного 0,677 при  $n_k \approx 1,65$ .

В каналах, имеющих относительный размер  $n_k = 1 \div 3,5$ , возможны следующие упорядоченные шаровые укладки [9] (рис. 1.6):

- 1) шахматная в диапазоне  $n_k = 1 \div 1,867$ ;
- 2) винтовая при  $n_k = 1,867 \div 2,0$ ;
- 3) кольцевая при  $n_k \geq 2,0$  с различным числом шаров  $N = 2 \div 5$  в поперечном сечении;
- 4) коридорная при наличии дистанционирующих ребер, обеспечивающих центрированную компоновку шаров.

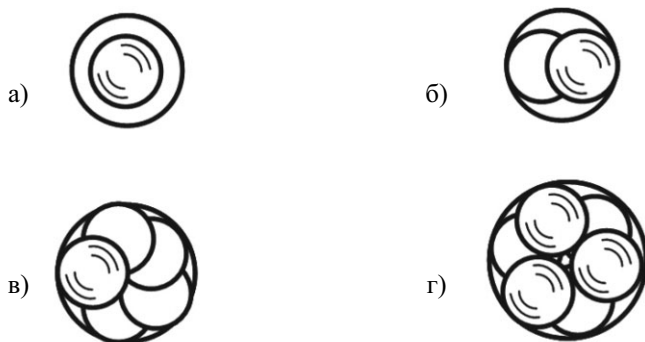


Рис. 1.6. Схемы размещения шаровых укладок в цилиндрическом канале:  
а – коридорная; б – шахматная; в – винтовая; г – кольцевая

Пренебрегая наличием центрирующих ребер, объемную порозность и минимальный просвет коридорных шаровых укладок в канале можно рассчитать по формуле:

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{3n_k^2}; \quad (1.34)$$

$$\psi = 1 - \frac{1}{n_k^2}. \quad (1.35)$$

Из рассмотренной геометрии компоновки укладок в [10] предложены следующие формулы для расчета порозности и относительного минимального проходного сечения:

$$\varepsilon = 1 - \frac{2}{3} \frac{N}{n_k^2 \sqrt{1 - (n_k - 1)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N}}}, \quad (1.36)$$

$$\psi = 1 - \frac{4N}{\pi n_k^2} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{1 - (n_k - 1)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N}} + (n_k - 1) \sin \frac{\pi}{2N} \sqrt{1 - (n_k - 1)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2N}} \right). \quad (1.37)$$

В [10] предложена также приближенная зависимость относительного минимального проходного сечения от порозности для кольцевых укладок:

$$\psi \approx 0,71 \varepsilon^{2,1}. \quad (1.38)$$

Подобная формула предложена и в [19]:

$$\psi \approx 0,6 \varepsilon^2. \quad (1.39)$$

Винтовые укладки являются предельным случаем кольцевых укладок при  $N = 1$ . Поэтому для расчета геометрических характеристик винтовых укладок можно применять соотношения (1.36) – (1.39).

Рассмотренные выше геометрические характеристики необходимы для предоставления в единой форме опытных данных различных авторов по гидравлическому сопротивлению и теплообмену в каналах с шаровой запылкой.

## ГЛАВА II.

# ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ШАРОВЫХ УКЛАДОК

### 2.1. Гидродинамика обтекания шаров в засыпке

#### 2.1.1. Состояние вопроса

Общепринятыми являются два подхода к описанию гидродинамики течения жидкости или газа через засыпку шаров. Один из них, связанный с рассмотрением обтекания одиночного шара (внешняя задача), был предложен Бурке и Плуммсом [70] и впоследствии развит авторами работ [25], [36], [49], [82], [91], [93], [95]. Другой подход связан с рассмотрением течения в каналах, образованных между шарами (внутренняя задача). Представление шаровой засыпки как системы поровых каналов тесно связано с работами Блейка [67], Козени [85], Кармана [71], Эргана [79].

