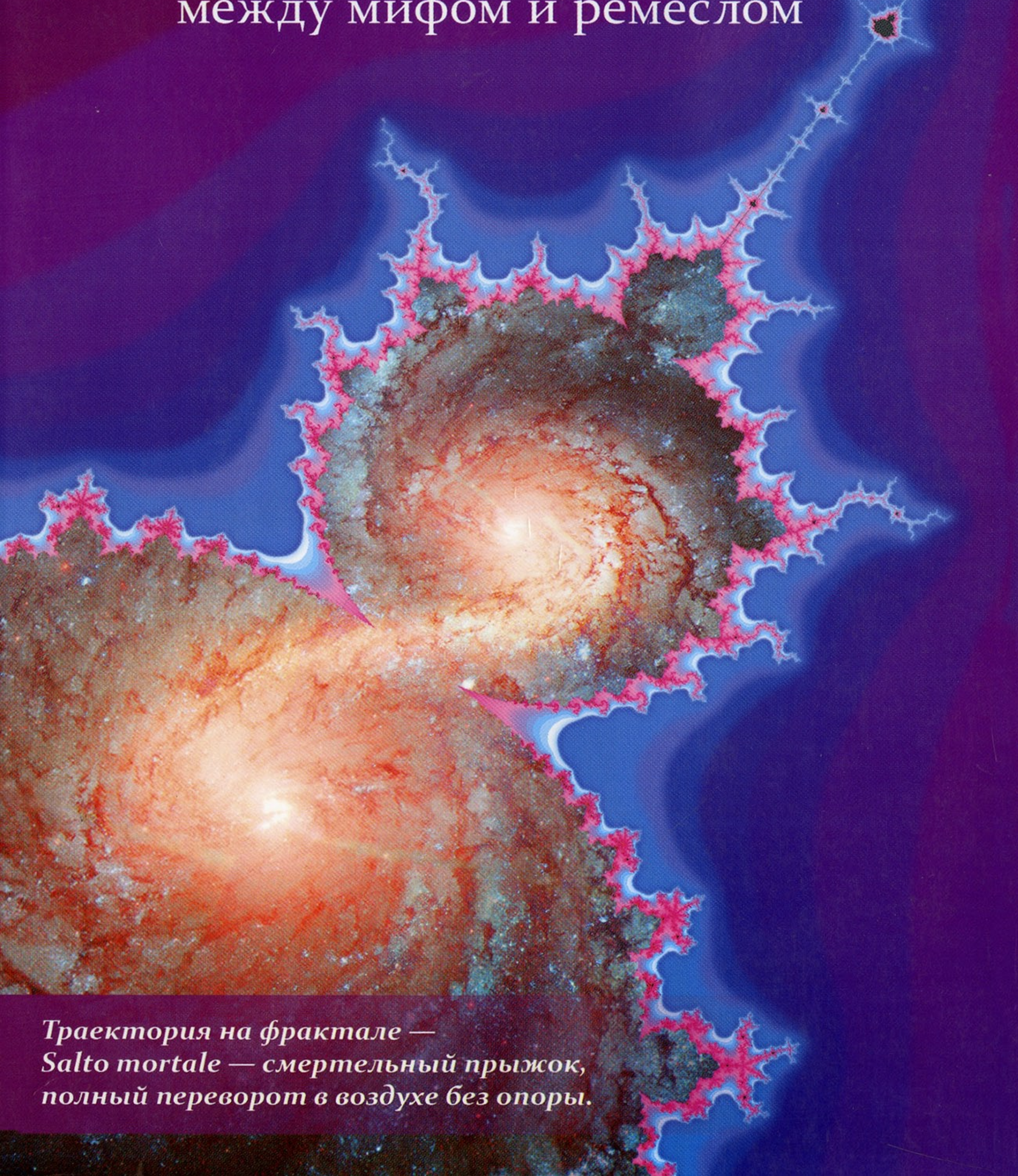
Деменок С.Л.

ФРАКТАЛ:
между мифом и ремеслом



Траектория на фрактале —
Salto mortale — смертельный прыжок,
полный переворот в воздухе без опоры.

УДК 514:515+330
Д 30

Д 30 **Деменок С. Л.** Фрактал: между мифом и ремеслом. — СПб.: ООО «Ринвол», Академия исследования культуры, 2011. — 296 с.

ISBN 978-5-903931-62-0

Фрактальная геометрия природы служит автору путеводной нитью в среде нелинейных и запутанных эффектов окружающей нас реальности. Фрактал иллюстрирует связность предметного и операционального посредством образа, знака, числа — посредством символа. Фрактализация демонстрирует такой сценарий перехода «от существующего — к возникающему», в котором акт действия и фактический результат, стянутые петлей обратного влияния, образуют единое неделимое целое, в котором притворство неотличимо от намерения, а прогнозы перманентно изменяют сами себе. Фрактальное моделирование, соединяя произвол и строгий расчет, открывает простор для рационального, фрактального менеджмента, актуального в условиях «символической экономики», в которой наиболее вознаграждаемыми являются сферы производства и воспроизводства функций, операций, программ; далее — знаков, в том числе денежных и, наконец, фантастических виртуальных образов. Фрактальная интерпретация не просто популяризирует новую картину реальности, но стимулирует креативные и экстравагантные решения, которые производят реальность новейшую на переднем крае науки, бизнеса, инжиниринга, управления.

УДК 514:515+330

ISBN 978-5-903931-62-0

Сергей Леонидович Деменок
Фрактал: между мифом и ремеслом
Научное издание

Руководитель проекта *Т. С. Жмудь*
Директор издательства *А. А. Галат*
Редактор *Е. В. Викторова*
Корректор *В.С. Леонидович*
Верстка *Е.В. Владимировой*

ООО «Ринвол»
196084, Россия, Санкт-Петербург,
ул. Киевская, дом 6, корп. 1, лит. Б; тел./факс +7(812)677-93-15.

Издательство «Академия исследования культуры»
191023, Россия, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 15. http://arculture.ru

Подписано в печать 04.03.2011. Формат 70×100 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Типография «Бионт»
199026 Санкт-Петербург, Средний пр., 86

СОДЕРЖАНИЕ

1. ФРАКТАЛЬНАЯ ПАРАДИГМА

1.1. “LES OBJETS FRACTALS”[8]

Сталкиваясь с формами молнии, языка пламени, линии горизонта, пуха и папоротника, неизбежно и сразу мы попадаем в область притяжения того, что называют фракталом. Фракталы — повсеместно распространенные объекты, которым присущи шероховатость, пористость или раздробленность, причем указанными свойствами фракталы обладают в одинаковой степени в любом масштабе. Внимательные наблюдатели издавна замечали, как некоторые феномены проявляют одинаковую структуру при рассмотрении их «вблизи или издалека»[9]. Изменяются лишь незначительные детали. Фрактал есть математический конструкт, форма которого если искажается, то незначительно. Потому каждый малый участок фрактала представляет собой ключ к целой конструкции. Мы находим то, что следовало найти, — изменчивость, одинаковую на всех уровнях. Этот простой и ясный посыл и есть фрактальная идея — scaling — принцип масштабирования.

Nomen est numen: назвать — значит узнать. Анри Пуанкаре писал: «И вот, когда удивляешься силе, которую может иметь одно слово. Вот объект, о котором ничего нельзя было сказать, пока он не был окрещен. Достаточно было дать ему имя, чтобы произошло чудо»[10]. Так и случилось, когда в 1975 г. по созвучиям и подобиям Бенуа Мандельброт собрал Слово. Из латинских «frangere» (ломать) и «fractus» (разрывный, дискретный, дробный) сложился фрактал. Слово «фрактал» получилось созвучным английским словам «fracture» (разрыв) и «fraction» (дробь). Более того, помимо значения «фрагментированный» (как, например, в словах «фракция» или «рефракция»), слово «fractus» имеет значение «неправильный по форме» — примером сочетания обоих значений может служить слово «фрагмент»[11]. Однако фрактал — не фрагмент[12]. Мандельброт без намерения, быть может, только по наитию встроил в последний слог термина «фрактал» одну из самых важных ассоциаций (FRACTionAL) — алгоритм, правило, код.

Фрактал есть форма, но и формула тоже. Фрактальная форма неотделима от хорошо темперированной функциональности — повтора, итерации, рефрена. Она формируется словно след фигуриста на льду — в ритме строгих правил. Предопределенный в каждой точке след этот искривлен, свернут, спутан, размыт рефлексиями и рефракциями — непредсказуем. Фрактал никогда не завершён, но всякая попытка застать фрактал врасплох погружает в процесс функционирования — следования по следу функции, формулы, алгоритма. Фрактал функционален. Алгоритм предписывает соразмерность фрагментов, знаков, символов и устанавливают меру — метрику, размерность, число. Число — фрактальная размерность — есть инвариант, соединяющий функциональное и фрагментарное. Фрактальный инвариант соединяет оба плана реальности — предметный и операциональный — в одно. Сие есть фрактализация.

И нам уже не отказаться от этой новой реальности, которую декларирует фрактал самим своим появлением. Майкл Барнсли в предисловии к своей монографии «Фракталы повсюду»[13] предостерегает: «Фрактальная геометрия изменит ваше представление о мире. Дальше читать опасно. Вы рискуете утратить детское восприятие облаков, пены, галактик, листьев, цветов, скал, водных брызг и многого другого. Никогда вновь ваше впечатление о мире не станет прежним». Несмотря на предостережения у нас нет другого пути, кроме как принимать, понимать, применять то, что уже создано — фрактальную интерпретацию природы.

1.1.1. «Фракталы повсюду»[14]

У геометрии природы фрактальное лицо.
Манифест Мандельброта

Фрактальный подход к описанию окружающего нас мира является одновременно и естественным и эффективным. Следует удивляться лишь тому, что он был осознан совсем недавно благодаря работам Бенуа Мандельброта.[15] В 1975 и 1977 гг. Мандельброт изучал объекты самой разной природы: изменения цен на хлопок, помехи электрических сигналов, наводнения, длины береговой линии Великобритании. Всюду повторялось одно и то же: степень изломанности оказалась постоянной при различных масштабах. Мандельброт выдвинул гипотезу: существуют объекты, степень иррегулярности которых одинакова при различных масштабах, причем эту степень можно измерить. Гипотеза оказалась продуктивной: простой код позволял описать и воспроизвести объекты, которые считались слишком изломанными, чтобы их можно было описать методами классической геометрии. «Облака не являются сферами, горы — конусами, береговые линии нельзя изобразить с помощью окружностей, кору деревьев не назовешь гладкой. Многие формы настолько неправильны и фрагментированы, что в сравнении с евклидовыми фигурами представляют не просто более высокую степень, но совершенно иной уровень сложности»[16]. Знакомый и знаковый пример такого объекта — дерево. Каждое ответвление со своими ветвями в качественном смысле подобно всему дереву. При этом ветви деревьев не просто разветвляются, но следуют правилу (коду), открытому ещё Леонардо да Винчи: все ветки дерева на данной высоте, сложенные вместе, равны по толщине стволу ниже их уровня (рис. 1).

На страницах журнала «Mathematical Intelligencer» («Математический информатор») была развернута дискуссия на тему: «Кто же открыл фрактал Мандельброта?». Мандельброт опубликовал свою работу в конце 1980 г., однако С. Кранц[17] в «Математическом информаторе» указал, что математики Р. Брукс и Дж. Мателски обнаружили это множество и опубликовали соответствующую работу[18] в 1978 г. До тех пор Брукс и Мателски не придавали особого значения своему наблюдению, но после публикации статьи Кранца и ответа на неё Мандельброта стали претендовать, по меньшей мере, на соавторство. Дж. Хаббард, также заявил, что наблюдал множество Мандельброта на дисплее своего компьютера в 1976 г., а его аспирант Ф. Кочмен ознакомил Мандельброта с этими исследованиями двумя годами позже. Кроме того, Хаббард, Мателски и Брукс предложили считать истинным открывателем множества французского математика Пьера Фату, описавшего его уже в 1906 г. Оказалось также, что и венгерский математик Фридьеш Рисс (Riesz, 1880–1956) опубликовал работу с близкими к обсуждаемым результатами еще в 1952 г. Кох, Пеано, Серпинский — все они работали с фрактальными формами. Творцы

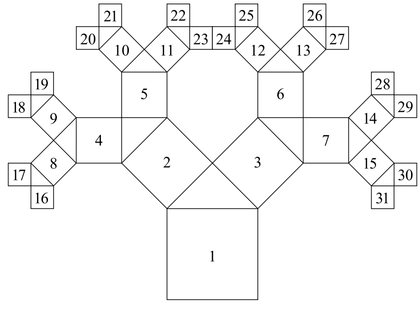


Рис. 1. Дерево Пифагора иллюстрирует код Леонардо да Винчи: $c_1^2 = c_2^2 + c_3^2$; $c_2^2 = c_4^2 + c_5^2$; $c_3^2 = c_6^2 + c_7^2$ и т. д.

готики и барокко работали с фрактальными объектами, не выделяя и не отделяя форму от смысла. Признав равноправие формы и смысла, следует снять вопрос о первенстве смысла. Введение термина и есть открытие смысла. «Фракталы оригинальны настолько, насколько это возможно»[19]. Фрактал назвал и, следовательно, открыл Мандельброт — sic et simpliciter — так и без оговорок.