Широко принято в настоящее время представление гидравлического сопротивления шарового слоя двухчленной формулой Дюпуи – Форхеймера. Физически это соответствует наблюдаемому постепенному изменению сопротивления при переходе от чисто вязкостного (ползущего) к чисто инерционному течению без характерного скачка, связанного с переходом к турбулентному режиму (как это происходит при течении в трубах или при обтекании шара). Такой подход позволяет ограничиться анализом двух предельных режимов течения через шаровую укладку – ползущим и чисто инерционным.

Хотя для ползущего течения уравнения Навье – Стокса становятся линейными и вполне допускают точное решение, существенные трудности возникают из-за сложности границ в шаровом слое. Граничные задачи для систем со многими частицами решают главным образом двумя методами, а именно методом отражений (внутренняя задача) и методом единичной ячейки (внешняя задача) [62].

Дополнительный материал см. на стр. 192.

Для описания течения в шаровом слое с позиций внешней задачи к настоящему времени предложен ряд ячеечных моделей, пригодных для расчета течения как в разряженных, так и в концентрированных шаровых засыпках. При таком подходе весь объем слоя делится на отдельные независимые ячейки, каж

дая из которых содержит лишь один шар, а жидкость окружает этот шар в виде сферы [82], [86], [90] или цилиндра [99]. Доля твердой фазы в ячейке обычно считается равной концентрации шарового слоя в целом. Решение уравнений Навье – Стокса применительно к ползущему обтеканию шара в ячейке получено в [52], [62], [82] численное решение ламинарного обтекания шара в ячейке описано в работах [86], [90], [99]. Все эти результаты получены для неупорядоченных (случайных) шаровых засыпок и хорошо согласуются с опытными данными [6], [62]. Применение ячеечной модели к регулярным укладкам связано с серьезными математическими трудностями.

Метод отражения позволяет описать распределение скорости в любой правильной укладке, но с увеличением концентрации шаров сходимость метода значительно ухудшается [83], [103]. Ясно, что такое подробное описание течения весьма трудоемко и для инженерных расчетов шаровых укладок практически нецелесообразно. Поэтому для описания течения в шаровом слое с позиций внутренней задачи используют различные упрощенные модели.

В настоящее время наиболее распространены каналные модели. Так, в капиллярной модели Козени – Кармана шаровой слой заменяется системой извилистых капилляров постоянного диаметра. В сетевой модели Дюллиена [76], [77] структура шарового слоя представляется в виде совокупности трех систем взаимно перпендикулярных капилляров, пересекающихся в узлах пространственной кубической решетки. Таким образом, модель Дюллиена до некоторой степени учитывает то, что между шарами потоки жидкости все время соединяются и разъединяются. Однако эти модели не учитывают эффекты сжатия и расширения потока. Поэтому даже при вязкостном режиме течения капиллярные модели неприменимы к упорядоченным шаровым укладкам [87]. Учет инерционных сил в рамках таких моделей на основе анализа размерностей требует опытного определения коэффициента пропорциональности в формуле Дюпуи – Форхеймера. Модели внутреннего отрывного течения (диафрагмовые модели) предполагают учет эффектов сжатия и расширения потока с образованием застойных зон. Реальное поровое пространство шарового слоя заменяется при этом системой круглых каналов с переменным поперечным сечением [53], [64], [73], [75], [84], [96]. Метод расчета гидравлического сопротивления на основе диафрагмовых моделей по формуле Дюпуи – Форхеймера связан с экспериментальным определением коэффициентов пропорциональности. Таким образом, каналные модели являются полумпирическими.

Теоретический расчет гидравлического сопротивления шарового слоя при инерционном режиме течения возможен на основе струйной модели. Учет струйного характера применительно к описанию гидравлического сопротивления неупорядоченных шаровых засыпок с позиций внутренней

## 2.1. Гидродинамика обтекания шаров в засыпке

задачи представлен в работах [10], [12], [38], с позиций внешней задачи струйного обтекания шара в слое – в работе [25]. В основе струйной модели лежит предположение, что основная часть потерь энергии элементарной струйки, существующей в пределах шаровой ячейки, – это затраты энергии на расширение основной массы ядра струи и обмен массы с застойными зонами, а потери энергии от сжатия, поворота струи и от трения на поверхности шаров незначительны [12]. Гидравлическое сопротивление неупорядоченных шаровых засыпок, рассчитанное в работах [25], [38] хорошо согласуется с опытными данными.