Едва появилось имя — «фрактал» — объекты нерегулярные, но самоподобные стали различимы повсеместно. Теперь их следовало познавать. Мандельброт чувствовал, что «понятие, как и хорошее вино, требует выдержки»[20], он воздержался от математических определений. Фракталы множились: пыль Кантора, снежинка Коха, губка Менгера, ковер Серпинского и прочие. Фракталы линейные проявляли самоподобие в самом бесхитростном виде: любая часть есть уменьшенная точная копия целого. Например, парижская башня, спроектированная Густавом Эйфелем, состоит из ферм на основе треугольников[21]. При этом отдельные элементы больших ферм сами представляют собой фермы, которые в свою очередь состоят из ферм еще меньшего размера[22]. Фракталы проявились не только в математике, но сразу по всему фронту реальности. Например, музыкальные каноны Баха: одна и та же тема играется на фоне самой себя. Тема задается первым голосом — спустя определенное время вступает второй голос, исполняя ту же тему. Через то же время вступает третий голос и т. д. Появились фракталы, определяемые нелинейными функциями: в них часть есть не точная, а похожая деформированная копия целого. Такова фуга, в которой основную мелодию ведут несколько голосов не столь строго и линейно, как в классическом каноне. «Безошибочной определяющей приметой фуги является её начало: один голос исполняет тему до конца. Затем вступает второй голос, четырьмя тонами выше или тремя тонами ниже. Первый голос в это время ведет дополнительную тему, подобранную так, чтобы дать ритмический, гармонический и мелодический контраст к основной теме. Последующие голоса вступают по очереди, исполняя основную тему, часто являющуюся аккомпанементом дополнительной темы; остальные голоса в это время занимаются тем, что, следуя прихотливой фантазии композитора, украшают фугу различными мелодиями. Когда все голоса прибывают к концу темы, правил больше не существует»[23].

Новые фракталы строились по алгоритмам, которые объединяло многократное повторение при уменьшении масштаба, такта, тона. От ремесла формировалось понятие: *фрактал — объект, содержащий повторяющийся мотив в любом, сколь угодно малом масштабе.* Фрактал — геометрическая форма, которая проницаема, самоподобна и масштабно инвариантна. Повтор типовых фрагментов в большом и малом масштабах создает эффект осмоса — проницания элементов друг в друга, вхождения, встраивания элементов при полном согласии, соразмерности, созвучии форм, пропорций и ритма. Элегантным определением фрактала является определение от примера — фрактал Мандельброта. Любое свойство этого объекта и все свойства в совокупности есть и признак, и дефиниция фрактала.

Фрактал Мандельброта, ставший эмблемой новой, бесформенной геометрии, появился на глянцевых обложках журналов (рис. 2) и сделался украшением выставок компьютерного искусства в начале 80-х годов XX в., когда компьютеры позволили совершать многочисленные итерации просто и быстро.

Открылось, что простые операции производят фантастические формы точно, сложно и красиво. Одним из первых был оператор, описанный Мандельбротом, состоявший из двух тактов — развертывания и ограничения. Первый такт почти тривиален. Возьмем нуль, умножим его на самого себя, прибавим комплексную константу C; взяв результат, умножим его на самое себя и прибавим комплексную константу C; возьмем новый результат, опять умножим его на самого себя и прибавим комплексную константу: $z \to z^2 + C$. Эту процедуру можно было бы продолжать сколь угодно долго, но второй такт оператора её останавливает: если итерация уводит текущий результат к бесконечности, то выбранную точку считаем инородной — она не принадлежит множеству Мандельброта. Точки, принадлежащие множеству Мандельброта, обычно изображаются чёрными, а другие цвета характеризуют точки не из множества Мандельброта. Цвет соответствует номеру итерации, при которой результат оказывается за пределами круга, по модулю равного двум, поскольку доказано, что всё множество расположено внутри круга радиуса 2 на плоскости. Цвета выбираются из компьютерной палитры по соображениям хорошей различимости и эстетической привлекательности.

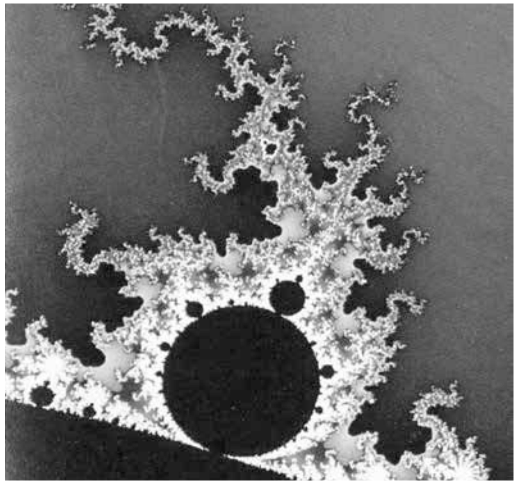


Рис. 2. Фрагмент множества Мандельброта с обложки журнала Scientific American. Август 1985 г.

Контуры фрактала Мандельброта демонстрируют восхитительное разнообразие. Между двумя любыми черными точками всегда возникают цветные точки. Погружение во фрактал Мандельброта открывает все новые формы границ, которые приблизительно повторяют предыдущие формы, но не во всем. Всегда появляются формы иные, новые. Фрактал Мандельброта являет во множестве винтовые завитки, усики и спирали; круги, усыпанные колючими шипами, завивающиеся наружу, молекулы, висящие, словно виноградины на лозе. Фактически ни один фрагмент границ точно не походит на другой (рис. 3). Перечисленного мало. Множество Мандельброта есть композиция en abime[24]: каждая точка этого множества есть свёрнутый образ из другого множества — множества Жюлиа. Оператор Жюлиа имеет то же уравнение, что и оператор Мандельброта: $z \to z^2 + C$, только здесь переменным параметром является не C, а z.

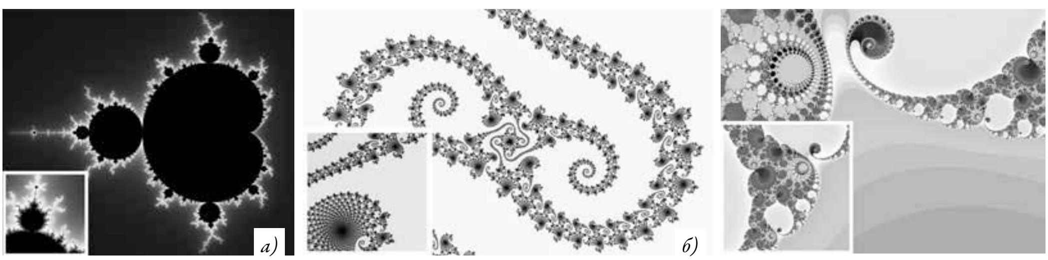


Рис. 3. Фрактал Мандельброта и его фрагменты[25, 26]

В 1918 г. Гастон Жюлиа (1893–1978) опубликовал 199 страниц «Memorie»[27], посвященных итерационным операциям, без единого рисунка и получил приз Французской академии. Его работы были надолго забыты. Интерес к предмету исследований Гастона Жюлиа и его соотечественника Пьера Фату возобновился с появлением компьютеров, когда на экранах мониторов итерации Жюлиа и Фату — вдруг — обернулись узорами замысловатыми и соблазнительными.

Оператор Жюлиа сводится к итерации в комплексной плоскости выражения:

$$z \to z^2 + C$$

или:

$$z_{n+1} = z_n^2 + C.$$

С помощью этого оператора можно построить простой, но не тривиальный образ, который требует пояснений.

Рассмотрим простейший частный случай оператора Жюлиа, когда $z_o = 0$ и $c = 0$. Результаты итерации в этом случае легко предсказуемы. Для любого действительного числа большего единицы итерация быстро ведёт результат к бесконечно большим величинам. Например, 1,1 × 1,1 = 1,21 × 1,21 = 1,4641 × 1,4641 = 2,14358 и т. д. Для действительного числа меньше единицы результат итерации быстро становиться бесконечно малым. Например: 0,9 х 0,9= 0,81 х 0,81 = 0,06561 х 0,6561 = 0,43046 и т. д. То же будет верно и для любого комплексного числа (рис. 4).

Простота отображения Жюлиа ($z_{n+1} = z_n^2 + C$) сравнима с уравнением Пифагора ($a^2 + b^2 = c^2$), числами Фибоначчи ($f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$) или формулой Эйнштейна ($E = mc^2$). Простота операции при этом контрастирует со сложностью и разнообразием производимых форм. Сложность эта особого рода — множества Жюлиа демонстрирует некоторый ритм, порядок и строй, проявляющийся на шкале масштабов. В известной книге Пайтгена и Рихтера «Красота фракталов»[28] приведено множество фракталов Жюлиа. На рис. 5 приведены некоторые из них.

Границы форм Жулиа — фракталы — стали появляться во множестве как результат итерации различных функций. Открылось, что нас окружает мир фрактальных объектов — лист клёна, папоротник, облака и пена. Теперь, после фиксации фрактального феномена, фокус

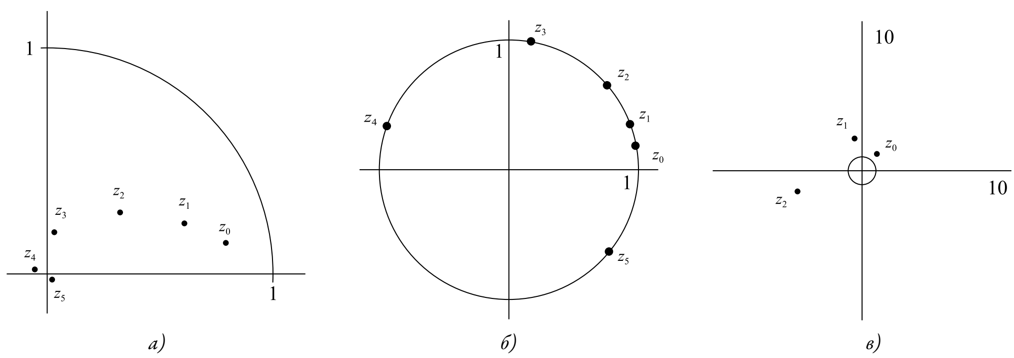


Рис. 4. Пример итерации $z_{n+1} \to z_n^2$ трёх исходных точек: $|z_0| < 1$ (*а*), $|z_0| = 1$ (*б*) и $|z_0| > 1$ (*в*)

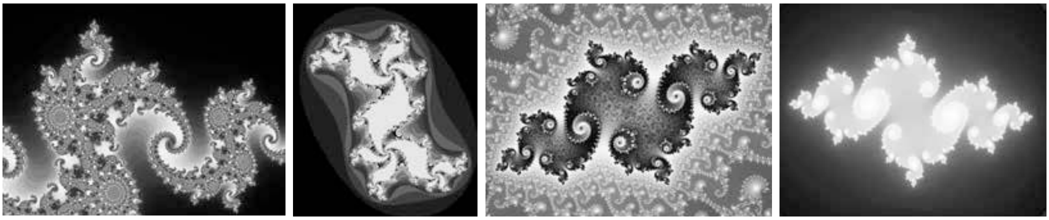


Рис. 5. Фракталы Жюлиа[29]. $C = -1 + 0i$; $C = 0{,}0239 + 0{,}519i$; $C = — 0.743 + 0{,}114i$; $C = 0{,}259 + 0i$

внимания смещается к исследованию его функционирования. Актуальной стала не столько задача построения фрактала по известному алгоритму, но и задача обратная — поиск правил построения уже известной фрактальной формы. Появились и приметы, по которым можно угадать фрактал, а при известной удаче разгадать его алгоритм: подобие; асимметрия; инвариантность.

Фрактальное подобие

Исследуя нерегулярные, фрагментарные, изрезанные объекты самой разной природы, Мандельброт обнаружил некоторое геометрическое подобие, которое, однако, не сводится к переносу, отражению, вращению и линейному сжатию целого при построении его элементов. Фрактальное подобие — это повторяемость особого качества, это подобие, проходящее сквозь масштабы, — трансмасштабное подобие. Мандельброт любил цитировать Джонатана Свифта: «на блоху охотятся маленькие блошки, а их, в свою очередь, кусают еще более мелкие блошки, и так далее до бесконечности». Фрагменты фрактального объекта вблизи и издалека выглядят подобными, не являясь при этом точно такими же. Это не просто один и тот же элемент, сфотографированный с разного расстояния, это разные объекты, вложенные, встроенные друг в друга. Их форма повторяется во все более мелком масштабе иногда точно, иногда — только в общих чертах. Примером таких структур в природе может служить лист клёна, фрагменты которого повторяют форму всего листа (рис. 6). Мандельброт писал: «Все фигуры, которые я исследовал и называл фракталами, в моем представлении обладали свойством быть нерегулярными, но самоподобными»[30].

Обычно объект называется самоподобным, если каждая его часть получается из целого посредством преобразования подобия, т. е. переносом, отражением, вращением или линейным сжатием. С математической точки зрения эти операции можно повторять произвольное число раз. Отсюда сразу следует, что самоподобный математический объект состоит из бесконечно малых деталей.