Математические модели, основанные на идеях внешней и внутренней задач, дают возможность рассчитать коэффициенты гидравлического сопротивления шаровых засыпок. Эти коэффициенты, рассчитанные по существующим моделям, близки к экспериментальным для случайных (неупорядоченных) засыпок и значительно отличаются от таковых для регулярных (упорядоченных) засыпок шаров [6].

В настоящем разделе приводится теоретико-экспериментальная схема единого компактного обобщения данных по гидравлическому сопротивлению случайных и регулярных засыпок. Рассматриваются весь диапазон чисел Рейнольдса и соответственно все возможные режимы течения: вязкостный, вязкостно-инерционный и инерционный.

Известно, что при переходе от чисто вязкостного к чисто инерционному режиму течения в шаровых засыпках наблюдается плавное уменьшение гидравлического сопротивления, а кризиса сопротивления, характерного для обтекания одиночного шара и связанного с переходом от ламинарного к турбулентному режиму, не наблюдается. Это позволяет использовать для определения коэффициента гидравлического сопротивления засыпки  $\zeta$  единую для всех режимов течения зависимость либо в виде формулы Дюпуй – Форгеймера [6]:

$$\zeta = \frac{a}{Re} + b, \quad (2.1)$$

либо в виде формулы А. Д. Альтшуля [2]:

$$\zeta = \frac{a}{Re} + \sqrt{b\zeta}, \quad (2.2)$$

где  $Re = \rho w d / \mu$  – число Рейнольдса;  $\rho$ ,  $\mu$  – плотность и динамический коэффициент вязкости;  $w$  – скорость жидкости перед засыпкой;  $d$  – диаметр шара.

В дальнейшем нами используется формула (2.1), а коэффициенты  $a$  и  $b$  определяются из анализа предельных случаев чисто вязкостного ( $\zeta = a/Re$ ) и чисто инерционного ( $\zeta = b$ ) режимов течения. Для обеспе

чения возможности проведения такого анализа ниже выполнено построение модели движения жидкости в шаровом слое, позволяющей наиболее компактно обобщить опытные данные по гидравлическому сопротивлению различных случайных и регулярных шаровых засыпок.

### 2.1.2. Динамическая модель течения несжимаемой сплошной среды в шаровом слое

Дифференциальное уравнение количества движения, установившегося течения несжимаемой сплошной среды в отсутствии массовых сил имеет вид:

$$\rho (\bar{w}, \nabla) \bar{w} = -\nabla P + \nabla T, \quad (2.3)$$

где  $\bar{w} = \bar{e}_1 w_1 + \bar{e}_2 w_2 + \bar{e}_3 w_3 = \bar{e}_i w_i$  – скорость;  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  – правая тройка единичных базисных векторов ортогональной системы координат, например,  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  – в декартовых координатах,  $\bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\phi$  – в сферических координатах,  $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\phi, \bar{e}_z$  – в цилиндрических координатах;  $P$  – давление;  $\nabla$  – дифференциальный оператор набла;  $T$  – тензор (диадик) напряжений вследствие деформации вязкой среды, для ньютоновской жидкости равны

$$T = 2\mu D, \quad (2.4)$$

где  $D$  – тензор скоростей деформации, компоненты которого в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат приведены, например, в [51].

Дифференциальное уравнение неразрывности несжимаемой сплошной среды имеет вид:

$$\nabla \bar{w} = 0. \quad (2.5)$$

С учетом (2.5) тензор конвективных ускорений можно представить в форме

$$(\bar{w}, \nabla) \bar{w} = \nabla (\bar{w} \otimes \bar{w}) = \nabla (w_i w_j \bar{e}_i \bar{e}_j), \quad (2.6)$$

где  $\otimes$  – символ тензорного произведения.