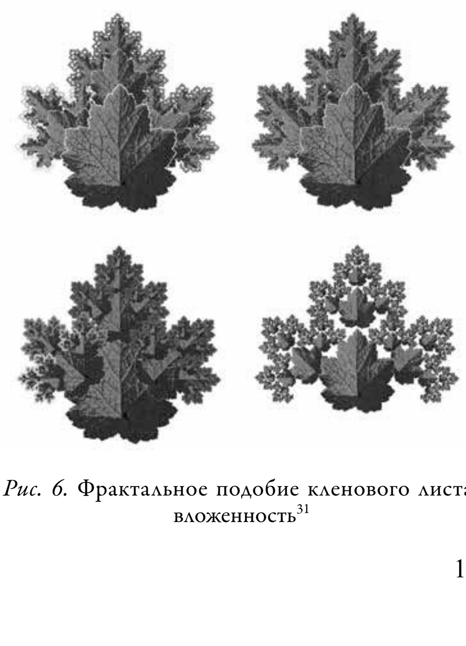


Рис. 6. Фрактальное подобие кленового листа: вложенность[31]

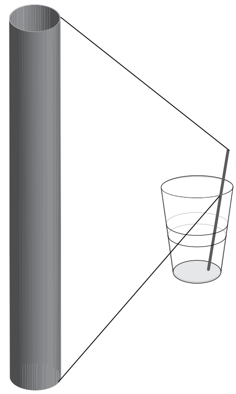


Рис. 7. На достаточно большом расстояния соломинка в стакане может выглядеть как одномерная линия.

Аналогичным образом самоподобие может означать, что всякая часть объекта, подходящим образом увеличенная, может быть наложена на большую его часть. При повторении этого оператора размер объекта увеличивается без ограничений — до бесконечного. Между тем, большинство реально существующих фракталов ограничены и лишены как бесконечно больших, так и бесконечно малых деталей[32]. На оси масштабов фрактальный объект занимает некоторый отрезок. Поместив наблюдателя в область малых масштабов или в область больших масштабов, мы получим совершенно разные образы: в отличие от линейного самоподобия фрактальное подобие по оси масштабов асимметрично.

Позднее Мандельброт дал такое определение фрактала: «фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому»[33]. Целое не только единит, но и ограничивает. Фрактальное подобие отличается от геометрического подобия ограниченностью и, следовательно, масштабной асимметрией: уменьшать масштаб можно сколь угодно, увеличивать — нет. Фрактал есть сингулярность. Фрактал — это объект, структура которого раскрывается вблизи. Удаляясь, мы теряем сложность, огрубляем, упрощаем, символизируем (рис. 7).

Фрактальное подобие отличается от подобия в классическом смысле (линейно увеличенный или уменьшенный), но всегда находится в согласии с удобным и широким толкованием слова «похожий». Фрактальное подобие отличается от линейного геометрического подобия ограниченностью, асимметрией, потерей конгруэнтности. Но все еще есть основания говорить о подобии неисчислимых фрагментов. Здесь приходит на память дефиниция Николая Кузанского[34]: «если Бог есть бесконечность в смысле латинского слова infinitum — без конца, то универсум — безграничен в представлении перспектив и порядков в смысле латинского слова interminatum — всегда еще нечто между». Ограниченный в пространстве, фрактал безграничен в просветах: между сколь угодно близкими фрагментами всегда есть ещё фрагмент, но и простор также.

Фрактальная асимметрия

Сингулярность фрактального объекта, его единство и целостность неизбежно порождают масштабную асимметрию. Асимметрия становится причиной относительности. Классический пример тому — взгляд на Земной шар из космоса (рис. 8). Приближаясь к Земле, мы обнаружим океаны, континенты, побережья и цепи гор. Позднее взору предстанут более мелкие детали: кусочек земли на поверхности горы, столь же сложный и неровный, как сама гора. Потом покажутся крошечные частички грунта, каждая из которых сама является фрактальным объектом.

Рассмотрим клубок бечёвки с точки зрения мухи. Клубок бечёвки кажется мухе с большего расстояния точкой (топологическая размерность 0). Подлетев поближе, муха видит большую точку — диск (топологическая размерность 2). С еще более близкого расстояния муха видит,

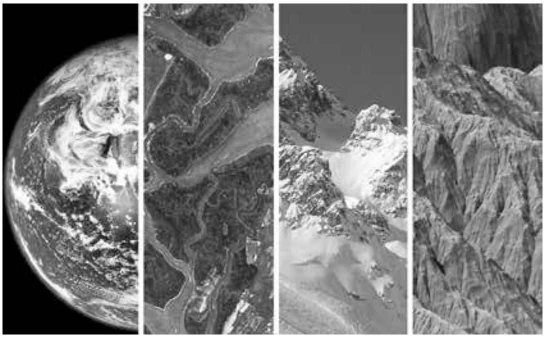


Рис. 8. Взгляд на Земной шар из космоса: приближаясь к Земле, мы видим цепи гор, реки, ландшафт и ещё ближе — горные породы и частицы грунта

Рис. 9. Клубок бечёвки

что перед ней шар (топологическая размерность 3). Во всех случаях неровности сглаживаются из-за большого расстояния, и размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с топологической размерностью. Подлетев совсем близко, муха видит перед собой клубок бечёвки, т. е. запутанную пространственную кривую (топологическая размерность 1). И лишь сев на клубок, муха видит, что бечевка состоит из скрученных трехмерных объектов, а те, в свою очередь, из одномерных волокон — пушинок, обрамляющих нить, вещество которых распадается на частицы с нулевой размерностью, — здесь муха ощутит фрактальность бечёвки (рис. 9). Истинной размерности клубка бечёвки просто не существует; все зависит от точки зрения наблюдателя, разрешающей способности метода наблюдения, ведь «метод и есть результат».

Так Мандельброт показал, что топологическая размерность объекта наблюдения — величина относительная, зависящая от субъективности восприятия. Он писал: «Представление о том, что численный результат измерений зависит от отношения объекта к наблюдателю, вписывается в понятия современной физики и даже является их превосходной иллюстрацией»[35].

Фрактальная размерность-инвариант

Фрактал есть идея о том, что некоторые величины остаются неизменными (инвариантными) при рассматривании их вблизи или издалека (т. е. в любом масштабе). Инвариант всегда скрыт от непосредственного наблюдения, он вне пространства, которое заполняет фрактал. Он не просто в другой плоскости, он — в другом измерении, не просто явлен — закамуфлирован. Только смещая фокус от детали к ландшафту и обратно, инвариант этот порой удается «ухватить пальцами». Открытие инварианта — фрактальной размерности — стало манифестом, признаком и дефиницией фрактальной структуры. Одна из классических иллюстраций фрактальной размерности — задача измерения длины береговой линии Великобритании.

При разборе архива выдающегося специалиста по гидродинамике Луиса Фрая Ричардсона среди его бумаг были обнаружены черновики удивительного исследования. Ричардсон обнаружил при переходе «от географии к мелким камешкам» неограниченное увеличение протяженности береговой линии. Контуры береговой линии Великобритании вели себя, по меньшей мере, странно.

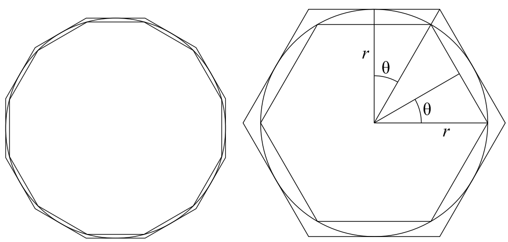


Рис. 10. Метод определения длины окружности.

Со школьной скамьи нам известно, что если измерять длину отрезка обыкновенной евклидовой кривой с помощью циркуля, уменьшая его раствор ε, то можно ожидать, что измеренные величины длины $L(\varepsilon)$ быстро сходятся к некоторому вполне определенному значению, называемому длиной. Например, длина окружности конечна и равна $L = \pi D$. Ещё пифагорейцы описали метод определения длины окружности. Сначала в окружность вписывался правильный треугольник, потом квадрат, потом шестиугольник и так далее (рис. 10). Чем больше число сторон вписанного многоугольника $n \to \infty$, тем ближе результат к пределу $L/D \to \pi$, т. е. длина окружности конечна $L \to \pi D$. Отношение длины окружности к её диаметру есть инвариант — число π. Пифагорейцев пугала иррациональность этого числа, его неповторимость при том, что оператор расчета представлял собой сплошное повторение.

Теперь рассмотрим метод измерения длины береговой линии. Установим раствор измерительного циркуля на некоторую заданную длину шага ε и пройдемся этим циркулем вдоль интересующей нас береговой линии, начиная каждый новый шаг в той точке, где закончился предыдущий. Количество шагов, умноженное на длину ε, даст нам приблизительную длину берега $L(\varepsilon)$. Наши ожидания состоят в том, что $L(\varepsilon)$ стремится к пределу при уменьшении ε ($\varepsilon \to 0$). Однако эмпирические данные измерения длины береговой линии Британии Льюиса Ричардсона описываются формулой:

$$L(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-\beta},$$

где показатель степени $\beta \approx 3/2$ — инвариант, т. е. длина $L(\varepsilon)$ склонна увеличиваться неограниченно за счет бесчисленных изгибов и извивов в любом масштабе. Инвариант — показатель степени β — вне формы фрагмента, вне формы объекта и это отличает фрактал от привычных геометрических фигур, например окружности.

Рис. 11. Операция приближения (zoom) на примере побережья Великобритании

Метрика фрактального фрагмента зависит от размеров линейки. Причина этого эффекта понятна: если рассмотреть какой-нибудь полуостров или бухту на картах масштаба 1/100 000 и 1/10 000, то на последней карте мы ясно различим более мелкие полуострова и бухты, которых не было видно на первой. Карта того же участка, выполненная в масштабе 1/1000, покажет нам еще более мелкие полуострова и бухты. Каждая новая деталь увеличивает общую длину $L(\varepsilon)$. Таким образом, не существует единственной протяженности — протяженностей много. Фрактальная кривая имеет много масштабов длины. Инвариантом является показатель степени β. Мандельброт интерпретировал береговую линию как фрактальный объект, фрактальная размерность которого постоянна. Фрактальная размерность отлична от топологической размерности береговой линии $d_т = 1$. Отличие фрактальной и топологической размерностей объекта — один из признаков фрактала, который Мандельброт иногда использовал как определение фрактала: «a set of points whose fractal dimension exceeds its topological dimension» — множество, фрактальная размерность которого выше его топологической размерности.

1.1.2. Фрактальная размерность: улыбка без кота

В этом разделе речь пойдет об одном из самых фундаментальных вопросов математики — о размерности. Это понятие, впрочем, распространяется далеко за пределы математики, поскольку связывает измеряемое с производящим измерение и с самим процессом измерения.

Ещё Пифагор утверждал: начало всех вещей есть число. Филолай пояснил: «и впрямь все, что познается, имеет число, ибо невозможно ни понять ничего, ни познать без него»[36]. Известная со школьной скамьи теорема Пифагора утверждает:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

где c — большая из сторон прямоугольного треугольника с оставшимися сторонами a и b (рис. 1)

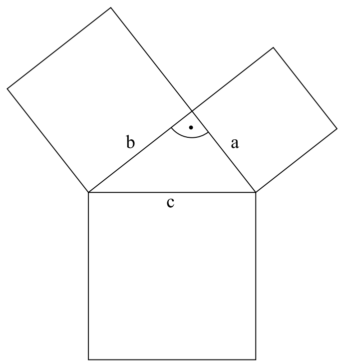


Рис. 1. Теорема Пифагора

В частном случае

$$2 = 1 + 1$$

или

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 1^2 + 1^2$$

Этот $\sqrt{2}$ пугал пифагорийцев тем, что не существовало отношения целых чисел, равных ему. Геометрия открывала такие числа без счета и без ограничения (рис. 2). Даже число Пифагора — π — одно из них.

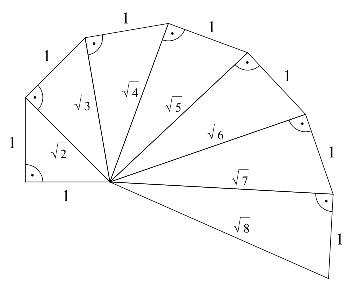


Рис. 2. Спираль иррациональных чисел

Так, едва приступив к «анатомированию» числа, пифагорейцы увидели пучину несоразмерного и испугались. Древняя пифагорейская мудрость предостерегает: «зло есть свойство безмерного, а добро — определенного». В схолиях[37] к X книге «Начал» Евклида (ок. 300 г. до н. э.) приведена пифагорейская легенда о гибели при кораблекрушении Гиппаса Месопотамского, открывшего числа несоразмерные, скрытные (incommunicantes), иррациональные. По легенде всякий, кто коснется их тайны, погрузится в «пучину возникновения и будет обмываемым ее волнами, не знающими покоя».

Соблазненный, впрочем, не знает меры, не знает и упокоения. Ищущим воздается. Нашлась лазейка: различность, неповторимость, дифференциал упраздняет тождество, но допускает относительную меру предметов и явлений в ограниченном диапазоне масштабов — соизмеримость. Размерность — вот новая точка опоры.

Понятие размерности лежит в основе определений, которые открывают I книгу «Начал» Евклида, посвященную геометрии плоскости:

1. Точка есть фигура, не имеющая частей.
2. Линия есть фигура, обладающая длиной, но не обладающая шириной.
3. Оконечностями линии являются точки.
4. Поверхность есть фигура, обладающая только длиной и шириной.
5. Оконечностями поверхности являются линии.

Происхождение этих идей восходит к Платону (427–347 гг. до н. э.), который в VII книге «Государства» комментирует Сократа следующим образом: «после плоских поверхностей... правильным будет добавить к двум измерениям третье... то есть измерение, присущее кубам и прочим телам, обладающим глубиной». И две с половиной тысячи лет спустя понятие размерности столь же размыто.

Топологическая размерность

Топологическую размерность пространства часто определяют как минимальное число координат, необходимых для фиксации его произвольной точки. Окружающие нас объекты — это множество точек n — мерного евклидова пространства. Для любого такого множества может быть введена его топологическая размерность d_τ — минимальное количество параметров, необходимых для указания положения точки в рассматриваемом множестве. Она строится по индукции. Пустому множеству приписывается размерность $d_\tau = -1$. Размерность d_τ любого непустого множества отлична от -1 и определяется следующим образом: если некоторое множество можно разделить на не связанные друг с другом части с помощью множества размерности d_τ то его топологическая размерность равна $d_\tau + 1$. Например, точка имеет размерность $d_\tau = 0$, поскольку две, не совпадающие точки можно считать разделёнными пустым множеством. Прямая имеет размерность $d_\tau = 1$, так как два любых непересекающихся отрезка с несовпадающими концами можно разделить точкой; плоскость можно разделить линией, поэтому размерность плоскости $d_\tau = 2$. Понятно, что топологическая размерность сферы равна двум, шара — трем и т. д. (рис. 3). Очевидно, топологическая размерность *n* мерного

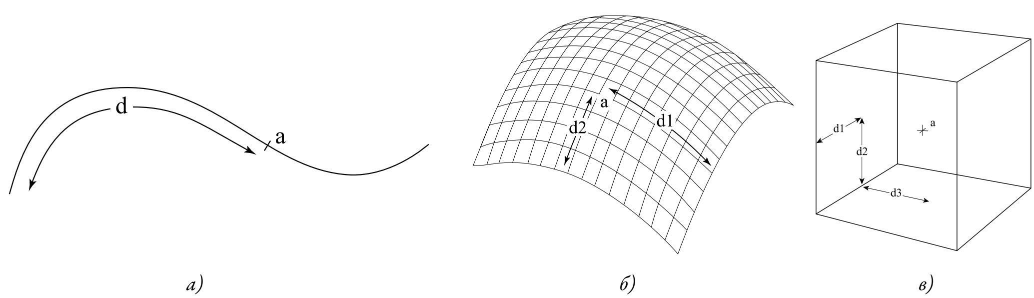


Рис. 3. Топологическая размерность $d_\tau = 1$ (*а*), $d_\tau = 2$ (*б*), $d_\tau = 3$ (*в*)

евклидова пространства равна $d_\tau = n$. Из самого определения топологической размерности следует, что она может быть только целым числом. Таким образом, точка всегда вложена в линию, линия — в плоскость, плоскость — в пространство и, уж согласитесь, что вложенному множеству по законам здравого смысла следует быть меньше того множества, в которое оно вложено.

Разделения континуумов Анри Пуанкаре

Одна из последних работ Анри Пуанкаре (1854–1912) называется «Почему пространство имеет три измерения?». Пуанкаре пишет: «Что мы имеем в виду, говоря, что размерность пространства равна трем? Если для разделения континуума C достаточно рассмотреть в качестве сечений определенное количество различных элементов, мы говорим, что размерность такого континуума равна единице... Если же для разделения континуума достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, равной единице, мы говорим, что размерность континуума C равна двум. Если достаточно взять сечения, образующие один или несколько континуумов с размерностью, не превышающей двух, мы говорим, что размерность континуума C равна трем; и так далее». Для разделения пространства необходимы сечения, называемые поверхностями; для разделения поверхностей — сечения, называемые кривыми; точку же разделить нельзя, так как она не является континуумом: она — сингулярность. У неё нет меры, кроме неё самой. Её размерность равна нулю. Кривые разделяются точками, размерность которых — ноль. Размерность кривых равна единице. Поверхности разделяются непрерывными линиями. Размерность поверхностей равна двум. Пространство можно разделить поверхностями, следовательно, пространство является континуумом с размерностью, равной трем. По сравнению с классической трактовкой размерности Пуанкаре совершил важный сдвиг: от точек, линий и плоскостей к множествам и континуумам — к топологии. Он показал, что топологическая размерность множества при некоторых трансформациях — свертывании, сжатии, сгибании — не сохраняется при том, что мера множества остается прежней.

Нестрогое определение размерности: палетка

Художники, архитекторы и ремесленники используют метод, который сам по себе служит определением размерности. Для измерения площади объекта на плане или карте используется простое устройство — палетка. Это прозрачная пластинка, на которой нанесена квадратная сетка с заданным шагом δ, скажем, 1 см. Наложив палетку на карту, можно подсчитать число квадратиков, попавших внутрь области, и получить оценку площади снизу, или подсчитать количество квадратиков, полностью покрывающих область, и получить оценку площади сверху. Чем меньше размер квадратиков сетки, тем точнее будет оценка ($\delta \to 0$). На рис. 4 приведен пример измерения площади Великобритании с помощью палетки.

Ясно, что при уменьшении δ число ячеек сетки $N(\delta)$ будет возрастать как $N(\delta) \sim 1/\delta^2$. Если же мы рассмотрим покрытие отрезка линии, то получим $N(\delta) \sim 1/\delta$. Если это будет объемная фигура, то $N(\delta) \sim 1/\delta^3$. Например, отрезок длиной 1 см мы можем покрыть десятью отрезками длиной в 1/10 см. Квадрат со стороной в 1 см мы полностью покроем сотней квадратов со сторонами 1/10 см. Аналогично, куб с ребром в 1 см заполним тысячью кубами с рёбрами в 1/10 см. Мы видим, что величина, совпадающая

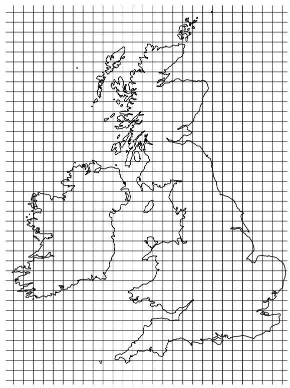


Рис. 4. Пример измерения площади Великобритании с помощью палетки

с топологической размерностью, появляется в показателях степеней: 10^1, 10^2, 10^3... Эту последовательность показателей можно обнаружить независимо от выбора меры измерения δ. Из рассмотренных нами примеров следует, что $N(\delta) \sim 1/\delta^d$, где d — размерность. Следовательно, величина $\lim_{\delta \to 0} N(\delta)\, \delta^d$ представляет собой инвариант, меру объекта, а размерность выступает как параметр скорости роста числа ячеек при уменьшении меры ячеек $\delta \to 0$. Само существование предела — конечного, отличного от нуля и от бесконечности — есть чудо.

Размерность как предел случайного процесса

С помощью палетки даже искусному в мастерстве топографу весьма непросто измерить площадь, например, Великобритании с учётом всех мельчайших изгибов. Но, волей случая, есть технология простая и надежная. Вообразите, что мы разбрасываем рисовые зерна по полу, где начерчен контур побережья Великобритании, а затем подсчитываем долю зёрен, оказавшихся в пределах контура, от общего числа брошенных зерен. Со временем результат начинает приближаться к пределу — площади Великобритании. Размерность являет собой предел случайного процесса.

Размерность Хаусдорфа–Безиковича

Подобные рассуждения ведут в зону притяжения идеи Феликса Хаусдорфа[38] (1868–1942), который опубликовал только одну работу — «Dimension and Outer Measure» (1919) по теме размерности, но его посыл был развит Абрамом Самойловичем Безиковичем (1871–1970). Безикович[39] родился в Бердянске на Азовском море, закончил Санкт-Петербургский университет (1912), затем преподавал в Пермском университете, а в 1924 г. покинул СССР, работал в Стокгольме, Оксфорде, Ливерпуле, Кембридже. В Кембридже в 1930-х гг. он написал несколько статей[40] по теме «Sets of Fractional Dimensions» — «Множества дробных размерностей». В основе рассуждений — подсчёт числа ячеек, целиком поместившихся в границах объекта (оператор inf) при уменьшении их размера (оператор lim).

Пусть исследуемое множество лежит в d_τ — мерном евклидовом пространстве. Будем покрывать это множество d_τ мерными кубиками, причём величина ребра любого кубика δ_i не превышает некоторое значение $\delta > 0$, т. е. $\delta_i < \delta$.

Введем отображение:

$$I_d(\delta) = \inf \Sigma\, \delta_i^d,$$

где inf — оператор учета только тех ячеек, которые полностью помещаются на объекте.

Пусть теперь

$$I_d = \lim_{\delta \to 0} I_d(\delta),$$

где $\lim_{\delta \to 0}$ — оператор предельного перехода с уменьшением параметра $\delta \to 0$.

Если d велико, то $I_d \to 0$. Если d близко к нулю, то $I_d \to \infty$. Феликс Хаусдорф показал, что существует критическая величина d_H, выше которой $I_d = 0$, а ниже которой $I_d = \infty$. Это критическое значение d_H называется размерностью Хаусдорфа–Безиковича.

Если все ячейки равны и имеют размер $\delta_i = \delta$, то $I_d(\delta) = \ln N(\delta)$ и

$$d_H = \lim_{r\to 0} \ln N(\delta) / \ln(1/\delta)$$

Таким образом, величина I_d имеет смысл меры только при использовании измерительных ячеек размерности d_H. Плотность меры тем выше, чем больше её размерность. Если мера наблюдателя плотнее, чем мера объекта, то $I_d = 0$, если мера наблюдателя разреженнее, чем мера объекта, то $I_d = \infty$. Величина I_d соответствует мере множества, только если измеряющее и измеряемое соизмеримы. Подобное измеримо подобным.

Мера объекта $N(\delta)\ \delta^d$ и мера наблюдения δ соизмеримы друг с другом посредством параметра сопряжения d. При $\delta \to 0$ мера объекта может устремиться к нулю $N(\delta)\ \delta^d \to 0$, если d велико; либо — к бесконечности $N(\delta)\ \delta^d \to \infty$, если d достаточно мало. Отображение $\delta \to N(\delta)\ \delta^d$ при $\delta \to 0$ может либо уводить к бесконечности, может обращаться в ноль, и только при единственном значении $d = d_H$ стягиваться к некоторому конечному, пусть иррациональному (несоразмерному), числу.

Для простоты рассмотрим приближение: $N(\delta) \sim 1/\delta^q$. В этом случае отображение $\delta \to N(\delta)\ \delta^d$ может быть представлено уравнением

$$\delta \approx \omega \frac{1}{\delta_q} \delta^d$$

или

$$\delta \approx \omega\, \delta^{d-q},$$

где ω — постоянная.

При $d - q > 1$ для любого малого начального значения $\delta_0 < 1$ результат итерации есть $\delta \to 0$. При $d - q < 1$ для любого малого начального значения $\delta_0 < 1$ в результате итерации $\delta \to \infty$. При $d - q = 1$ для любого значения δ_0 величина $\delta \approx \omega = \text{const}$. Таким образом, мера объекта, которую выражает число, является наблюдателю только при выборе метрики наблюдения соизмеримой с метрикой объекта: $d \approx q$. Требование соизмеримости $d/q \approx 1$ допускает бесчисленное множество кратных метрик. Так, например, объект может быть явлен при $d = q = 1$, но, также и при $d = q = 2$ или при $d = q = \sqrt{2}$. Таким образом, размерность — величина относительная. Нет абсолютной меры, но обычно обнаруживается множество размерностей, соизмеряющих процессы.

Величина размерности может принимать целочисленные, дробные и иррациональные значения. В последнем случае мера наблюдения и мера объекта несоразмерны, но соизмеримы. О несоразмерности Николай Кузанский писал: «Как бы ни приближались друг к другу мера и измеримое, всегда между ними будет иметь место некоторое различие»[41]. Здесь уместно заметить, что в китайском словаре отсутствует ноль, но есть понятие наименьшей четной дробности, обозначаемой иероглифом «лин», как производной ассоциацией с каплей дождя, которая и отдельная, и самая мелкая, но и делимая на брызги. Таким образом, в самом языке содержится понятие дискретной непрерывности: дискретность, непрерывностью порожденная, непрерывность порождает. В этом духе сопряжение несоразмерных объектов реализуется посредством бесчисленных итераций, последовательных приближений, в результате которых дифференциал исчезает $\Delta = d - q \to 0$ и производится некоторая дискретная величина — фрактальная размерность.