Тогда уравнение (2.3) можно записать так:

$$\nabla P = \nabla T - c \nabla (\bar{w} \otimes \bar{w}). \quad (2.7)$$

Поскольку в дальнейшем влияние твердых стенок, ограничивающих шаровую укладку, будет исключено, то, не снижая общности рассуждений, положим, что шары уложены в некотором цилиндре. Обозначим через



## 2.1. Гидродинамика обтекания шаров в засыпке

$V$  – объем, занятый шаровой укладкой;  $V_f$  – часть объема  $V$ , заполненная движущейся средой. Замкнутая поверхность  $\Omega_f$  ограничивающая  $V_f$ , является суммой  $\Omega_w$  и  $\Omega_e$ :  $\Omega_w$  соответствует твердым стенкам, а  $\Omega_e$  можно рассматривать как входную  $\Omega_{e1}$  и выходную  $\Omega_{e2}$  поверхности объема  $V$ .

В рассматриваемом случае (рис. 2.1)

$$\begin{aligned}\Omega_{e1} &= \Omega_{e2} = \Omega; \\ V &= H \Omega,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где  $H$  – высота шарового слоя.

Проинтегрируем уравнение (2.7) по объему  $V_f$ :

$$\int_{V_f} \nabla P dV = \int_{V_f} \nabla T dV - \rho \int_{V_f} \nabla (\vec{w} \otimes \vec{w}) dV.\tag{2.9}$$

С учетом интегральной теоремы, аналогичной теореме Остроградского – Гаусса, применительно к исчислению диадиков получим:

$$\oint_{V_f} \nabla P dV = \int_{\Omega_f} \nabla T d\vec{\sigma} - \rho \int_{\Omega_f} \nabla (\vec{w} \otimes \vec{w}) d\vec{\sigma},\tag{2.10}$$

где

$$\begin{aligned}d\vec{\sigma} &= \left[ \vec{e}_1 \cos(\vec{n}, \vec{e}_1) + \vec{e}_2 \cos(\vec{n}, \vec{e}_2) + \vec{e}_3 \cos(\vec{n}, \vec{e}_3) \right] = \\ &= \vec{e}_1 d\sigma_1 + \vec{e}_2 d\sigma_2 + \vec{e}_3 d\sigma_3 = \vec{e}_i d\sigma_i;\end{aligned}$$

$dy$  – элемент площади поверхности  $\Omega_f$ , который с точностью до малых высшего порядка можно считать плоским;  $\vec{n}$  – вектор, нормальный к поверхности  $dy$ , направленный из объема  $V_f$ .

Рассмотрим составляющие правой части уравнения (2.10). По правилу скалярного произведения диадика на вектор:

$$\begin{aligned}\oint (\vec{w} \otimes \vec{w}) d\vec{\sigma} &= (w_i w_j \vec{e}_i \vec{e}_j) (d\sigma_i \vec{e}_i) = (w_i w_j d\sigma_k \vec{e}_i \vec{e}_j \vec{e}_k)_{k=j} = w_i w_j d\sigma_j \vec{e}_i = \\ &= \vec{e}_1 (w_1 w_1 dy_1 + w_1 w_2 dy_2 + w_1 w_3 dy_3) + \\ &+ \vec{e}_2 (w_2 w_1 dy_1 + w_2 w_2 dy_2 + w_2 w_3 dy_3) + \\ &+ \vec{e}_3 (w_3 w_1 dy_1 + w_3 w_2 dy_2 + w_3 w_3 dy_3) = \vec{w} (\vec{w} \times d\vec{\sigma}).\end{aligned}\tag{2.11}$$