Определение посредством определяемого

При увеличении d величина I_d достигает минимального значения $I_d = 0$. Минимальная целочисленная мера наблюдателя d, при которой мера данного объекта I_d еще равна нулю, является топологической размерностью объекта $d_т$. Для простых геометрических объектов размерность Хаусдорфа–Безиковича совпадает с топологической. Например, для отрезка $d_H = 1$, для квадрата $d_H = 2$, для куба $d_H = 3$. Действительно, возьмём квадрат со стороной a на плоскости в трёхмерном пространстве и покроем его кубиками со стороной δ. Количество таких кубиков $N(\delta) = a^2 / \delta^2$. Далее, представим сумму

$$I_d(\delta) = \Sigma\, \delta_I^{\,d} = N(\delta) \cdot \delta^d = a^2 \delta^{d-2}$$

Эта сумма существенно зависит как от δ, так и от d. Если $d < 2$, то при уменьшении δ значение $I_d(\delta)$ неограниченно увеличивается; если же $d > 2$, то с уменьшением δ значение $I_d(\delta) \to 0$, т. е. существует пограничное значение $d_H = 2$.

Основной чертой фракталов является изрезанность, извилистость, при которой топологическая размерность, мерцая, исчезает. Мандельброт (1977) предложил использовать определение размерности Хаусдорфа–Безиковича и, более того, определил фрактал как «множество, для которого размерность Хаусдорфа–Безиковича d_H строго превышает топологическую размерность $d_T < d_H$». Это утверждение Мандельброт иллюстрирует примером броуновского движения[41]. Он считает броуновскую траекторию ломаной линией, топологическая размерность которой $d_T = 1$. Двухмерная траектория броуновского движения имеет фрактальную размерность $d_H = 2$, трёхмерная — $d_H = 3$. Топологическая размерность при этом остается равной 1. При такой трактовке топологической размерности броуновской траектории определение фрактальной размерности очевидно: $d_T < d_H$.

Но ведь сам Мандельброт отмечает, что траектория броуновского движения всегда размыта. Следовательно, для задания положения точки на броуновской траектории необходимы две координаты для двухмерного и три координаты для трёхмерного броуновского движения. Если рассматриваемому фракталу ставить в соответствие топологическую размерность пространства, в котором фрактал содержится целиком, то соотношение между фрактальной и топологической размерностью в общем случае[42]: $d_H \le d_T$.

Таким образом, определение фрактальной размерности через топологическую размерность ($d_T < d_H$) есть, одновременно, определение топологической размерности через фрактальную.

На практике при определении фрактальной размерности используются упрощения и допущения, позволяющие найти фрактальную размерность «без валидола».

Простая ёмкость множества

Минимизировать величину $\Sigma\delta_I^{\,d}$ по всем возможным разбиениям практически невозможно. Поэтому используют упрощение — рассматриваются ячейки одного размера. Пусть $N(\delta)$ есть минимальное число кубиков со стороной δ, необходимых для покрытия. При этом

$$I_d(\delta) = N(\delta)\, \delta^d$$

или

$$\mathrm{N}(\delta) = \mathrm{I}/\delta^d$$

Логарифмируя равенство, получаем:

$$\log N(\delta) = \log I - d \log \delta;$$

$$d = -\frac{\log N(\delta)}{\log \delta} + \frac{\log I}{\log \delta}.$$

Так как $\log\delta \to -\infty$ при $\delta \to 0+$, то, возможно, существует предел

$$d_c = -\lim_{\delta\to 0} \frac{\log N(\delta)}{\log \delta},$$

называемый ёмкостью множества (capacity). Обычно на практике этот предел существует. Если значение $N(\delta)$ увеличивается с убыванием δ как δ^{-d}, то d и есть ёмкость множества. Поскольку при определении размерности d_H используются всевозможные покрытия множества, в отличие от определения размерности d_c, где фигурируют кубики одного размера, то выполняется соотношение $d_H \le d_c$.

Фрактальная ёмкость

При определении емкости фрактальных множеств d_c часто используют ещё одно упрощение. Пусть на некотором этапе покрытия фрактала пришлось использовать $N(\delta)$ элементов характерного размера δ, а на ином $N(\delta')$ элементов размера δ'. Вследствие фрактального подобия фрагментов

$$N(\delta) \sim 1/\delta^d \quad \text{и} \quad N(\delta') \sim \left(\frac{1}{\delta'}\right)^d,$$

или

$$\frac{N(\delta)}{N(\delta')} \sim \left(\frac{\delta'}{\delta'}\right)^d.$$

Отсюда значение емкости принимает вид:

$$d_c = \frac{\ln \dfrac{N(\delta)}{N(\delta')}}{\ln \dfrac{\delta'}{\delta'}}.$$

Это отношение, строго говоря, справедливо для регулярных, самоподобных фракталов. Пусть на n-м шаге построения фрактала имеем такие параметры покрытия: $N(\delta)$ и δ, а на $(n + 1)$-м шаге соответственно: $N(\delta')$ и δ'. Тогда отношение $N(\delta) / N(\delta') = 1/p$ определяет число p, которое характеризует, каким количеством элементов δ' на каждом шаге заменяет элемент δ, а отношение $\delta/\delta' = q$ $(q > 1)$ показывает, во сколько раз уменьшается элемент покрытия. Параметр $r = 1/q$ $(r < 1)$ принято называть коэффициентом подобия. Таким образом, получаем такую формулу для емкости:

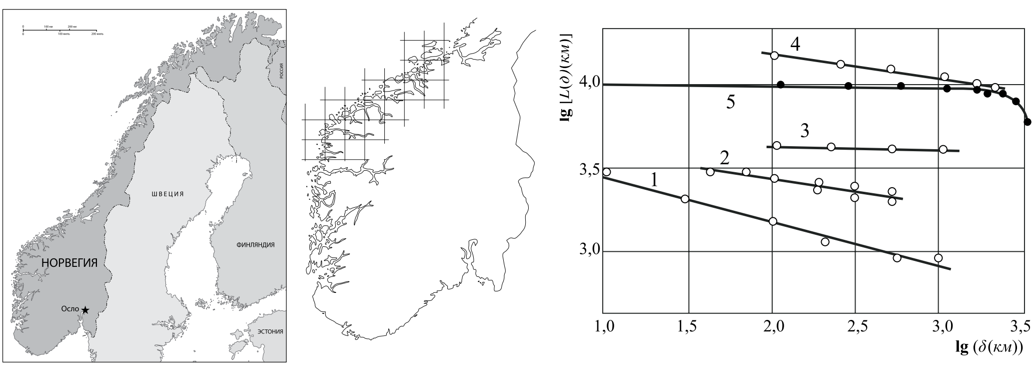
$$d_c = \frac{\ln p}{\ln q} = \frac{\ln p}{\ln \frac{1}{r}} = -\frac{\ln p}{\ln r}.$$

Для регулярных самоподобных фракталов ёмкость d_c и размерность Хаусдорфа–Безиковича d_H совпадают всегда, для прочих фракталов — часто. Поэтому их обыкновенно не различают и говорят просто о фрактальной размерности объекта $d = d_c = d_H$.

Техника расчёта фрактальной размерности

Приближение $d = d_c = d_H$ положено в основу техники расчёта фрактальной размерности. Типовая операция состоит в построении графика зависимости log $N(\delta)$ от log δ в некотором интервале величины δ. Полученные точки при известном масштабе часто образуют отрезок прямой, угол наклона которой равен d. Например, рассмотрим береговую линию на карте Норвегии (рис. 5, *а*). Длина ($d_T = 1$) побережья Норвегии бесконечна, площадь ($d_T = 2$) побережья равна нулю. Между тем, определенная методом палетки (рис. 5, *б*), фрактальная размерность для побережья Норвегии равна $d = 1{,}52$ (рис. 5, *в*). Аналогично, фрактальная размерность для западного побережья Великобритании равна 1,25 и для сравнительно гладкого южного побережья Африки — почти единица (рис. 5, *в*).

Эта техника имеет прежде всего то ограничение, что не позволяет предсказать форму, соответствующую той или иной размерности. Дело в том, что фрактальная размерность есть величина никоим образом не связанная с геометрическими пропорциями фрактальных фрагментов и параметрами, задающими фрактальную функцию. Фрактальная размерность ортогональна и форме, и функции. Именно поэтому она связывает форму и функцию в одно, сохраняя отличия между ними, оставаясь вне формы, вне функции. В этом смысле фрактальная размерность есть улыбка без кота.



а) *б)* *в)*

Рис. 5. Определение фрактальной размерности береговой линии Норвегии:

а) методом палетки[43] (квадратная сетка имеет шаг $S = 50$ км, $d = 1{,}52$); *б)* распределение размерностей береговых линий различных побережий[44]; *в)*: 1 — Британии ($d = 1{,}25$), 2 — Германии (1900 г.) ($d = 1{,}15$), 3 — Южной Африки ($d = 1{,}02$), 4 — Австралии ($d = 1{,}13$), 5 — окружность

1.1.3. Фрактальный повтор: “rebirth of iteration theory”[45]

Где повторение, там и магия. Фракталы — странные объекты, взглянув на которые, трудно отвести взгляд. Эта магическая и странным образом притягивающая красота основана на однообразии и едва заметном искажении — на псевдо- и самоподобии. При этом сама операция повторяется в точности, но вот форма фрактала искажается при сдвиге по шкале масштаба, симулируя эффект deja vu[46]. Мы видим другой фрактал, но нас не покидает ощущение, что мы его уже видели. Сама операция построения фрактала дискретна, дискретно и ее возможное искажение — на один шаг, на одну петлю обратного влияния, на одну революцию. Шкала масштабов, напротив, непрерывна и здесь неизбежно едва заметное соскальзывание, которое создает магический эффект невозможности повторения.

Прежде всего, «то, что повторяется, имело место, иначе нельзя было бы и повторить, но именно то обстоятельство, что это уже было, придает повторению новизну»[47]. Всякое повторение производит едва уловимое различие, дифференциал, исчезающе малую деформацию, которая никогда не равна нулю. В отсутствии пусть самого тонкого различия развиваются метастазы — чрезмерный избыток одних и тех же клеток — наступает покой и смерть.

Древние с надеждой и тревогой наблюдали, как реальность повторяет себя не вполне. Мы сколько угодно раз входим в реку, — учил Гераклит, — река неповторима. Таково «ограничение Гераклита», запрещающее точный повтор и вечное возвращение. В отличие от неповторимых фрагментов предметного пространства, в операционном пространстве точный повтор операции — итерация — обычное дело. Даже рождение и смерть — рутина. Явления неповторимы, повторяются операции.

Сёрен Керкегор в «Опыте экспериментальной психологии Константина Констанция»[48] анатомировал эффект повторения. Он отделил, пусть ещё смутно, повторение предметного от повторения операционного. Он пишет: «Я на личном опыте убедился, что повторения вообще не бывает». Повторения «того, что имело место в действительности» не бывает потому уже, что окружающая обстановка в момент повторения действия «является искаженным повторением прежней». Ведь даже если окружение прежнее, то сам действующий субъект успел исказиться тем, что он намерен осуществить повтор. Однако далее Керкегор замечает: «остается все-таки непреложным, что при упорстве в привычках и притуплении наблюдательности можно достичь такого однообразия в своем обиходе, которое обладает более одурманивающею силой и которое с течением времени приобретает над человеком все большую и большую власть, уподобляясь формуле заклинания». Заклинание, молитва, ритуал выходят на передний план, создавая магию повторения. И Керкегор, в качестве иллюстрации, приводит библейскую притчу об Иове.

Иов[49] был «непорочен, справедлив и богобоязнен и удалялся от зла», а по своему богатству «был знаменитее всех сынов Востока». У него было семь сыновей и три дочери, составлявшие счастливое семейство. Этому счастью позавидовал сатана и перед лицом Бога стал утверждать, что Иов праведен и богобоязнен только благодаря своему земному счастью, с потерей которого исчезнет и все его благочестие. Чтобы изобличить эту ложь, Бог позволил Иову испытать все бедствия земной жизни.

Сатана лишает его всего богатства, всех слуг и всех детей, а когда и это не поколебало Иова, то сатана поразил его тело страшною проказой. Болезнь лишила его права пребывания в городе: он должен был удалиться за его пределы и там, скобля струпья на своем теле черепком, сидел в пепле и навозе. Все отвернулись от него; даже жена его презрительно отзывалась о результатах его благочестия. Но Иов ни одним словом не проявил жалобы на свое положение. Друзья его Елифаз, Вилдад и Софар семь дней молча оплакивали его страдания; наконец они стали утешать его, уверяя, что Бог справедлив, и если он страдает теперь, то страдает за какие-нибудь согрешения свои, в которых должен покаяться. Всякое страдание есть возмездие за какую-нибудь неправду. Хотя истинная причина постигших Иова бедствий оставалась для него непостижимой, но он верил в правду Божию и, чувствуя собственную правоту перед Богом, победил именно своей безграничной верой. Сатана потерпел поражение; Бог исцелил Иова от проказы и обогатил его вдвое против прежнего. У него опять родились семь сыновей и три дочери, и он опять сделался патриархом счастливой семьи. «И умер Иов в старости, насыщенный днями». Таким образом, упорное повторение богоугодно и вознаграждено.

Камю видит нечто подобное, в эссе «Миф о Сизифе»[50], он описывает «абсурдного героя» — Сизифа, осуждённого вкатывать камень на вершину горы и прекрасно знающего, что камень скатится назад и что надо будет начинать всё сначала. И всё же Камю видел нечто ободряющее и обнадёживающее в способности Сизифа выражать свободную волю, бороться с непреодолимыми препятствиями и утверждать свой выбор, «даже занимаясь абсурдным трудом в равнодушной Вселенной». Сизиф — утверждает Камю — одерживает победу.

Тонкое отличие между повторением результата и повтором операции в арифметическом смысле сводится к различию между тождеством и равенством. Число может быть только тождественно себе: $3 \equiv 3$ (идея всегда одна и та же и не повторяется). Равенство, например, такое как уравнение $x + y - R = 0$ предполагает множество решений, связанных между собой параметром R — инвариантом. Здесь повторяется оператор расчета, но не результаты расчета.

Тождество декларирует слияние, равенство декларирует связность. Связность решений может быть линейной, но и нелинейной тоже. Например, параметрическое уравнение окружности $x^2 + y^2 - R^2 = 0$ нелинейно. С математической точки зрения нелинейность[51] есть состояние при котором определенному решению $y = y_0$ соответствует множество значений переменных $x = \{x_1, x_2, \dots x_n\}$. Нелинейность — необходимое условие повторений. Керкегор замечал нечто подобное. Он писал: «Факт остается фактом: один и тот же фарс может произвести самое различное впечатление; воздействие фарса зависит от творчества самих зрителей»[52]. Это наблюдение отсылает к повторению оператора — к итерации.

В первоначальном смысле итерация и есть повторение. Всякое ремесло есть точный повтор операции. Но только многочисленные повторения творят реальность. Ремесло споспешествует творению. Бенедиктинцы не видели отличий между ремеслом и медитацией, видели в них одно — многократный повтор — итерацию.

Итерация реализуется по начальному шаблону или от достигнутого результата:

- итерации по шаблону: каждый шаг отсылает к начальному условию — референция;
- итерация от результата: каждый шаг создает начальное условие — рекурсия.

Почти триста лет тому назад Исаак Ньютон и Готфрид Лейбниц разработали операцию дифференциального исчисления, основанную на принципе обратной связи: дифференциальное описание определяет положение и скорость частицы в данный момент времени через их значения в предыдущий момент. Итерацию от результата поясним примером. Альберт Жирар (Albert Girard) ещё в 1634 г. представил ряд Фибоначчи в форме рекурсивной функции: $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... В этом процессе функция многократно применяется к себе самой. Здесь нет референции к исходному числу, каждое число, едва возникнув, становится начальным. Здесь мы видим формирование странной петли посредством не возвращения, но обозначения, назначения начального значения: сам факт повтора придает повторению новизну. Итерация производит начальное условие на каждом шаге и реализуется с опорой на начальное условие предыдущего шага.

Итерация — основа фрактальной геометрии. Регулярные фракталы строятся путём повторения простых операций. Самые разнообразные алгоритмы при этом могут производить одну и ту же форму. Проиллюстрируем это на примере фрактала — салфетки Серпинского.

Метод вырезания терм

Начинаем с равностороннего треугольника, и удаляем перевернутый центральный равносторонний треугольник со стороной, равной половине длины стороны исходного треугольника. У нас остаются три равносторонних треугольника со сторонами, вдвое меньшими стороны исходного треугольника. Повторяя эту операцию над оставшимися (не перевернутыми) треугольниками, мы получаем после n итераций $N = 3^n$ треугольников со сторонами $r = r_o(2^{-n})$. При повторении данной операции появляется фрактал Серпинского (рис. 1).

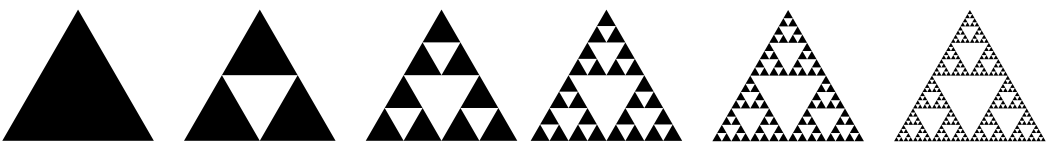


Рис. 1. Построение салфетки Серпинского по методу вырезания трем: оператор трема-генератор

Линейный алгоритм[54]

Поместим равносторонний треугольник, со стороной для определённости единичной длины, на комплексную плоскость $= x + iy$ так, как показано на рисунке слева (рис. 2). Один из трёх операторов t_1, t_2, t_3 переводит исходный равносторонний треугольник в подобный

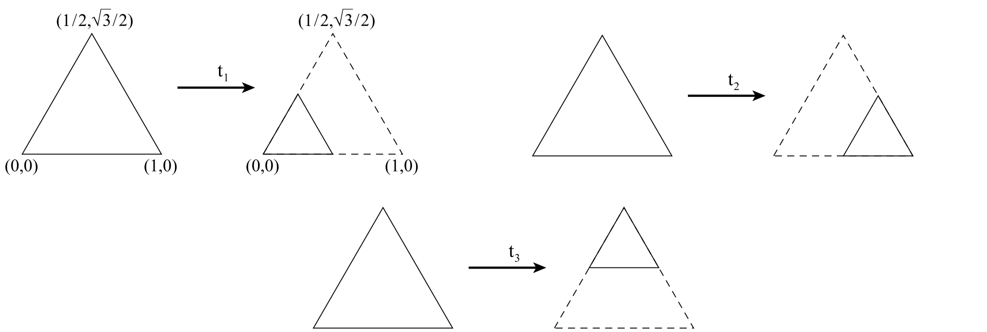


Рис. 2. Три линейных преобразования первого поколения. Схема преобразования t_1 (в скобках приведены декартовы координаты вершин), t_2, t_3

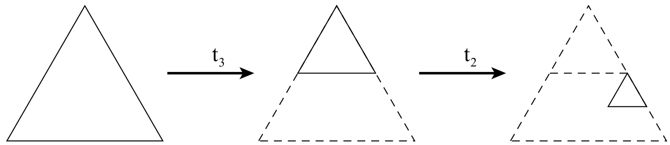


Рис. 3. Линейное преобразование второго поколения.

ему, но в два раза меньшего размера.

Второй шаг повторяет первый со сдвигом масштаба (рис. 3).

В пределе, после многочисленных итераций форма фигуры — салфетки Серпинского — проступает отчетливо и ясно.

Операторы, описанные выше геометрически, могут быть заданы алгебраически следующим образом:

t_1	t_2	t_3
сжатие в два раза	сдвиг на 1/2 стороны	перемещение на 1/4+ i√3/4
$f_1(z)=\frac{1}{2}z$	$f_2(z)=\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}$	$f_3(z)=\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

Метод FASS[55]

Салфетку Серпинского можно построить с помощью генератора формы на отрезке прямой (рис. 4). Здесь салфетка Серпинского построена посредством так называемой FASS–линии, которая, следуя простому правилу, заполняет пространство, себя повторяя, с собой не пересекаясь, себя не касаясь.

Метод L-систем

Метод *L*-систем в 1968 г. разработал Аристид Линденмайер[56]. Биолог по образованию, Линденмайер предложил метод описания сложных природных объектов и процессов с помощью простых составляющих и некоторых правил их преобразования. При этом он использовал определенную формальную грамматику, опирающуюся на правила генерации и преобразования символов[57]. При помощи L-систем можно сохранить сложное изображение, запомнив только аксиому и образующие правила. Результат такого процесса строго детерминирован алгоритмом, но предсказать форму, которую произведет алгоритм, можно единственным образом — пройти весь путь построения терпеливо шаг за шагом. Но с ростом числа шагов быстро растет и длина управляющей строки и, следовательно, время выполнения программы. Судите сами,

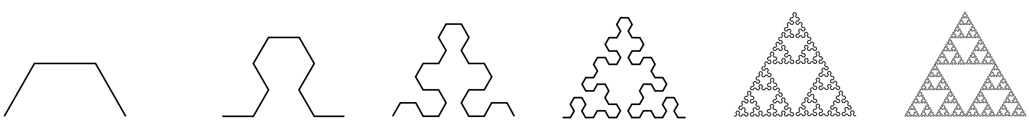


Рис. 4. Построение салфетки Серпинского с помощью генератора формы на отрезке прямой. Шаг 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9

алгоритм построения салфетки Серпинского методом *L*- систем содержит небольшое количество символов:

аксиома: FXF−−FF−−FF
правила: F → FF
x → −−FXF++FXF++FXF−−
угол β = 360/6 = 60°.

Но вот в процессе его реализации число символов возрастает лавинообразно:

На 0 шаге: FXF−−FF−−FF
На 1 шаге: FF −−FXF++FXF++FXF−− FF −− FF FF −− FF FF...
И это только первый шаг!

Метод систем итерированных функций (СИФ) — Метод Барнсли[58]

Пусть z_0 — начальная точка (произвольная). Возьмём равносторонний треугольник с вершинами в точках $A = (0,0)$, $C = (1,0)$, $B\ (1/2, \sqrt{3}/2)$. Выберем внутри этого треугольника произвольным образом начальную точку z_0. Бросим теперь игральную кость, представляющую собой кубик, на шести гранях которого проставлены буквы *A*, *B* и *C*. Пусть каждая буква присутствует на двух гранях, тогда вероятность выпадения любой буквы одинакова и равна 1/3. Если выпала буква *A*, то соединим мысленно начальную точку z_0 с вершиной треугольника *A* отрезком прямой и на его середине поставим точку. Если выпала буква *B*, то аналогично поставим точку на середине отрезка, соединяющего точки z_0 и *B*. Если выпала *C*, то поставим точку на середине отрезка между точками z_0 и *C*. Назовём новую точку z_1. Повторяя описанную процедуру, получаем последовательность точек $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$, каждая из которых находится на полпути до случайно выбранной вершины (рис. 5).

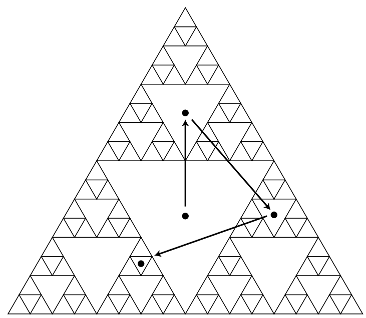


Рис. 5. Последовательность точек z_0, z_1, z_2, z_3, ... , каждая из которых находится на полпути до случайно выбранной вершины

Отбросим несколько начальных точек последовательности, например, первые 100. Невероятно, но факт — по мере увеличения числа точек все явственнее видна структура треугольника Серпинского (рис. 6). Видно, что, хотя каждый раз выбор вершины треугольника происходит чисто случайным образом, возникающее множество точек на плоскости отнюдь не случайно и обладает ярко выраженной фрактальной структурой. Ковер Серпинского являет собой аттрактор для такого процесса.

Итерация поглощает случайность

Присмотримся внимательно к этому странному механизму. Будем следить за траекторией (орбитой) точки в процессе случайных итераций. Траектория эта сколь угодно близко подходит к каждой точке ковра Серпинского. При этом траектория точки может не совпадать с точками ковра Серпинского, более того, вообще может

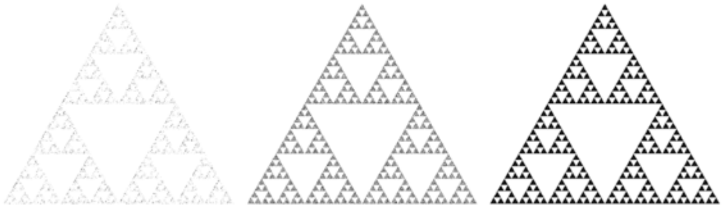


Рис. 6. Схема построения салфетки Серпинского методом случайных итераций Барнсли. Слева направо 10^3, 10^4, $3 \cdot 10^4$ итераций

не иметь с ней ни одной общей точки. Даже если точка z_0 максимально отстранена от точек множества ковра Серпинского, траектория сходится к своему аттрактору (ковру Серпинского) весьма быстро, потому что коэффициент подобия равен 1/2, что меньше 1: уже после небольшого числа итераций точка попадает в исключенный треугольник столь малого размера, что его для всех практических целей можно считать точечным. Так, после 10 итераций размер этого маленького треугольника составляет $2^{-10} \approx 10^{-3}$ размера исходного треугольника, а после примерно 30 итераций становится сравнимым с размером атома.

Рассмотренные выше примеры показывают, как совершенно разные операторы (алгоритмы) формируют один и тот же фрактальный образ. Форма есть производная формул, но и обратное верно, коль скоро форма представляет собой фрактал.

Гастон Жюлиа страшился использовать форму и образ, предпочтя исследовать только операцию: $z_{n+1} \to z_n^{\ 2} + C$. Его монография объемом почти 200 страниц без единого рисунка декларирует, что операция — вне наблюдаемого плана реальности, обзору ad oculus ортогональна. Николя Бурбаки[59] ещё пытался уберечь мир от обольщения образами, но тщетно. Едва появившись на мониторах компьютеров, первые изображения фракталов соблазнили мир причудливостью форм и фрагментов, каждый из которых отчасти подобен любому другому, но всегда другой, разный, непредсказуемый и предопределенный в любом ракурсе, при любом масштабе.