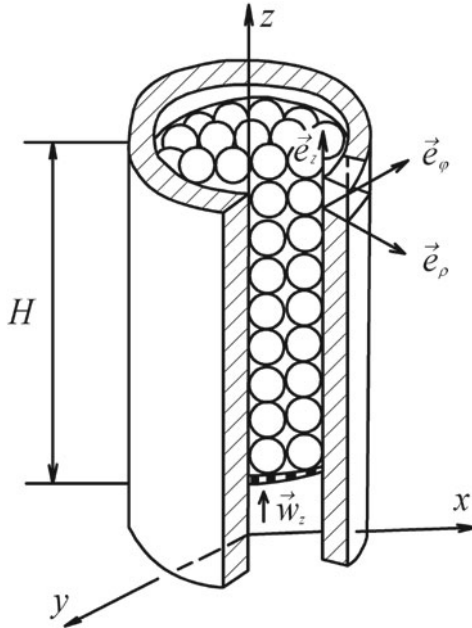


Рис. 2.1. Шаровая укладка в цилиндре

В цилиндрической системе координат (см. рис. 2.1):

$$\mathfrak{K}_{\sigma_\rho} = \rho d\varphi dz, \quad d\sigma_\varphi = d\rho dz, \quad d\sigma_z = \rho d\rho d\varphi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(\bar{w} d\bar{\sigma}) &= \bar{e}_\rho (w_\rho w_\rho d\sigma_\rho + w_\rho w_\varphi d\sigma_\varphi + w_\rho w_z d\sigma_z) + \\ &\mathfrak{K}_{\bar{e}_\varphi} (w_\varphi w_\rho d\sigma_\rho + w_\varphi w_\varphi d\sigma_\varphi + w_\varphi w_z d\sigma_z) + \\ &+ \bar{e}_z (w_z w_\rho d\sigma_\rho + w_z w_\varphi d\sigma_\varphi + w_z w_z d\sigma_z). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Аналогично предыдущим выкладкам

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} d\bar{\sigma} &= (T_{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j) (\bar{e}_i d\sigma_i) = T_{ij} d\sigma_j \bar{e}_i = \\ &= \bar{e}_\rho (\tau_{\rho\rho} d\sigma_\rho + \tau_{\rho\varphi} d\sigma_\varphi + \tau_{\rho z} d\sigma_z) + \\ &\mathfrak{K}_{\bar{e}_\varphi} (\tau_{\varphi\rho} d\sigma_\rho + \tau_{\varphi\varphi} d\sigma_\varphi + \tau_{\varphi z} d\sigma_z) + \\ &+ \bar{e}_z (\tau_{z\rho} d\sigma_\rho + \tau_{z\varphi} d\sigma_\varphi + \tau_{zz} d\sigma_z). \end{aligned} \quad (2.13)$$

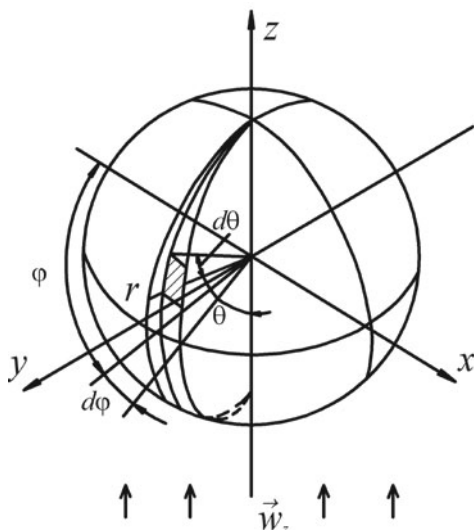


Рис. 2.2. Сферическая система координат

Или в сферических координатах (рис. 2.2), где

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{\sigma_r} &= r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad d\sigma_\theta = r \sin \theta dr d\varphi, \quad d\sigma_\varphi = r dr d\theta, \\ \mathfrak{H} d\vec{\sigma} &= \vec{e}_r (\tau_{rr} d\sigma_r + \tau_{r\theta} d\sigma_\theta + \tau_{r\varphi} d\sigma_\varphi) + \\ &\mathfrak{H} \vec{e}_\theta (\tau_{\theta r} d\sigma_r + \tau_{\theta\theta} d\sigma_\theta + \tau_{\theta\varphi} d\sigma_\varphi) + \\ &+ \vec{e}_\varphi (\tau_{\varphi r} d\sigma_r + \tau_{\varphi\theta} d\sigma_\theta + \tau_{\varphi\varphi} d\sigma_\varphi). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Скорость на поверхности  $\Omega_w$  обращается в ноль, следовательно,

$$\mathfrak{H}_{\Omega_f} (\vec{w} \otimes \vec{w}) d\vec{\sigma} = \int_{\Omega_e} (\vec{w} \otimes \vec{w}) d\sigma. \quad (2.15)$$