Мандельброт уже не был привержен идее превосходства функции над формой и потому относился к форме внимательно. Он видел, как один и тот же оператор создает разнообразные формы. Множество Мандельброта представляет собой частный случай множества Жюлиа при условии $z_o = 0$. Повторение операции $z \to C^2$ производит ряд:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 0\\
z_1 &= C\\
z_2 &= C^2 + C\\
z_3 &= (C^2 + C)^2 + C\\
z_4 &= ((C^2 + C)^2 + C)^2 + C \text{ и т. д.}
\end{aligned}
$$

Рассмотренный ранее оператор ограничения определяет цвет точки на комплексной плоскости $C = x + iy$. Результат превосходит ожидания. Взгляд в глубины фрактала Мандельброта приносит сюрпризы. Система только приблизительно повторяет свои элементы — крошечные, похожие на жучков объекты, отделявшиеся от основной формы.

Однако, чем более увеличивалось изображение, тем менее фрагменты повторяют друг друга. Появляются новые формы, похожие на коньков или на вьющиеся ветви оранжерейных растений. Фактически ни один фрагмент системы точно не походит на другой при любом увеличении. Для построения каталога всех элементов, составляющих это множество, не хватит целой вечности (см. цветную вкладку 1): «Вселенная фрактала — вселенная бесконечная» [59].

Операторы, как видим, способны генерировать формы и создавать кластеры форм, отличающихся друг от друга при изменении масштаба. Такой слаженный коллаж форм есть следствие того, что одну и ту же форму можно выразить различными алгоритмами, операторами, формулами.

Таким образом, одна и та же форма может быть поставлена в соответствие множеству формул, а любая формула может быть поставлена в соответствие множеству форм. Это ставит форму в один ряд с формулой, предметное следует признать равноправным функциональному. Наличие двух равных оснований — формы и формулы — приводит к фрактализации, к подчинению тому, что единит предметное и операционное и что им ортогонально, — инварианту (фрактальная размерность), числу, символу.

1.2. СТРАННАЯ ПЕТЛЯ

О Вечный Свет, который лишь собой
Излит и постижим и, постигая,
Постигнутый, лелеет образ свой!
Данте Алигьери[61]

Мы мыслим мир, который мыслит нас! Это референция себя на себе, автореференция — полный переворот в воздухе без опоры, salto mortale. Анатомируя этот опасный трюк, обнаруживаем две элементарные операции — рефлексию и рекурсию.

Рефлексия, повторяясь многократно, выделяет образ из хаоса. Хаос не способствует, но и не препятствует пронизывающим его рефлексиям провоцировать отражение отображения и следом отражение отображенного отражения. Едва вступив на этот путь, уже не остановиться. Здесь петли обратного влияния возникают легко и свободно — без трения. Здесь рефлексии симулируют рефлексии и в атмосфере фикций ничто не фиктивно. Здесь всё погружено в рефлективное варево. Со своей территории рефлексия жалит, опыляет и разнообразит действительное.

Выделение образа из хаоса (алеаторной массы) посредством рефлексий превосходно моделируют отражающие поверхности — зеркала. Два зеркала способны производить несчетные отражения отражений, вложенные друг в друга. Рефлексия, уводя в зазеркалье, к зеркалу же и возвращает. Среди зеркал люди улыбаются всё больше и больше, всё реже друг другу, чаще сами себе. Зеркало возвращает своему окружению его собственный образ и тем обеспечивает отстраненность внутреннего мира — индивидуальность, уникальность, сингулярность. Объект оказался самим зеркалом, глядя в которое субъект хватается за собственные иллюзии. Занавес поднят. Сцена освещена. Объект лишён тени, он то ли прозрачен, то ли призрачен. И всё-таки его образ — вот он — перед нами (рис. 1).

Едва только показалось, что рефлективный образ можно «ухватить пальцами», как всё радикально переменилось. С появлением витрины, монитора, плазмы образы настигли и захватили друг друга, не заслоняя всю сеть отражений: «всё сообщается, но так, что два взгляда никогда не пересекаются»[62]. Рефракция[63], сопутствующая рефлексии, полностью вышла из тени и тут же рассеялась[64] радужной феерией света и цвета. Открылся «Новый Свет» — пространство манипуляций идеями и образами,

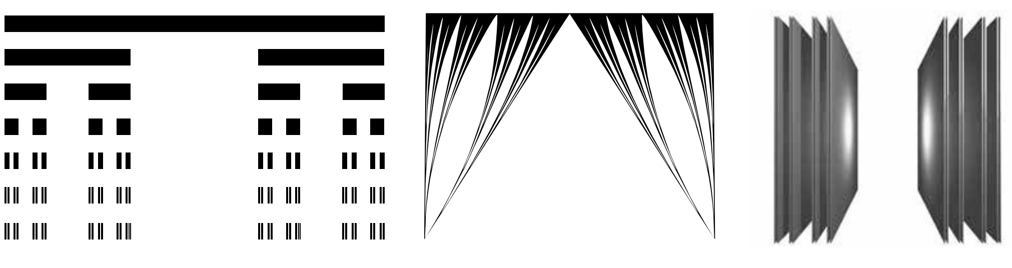


Рис. 1 Фрактал Кантора (*а*), занавес Кантора (*б*) и фрагмент фрактала Кантора, иллюстрирующий эффект отражение себя на себя в себе

фактами и фикциями — операционное пространство, ортогональное пространству действия — действительности.

В новом (операционном) пространстве мы обнаруживаем диктатуру рекурсии — оператора вложенности функции (процедуры) в самой функции (простая рекурсия) или вложенности через другие функции (сложная рекурсия): например, функция *A* вызывает функцию *B*, а функция *B* — функцию *A*. При очевидном подобии, между операторами рефлексии и рекурсии есть тонкое отличие. Рефлексия есть повторение формы — образа, имевшего место быть. Рекурсия есть повторение функции — того, что по-настоящему сбывается. Сёрен Керкегор[65] в этом хорошо разобрался. Он отличал повторение того, что имело место в действительности, от повторения как «восстановления прежнего состояния» (redintegratio in statum pristinum, *лат.*), прежнего желания, прежнего намерения в новых условиях.

В этом суть дела. Начальные значения на каждом такте рекурсивного повторения различны[66], что и отличает рекурсию от рефлексии. Если рефлексия и допускает искажение исходного образа, то только под влиянием внешних факторов (рефракция и дисперсия). Рекурсия производит сдвиг по своей внутренней логике так, что рефлективное вечное возвращение от себя к себе сменяется блужданием, volvere[67], evolvere[68], эволюцией в исходном смысле этого слова: evolutio — развёртывание, раскрытие. Противостоя диссипации, «жизнь не может устоять перед влечением к странному аттрактору»[69]. Эволюция есть именно движение в поле странного аттрактора, который словно помпа, переводит микроскопический сдвиг в макроскопический процесс. Филигранно точный механизм этого перевода хорошо иллюстрирует движение вдоль траектории на фрактале, которая петляет без пересечений и касаний среди несчётных аттракторов и репеллеров. Малейшая флуктуация радикальным образом изменяет траекторию. Внутренний алгоритм эволюции при этом не изменился, вся совокупность потенциальных траекторий сохранилась — фрактал остался прежним, но едва различимый сдвиг траектории отклоняет её в поле нового аттрактора и сама траектория становится радикально иной. В этих условиях горизонт предсказания событий не просто ограничен, но между настоящим и будущим просто нет детерминированной связи. Детерминированная связь, однако, сохраняется между прошлым и настоящим. При таком положении дел эпидемия рефлексий (ожиданий, прогнозов, намерений) способна произвести сдвиг траектории эволюции, и тут же сам вирус эпидемии рефлексий мутирует — изменяются ожидания, прогнозы, намерения. Такое перманентное salto mortale и есть modus operandi настоящего.

1.2.1. Salto mortale[72]

Однажды Чжуану Чжоу приснилось, что он — бабочка. Он наслаждался от души и не осознавал, что он — Чжоу. Но вдруг он проснулся... Проснувшись, Чжоу не мог понять: снилось ли Чжоу, что он — бабочка, или бабочке снится, что она — Чжоу...

Чжуан-цзы[73]

Гладко отполированные поверхности соблазняют. Среди образов, искажений, иллюзий на тусклой изогнутой поверхности различимо только то, что волнует кровь, манит и тревожит. Прорицатели посредством ритуала и фимиама создавали атмосферу, избавленную от силы тяжести и от инерции, в которой эмоция, галлюцинация, образ производят цель. Отполированное до блеска медное зеркало герцога Бирона и сегодня отражает призраки Зимнего дворца из того времени, когда «спокойная роскошная, озабоченная только призраками, отражениями жизни, Петербургская светская жизнь шла»[74] в отстранении от реальной жизни огромной страны, но именно благодаря этой отстраненности деформировала жизнь огромной страны.

Сегодня всё тоже и даже более того — виртуальное, сближаясь с действительным, производит гиперреальное. Быть может, манифест гиперреальности всего сильнее звучит в Нью Йорке. Нью Йорк — Мекка художников, артистов, маргиналов не засыпает с наступлением ночи. Когда сгущаются сумерки, реклама становится ярче, её образы — чётче. В эпицентре рекламной феерии, на Times Square светодиодные панно, многократно отраженные от стеклянных стен, окружающих небоскребов, искажаются, преломляются, и создают то пульсирующее варево, в котором можно найти любой образ приятный или пугающий воображение. В этой атмосфере мечта, желание, предчувствие легко и естественно реализуются в образах. И вот в двух шагах от Times Square, феерические фантазии на бродвейских подмостках продолжают стимулировать воображение. И журналы пишут: «Когда солнце клонится к закату, ярчайшие звёзды восходят на Бродвейские стены, великие и малые, элегантные и маргинальные»[75].Фикции, отраженный и сыгранные, формируют желания, стремления и цели, которые, искажаясь, в конце концов, реализуются.

В статье «Поведение, цель и телеология»[76], опубликованной в 1943 г., Норбер Винер, Жюлиан Бигелоу и Артуро Розенблют открыли неожиданное: техника целенаправленного поведения системы сводится к рефлексиям при их многократном повторении.

Пример Винера

Придуманный Винером «пример с рулевым» — один из простейших примеров петли обратной связи. Когда лодка отклоняется от установленного курса, скажем вправо, рулевой оценивает отклонение, а затем осуществляет противодействие, поворачивая руль влево. Это уменьшает отклонение лодки и даже может привести к отклонению влево. В некоторый момент, в ходе движения, рулевой производит новую оценку отклонения лодки, осуществляет новое противодействие, снова оценивает отклонение и т. д. — навигация посредством итерации, путем последовательного приближения, повтора.

Типовая схема петли обратной связи (рис. 1) может быть смоделирована системой, состоящей из телемонитора и видеокамеры.

Видеокамера фиксирует изображение на телемониторе и передает его обратно на телемонитор (рис. 2). Контролируются яркость, контрастность и прочие характеристики монитора, но также фокус, направление и расстояние от камеры до монитора. Скорость процесса — примерно 30 циклов в секунду.

Если камера охватывает весь монитор, то возникает эффект отражения «монитор в мониторе», подобное отражению зеркального образа в зеркале. Если камера охватывает лишь фрагмент монитора, то фрагмент увеличивается и умножается до бесконечности. В случае, когда камера и монитор установлены так, что образ на мониторе воспринимается камерой в соотношении примерно 1:1, происходит самое неожиданное. На мониторе возникают странные, замысловатые узоры при изменении единственного контролируемого параметра — угла наклона камеры к монитору (рис. 3). Картины, которые теперь появляются на мониторе, непредсказуемы. В них трансформируется множество эффектов: сдвиг при сканировании образа с монитора, деформация образа в камере, память и задержка электрических сигналов и прочие. В любом случае простая машина с петлей обратной связи демонстрирует появление очень сложных и запутанных форм.

Упростим задачу и рассмотрим одношаговую петлю обратной связи без контролируемых параметров (рис. 4).