Применительно к поверхности  $\Omega_e$  в цилиндрических координатах  $\mathfrak{H}_{\sigma_p} = d\sigma_\varphi = 0$ , так как  $dz = 0$ , и поэтому

$$\mathfrak{H}_{\Omega_e} (\vec{w} \otimes \vec{w}) d\vec{\sigma} = \int_{\Omega_e} (\vec{e}_\rho w_\rho w_z + \vec{e}_\varphi w_\varphi w_z + \vec{e}_z w_z w_z) d\sigma_z. \quad (2.16)$$

Среднерасходная скорость течения потока через рассматриваемую шаровую укладку равна

$$\frac{\mathfrak{H}}{w} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} w_z d\sigma_z. \quad (2.17)$$

Введем коэффициент усреднения осевой составляющей импульса на входе

$$\mathcal{K} k_1 = \frac{1}{\Omega \bar{w}^2} \int_{\Omega_{e1}} w_z^2 d\sigma_z \quad (2.18)$$

и на выходе

$$\mathcal{K} k_2 = \frac{1}{\Omega \bar{w}^2} \int_{\Omega_{e2}} w_z^2 d\sigma_z \quad (2.19)$$

из шаровой укладки [34]. Выражение (2.16) в проекции на ось  $Z$  запишем в виде

$$\mathcal{K} \int_{\Omega_e} w_z^2 d\sigma_z = (k_2 - k_1) \bar{w}^2 \Omega. \quad (2.20)$$

Поверхность твердых стенок можно представить в как сумму

$$\Omega_w = \Omega_c + \sum_{i=1}^N \Omega_{si}, \quad (2.21)$$

где  $\Omega_c$  – внутренняя поверхность цилиндра, ограничивающего шаровую укладку;  $\Omega_{si}$  – поверхность  $i$ -го шара в укладке;  $N$  – число шаров.

Напряжения, связанные с деформацией вязкой среды, действующие на шар в укладке, удобно в дальнейшем представить в сферической системе координат, а действующие на стенки цилиндра, на входе и на выходе шаровой укладки – в цилиндрической. Тогда

$$\mathcal{K} \int_{\Omega_f} T d\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\Omega_{si}} T_i d\sigma \right] + \int_{\Omega_e} T d\vec{\sigma} + \int_{\Omega_c} T d\vec{\sigma}, \quad (2.22)$$

где проекции слагаемых в правой части этого равенства на ось  $Z$  по правилам имеют вид:

$$\begin{aligned} & \mathcal{K} \int_{\Omega_{si}} (\tau_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta)_i d\sigma_r = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\tau_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta)_i r_i^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ & = 2\pi r_i^2 \int_0^\pi (\tau_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta)_i \sin \theta d\mathcal{K}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\mathcal{K} \int_{\Omega_e} \tau_{zz} d\sigma_z = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau_{zz} \rho d\varphi d\rho = 2\pi \int_0^R \tau_{zz} \rho d\rho, \quad (2.24)$$

## 2.1. Гидродинамика обтекания шаров в засыпке

$$\int_{\Omega_c} \tau_{zp} d\sigma_p = \int_0^H \int_0^{2\pi} \tau_{zp} R d\varphi dz = 2\pi R \int_0^H \tau_{zp} \rho dz, \quad (2.25)$$

где  $r_i$  – радиус  $i$ -ой сферы укладки;  $R$  – радиус цилиндра ограничивающего укладку.

Уравнение (2.10) с учетом (2.20)–(2.25) в проекции на ось  $z$  запишется в виде

$$\left[ \int_{V_f} \nabla P dV \right]_z = \sum_{i=1}^N \left[ 2\pi r_i^2 \int_0^\pi (\tau_{rr} \cos \theta - \tau_{\theta r} \sin \theta)_i \sin \theta d\theta \right] + \\ + 2\pi \int_0^R \tau_{zz} \rho d\rho + 2\pi R \int_0^H \tau_{zp} dz - (k_2 - k_1) \rho \bar{w}^2 \Omega. \quad (2.26)$$

Рассмотрим левую часть уравнения (2.26). Воспользуемся аппаратом локального усреднения по объему пористой среды разработанным Слеттери [51], [98]. Со всякой точкой пористой среды, принадлежащей твердой или жидкой фазе, или находящейся на границе раздела фаз, можно связать замкнутую поверхность  $S$ , ограничивающую объем  $V$ . Можно считать, что эта точка лежит внутри  $S$ . Под  $V_f$  будем понимать часть объема  $V$ , заполненную движущейся средой. Тогда, по определению, локальное среднее значение градиента давления по объему  $V$  есть

$$\langle \nabla P \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_{V_f} \nabla P dV. \quad (2.27)$$

Под  $V$  подразумевается объем, малый по сравнению с объемом всей шаровой укладки, но содержащий достаточно много шаров [25]. Величину объема локального усреднения  $V$  формально можно задать требованием [101], [102]:

$$\frac{1}{V} \int \langle \nabla P \rangle dV = \langle \nabla P \rangle, \quad (2.28)$$

которое сводится к следующему: если  $\delta$  – характерная величина пористой структуры, например средний диаметр поры, а  $l$  – характерная величина объема локального усреднения  $V$ , то

$$\delta \ll l. \quad (2.29)$$

Если  $\alpha$  – величина, характерная для общей геометрии шарового слоя, то, как показано в [51], при  $l/\alpha \rightarrow 0$

$$\int_V \nabla P dV \rightarrow \int_V \langle \nabla P \rangle dV. \quad (2.30)$$

При том же условии  $l \ll \alpha$  [21]:

$$\langle \nabla P \rangle \simeq \frac{1}{V} \int_V \langle \nabla P \rangle dV. \quad (2.31)$$

Так как градиент давления в точках твердой фазы равен нулю, то

$$\int_V \nabla P dV \rightarrow \int_{V_f} \nabla P dV. \quad (2.32)$$

Следовательно, с учетом последних соотношений, левая часть уравнения (2.10) запишется в виде:

$$\int_{V_f} \nabla P dV = \int_V \nabla P dV = \int_V \langle \nabla P \rangle dV = \langle \nabla P \rangle V. \quad (2.33)$$

По теореме Слеттери [98]

$$\langle \nabla P \rangle = \nabla \langle P \rangle + \frac{1}{V} \int_{\Omega_w} P d\vec{y}. \quad (2.34)$$

Обычно в пористой структуре давление осредненное по жидкой фазе, определяется следующим образом [25]:

$$\bar{P} = \frac{1}{V_f} \int_{V_f} P dV. \quad (2.35)$$

Локальное среднее значение давления по некоторому объему  $V$  связано со средним значением по жидкой фазе этого объема соотношением [25]:

$$\langle P \rangle = \frac{V_f}{V} \bar{P}. \quad (2.36)$$

Под порозностью  $\epsilon = V_f/V$  будем понимать долю свободного от шаров пространства в некотором объеме  $V$  шарового слоя. Тогда уравнение (2.36) запишется так:

$$\langle P \rangle = \epsilon \bar{P}, \quad (2.37)$$

а левая часть уравнения (2.10) примет вид (для постоянной порозности):

$$\int_{V_f} \nabla P dV = V \epsilon \nabla \bar{P} + \int_{\Omega_w} P d\vec{\sigma}. \quad (2.38)$$

С учетом того, что проекция на ось  $z$  градиента осредненного по жидкой фазе давления равна [65]:

$$\nabla P|_z = \frac{\nabla \bar{P}}{H} = \frac{\bar{P}_2 + \bar{P}_1}{H} \quad (2.39)$$