Пусть оператор преобразования $x_{n+1} = f(x_n)$ сводится к умножению произвольно выбранного числа на самое себя. При выборе числа больше единицы ($\alpha = x_0 > 1$), например 10, ряд чисел устремится к бесконечности: 10, 100, 10000... При выборе чисел меньше единицы ($\alpha = x_0 < 1$), например 1/2, числовой ряд стремится к нулю: 1/2, 1/4, 1/16... При выборе единицы ($\alpha = x_0 = 1$), мы получим лишь множество единиц ($x_n = 1$). Подобным образом ведет себя микрофон. Если звук, усиленный громкоговорителем, превышает порог чувствительности микрофона ($\alpha > 1$), то система

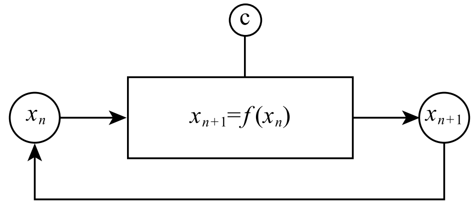
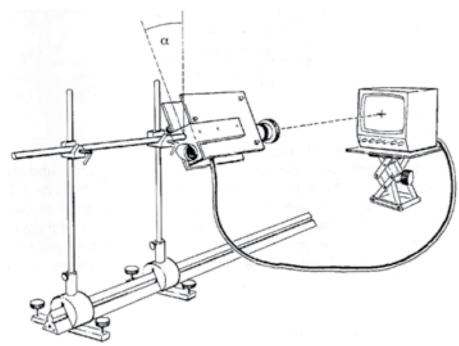
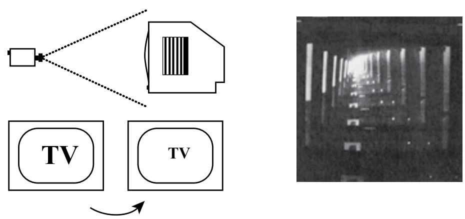


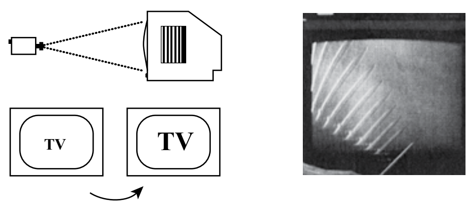
Рис. 1. Схема петли обратной связи. X — переменный параметр, C — контролируемый параметр



а)



б)



в)

Рис. 2. Схема видеопетли обратной связи (*а*) и результаты опыта при конфигурации «монитор внутри монитора» (*б*) и «монитор поглощает монитор» (*в*)[75]

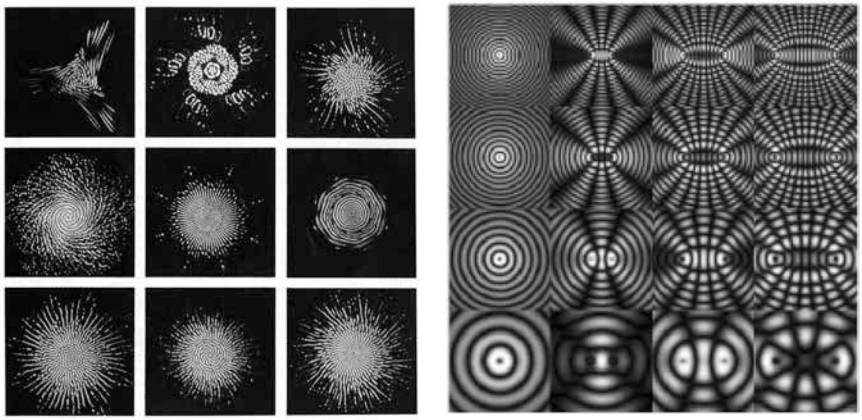


Рис. 3. Эффект смещения угла при отношении образа на мониторе и на камере примерно 1:1.
Здесь в зависимости от угла наклона камеры прослеживаются образы различной периодичности. Двигаясь от правого верхнего снимка к левому нижнему, мы наблюдаем периоды 3, 5, 5, 5, 8, 8, 11, более 11

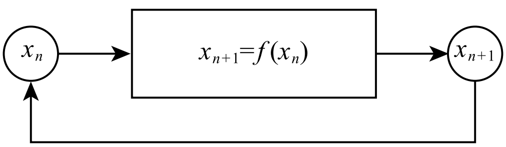


Рис. 4. Одношаговая петля обратной связи

микрофон–громкоговоритель породит бесконечные, еще более громкие отклики. Если звуки относительно слабы ($\alpha < 1$), они просто затухнут. Если система микрофон–громкоговоритель работает в нормальном (номинальном) режиме ($\alpha = 1$), то голос, усиленный системой, похож на естественный голос говорящего. Таким образом, обратная связь может быть усиливающей сигнал (положительной), стабилизирующей (отрицательной) или нейтральной.

Положительная обратная связь

Положительная обратная связь не только дестабилизирует status quo ante fuit[76], но и обеспечивает переход к новому режиму устойчивого функционирования. Система теряет устойчивость, когда скорость обратной связи в ней возрастает и начинает превышать скорость внутренних процессов. Возникает эффект самоорганизации: параметры порядка отобранные ad hoc (по случаю), заняв командные высоты, устанавливают новый порядок, организуют «симбиоз» частей системы, их согласованное поведение. Происходящее впоследствии, таким образом, являет причину происходящего в настоящем.

Отрицательная обратная связь

Отрицательная обратная связь обеспечивает сохранение памяти о начальных условиях. Все последующие состояния системы игнорируются, стираются полностью. Флуктуации, порожденные слабым взаимодействием системы с соседями, гасятся, не влияя на развитие самой системы. Сильное столкновение ломает установившиеся связи, порождает новую систему, которая, в свою очередь, обречена помнить потрясение, систему изменившее. Объекты, однажды вступившие в сильное взаимодействие друг с другом, навсегда «скованы одной цепью», их больше нельзя считать независимыми. И даже параметры порядка, отобранные по случаю, — часть «круговой поруки».

Нейтральная обратная связь

Нейтральная обратная связь создает эффект едва заметных отклонений — рефракций. Рассмотрим оператор последовательных приближений, открытый более 4000 лет тому назад для вычисления квадратного корня числа 2 ($\sqrt{2}$):

$$x = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть $x_0 = 2$, тогда

$$x_1 = \frac{1}{2}\,(2 + \frac{2}{2}) = 1{,}5.$$

И далее:

$$x_2 = \frac{1}{2}\,(1{,}5 + \frac{1}{1{,}5}) = 1{,}41666\ldots$$

Выбрав произвольно положительное значение x_0 мы довольно быстро приближаемся к корню из двух, оказываясь чуть больше или чуть меньше его точного значения. Подобным образом термостат регулирует температуру в доме: любое ее повышение сверх определенного уровня ведет к охлаждению, а за снижением следует нагрев. При этом точное значение заданной температуры, быть может, никогда не установится.

Состояние притяжения (аттрактор) может находиться вне множества реализаций, даже в поле, ортогональном реализации, оставаясь при этом реальнее реального. Для иллюстрации рассмотрим задачу о кроликах Фибоначчи — двухшаговую петлю обратной связи (рис. 5).

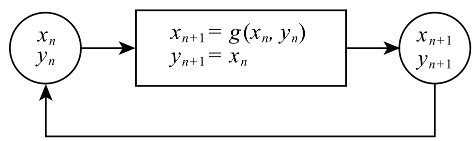


Рис. 5. Двухшаговая петля обратной связи содержит две переменные: $g(x_n, x_n - 1) = x_n + x_n - 1$

Леонардо Пизано, известный также как Фибоначчи, прославился трактатом «Liber Abaci», который изменил интеллектуальный ландшафт Европы в XIII в. Фибоначчи ввел арабское исчисление и среди прочего привел задачу о размножении кроликов. Пусть пара кроликов рождена в момент времени $t = 0$. Спустя месяц эта пара взрослеет и рождает потомство — ещё двух кроликов. Процесс продолжается: каждый месяц пара взрослых кроликов производит пару кроликов и так ad infinitum. Предполагается, что кролики не умирают. Какова численность популяции кроликов через n месяцев?

Проследим эволюцию популяции кроликов шаг за шагом. Прежде всего, будем различать крольчат J_n и взрослых кроликов A_n по прошествии n месяцев. Вначале ($n = 0$) мы имели только одну пару крольчат: $J_0 = 1$, $A_0 = 0$. Спустя месяц крольчата стали кроликами: $J_1 = 0$, $A_1 = 1$. Спустя два месяца кролики родили двух крольчат: $J_2 = 1$, $A_2 = 1$. Ещё месяц спустя крольчата второго поколения выросли: $J_3 = 1$, $A_3 = 2$. Мы видим общее правило: число крольчат J_{n+1} равно популяции кроликов A_n. Таким образом, мы имеем систему уравнений:

$$J_{n+1} = A_n;$$

$$A_{n+1} = A_n + J_n.$$

Подстановка первого уравнения во второе дает:

$$A_{n+1} = A_n + A_{n-1}$$

Пусть исходные значения $J_0 = 1$ и $A_0 = 0$. При этом $A_1 = 1$. В результате мы получаем последовательность:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,..

Заметим, что для определения значения величины требуется знать два предыдущих её значения. Мы вступили на путь хранения информации не только об исходном состоянии системы, но и на последующих этапах её эволюции. Это путь цивилизации — пошаговая память и её применение.

Даже простейший пример — двухшаговая петля Фибоначчи — создает строй, иерархию, порядок, за которым стоит код — золотая пропорция (proportio divina) — отношение последующего значения ряда Фибоначчи к предыдущему при $n \to \infty$:

1,6180339887498948820...

Этот код есть число, значение которого — вне множества чисел Фибоначчи, вне алгебры операций, оно им ортогонально. Код форматирует иерархию, геометрия которой была хорошо известна древним как тетрактис[77], в Средние века — как зеркало четырёх элементов, в новое время — как треугольник Паскаля: каждое число равно сумме двух чисел, расположенных над ним справа и слева:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

В новейшей интерпретации эта иерархия воплощена фракталом Серпинского (рис. 6).

Мы рассмотрели алгебраические интерпретации петель обратной связи (рекурсию). Далее рассмотрим их геометрические интерпретации (рефлексию).

Петля: умножение отражений

Свеча, помещенная между двух зеркал, отражает себя, бесчисленными повторениями уводя в бесконечность. Эта петля умножает отражения, но не искажает образ ($\alpha = 1$): отражение, себя отражающее, а затем отражающие отражения своих отражений, а затем отражения отражений своих отражений, и так до бесконечности, вернее, насколько хватит глаз. На картине Яна ван Эйка зеркало, быть может, единственный свидетель у четы Арнольфини, но свидетельства более представительного и представить трудно (рис. 7).

Петля: искажение образа — диффузия, свёртывание, рефракция (деформация)

Диффузия. Есть петли обратные ($\alpha > 1$), которые образ увеличивают, развертывают, уводят на бесконечность, распыляют, рассеивают, дробят образ. (рис. 8)

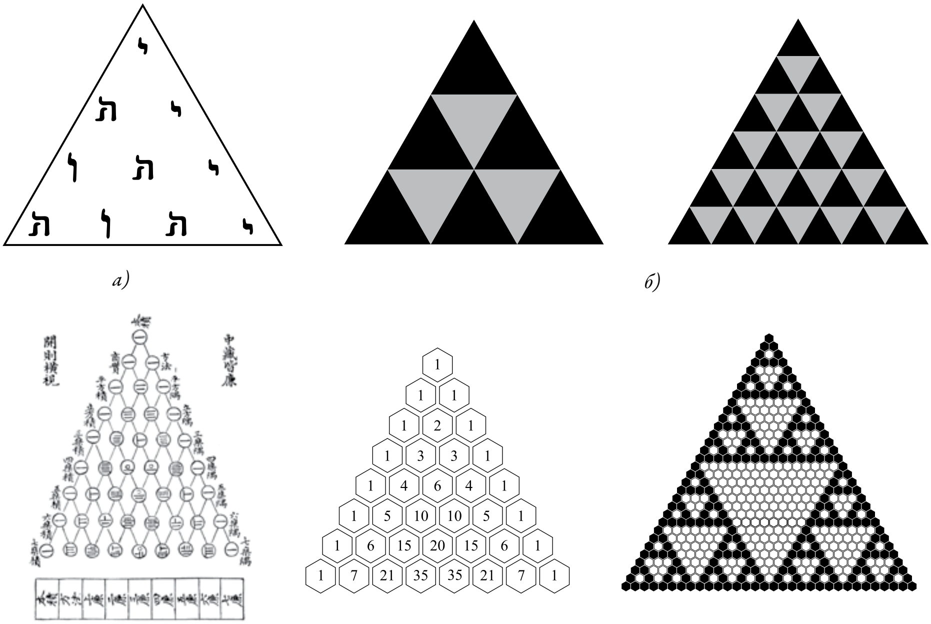


Рис. 6. Тетраксис Пифагора (*а*) и фрагменты его построения (*б*): центральная точка равноудалена от точек, образующих равносторонний треугольник тетрады; продолжив построение из любой точки, получаем потенциально бесконечную сетку, в которую вписано бесконечное множество равносторонних треугольников; *в*) «Зеркало четырех элементов», Ху Шайчи, Китай, 1303 г.; *г)* Треугольник Блёза Паскаля (1623–1662);. *д*) Фрактал Серпинского

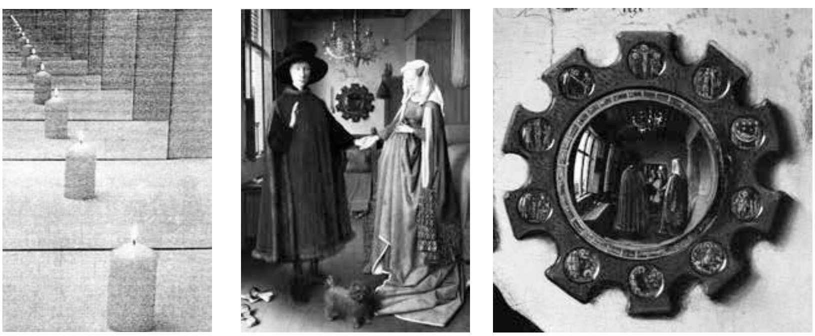


Рис. 7. Длинный ряд свечей. Самоподобие, порождаемое двумя параллельными зеркалами[78] (*а*);
Ян ван Эйк «Портрет четы Арнольфини» (1434) (*б*) и фрагмент с зеркалом (*в*).
Национальная Галерея, Лондон.

Свёртывание. Есть петли, которые свертывают образ ($\alpha < 1$). Отраженный, образ уменьшается, упрощается, популяризируется. Простой образ теряет свой масштаб, свою меру, свою плотность — обращается в точку, в идею, в манифест (рис. 9).

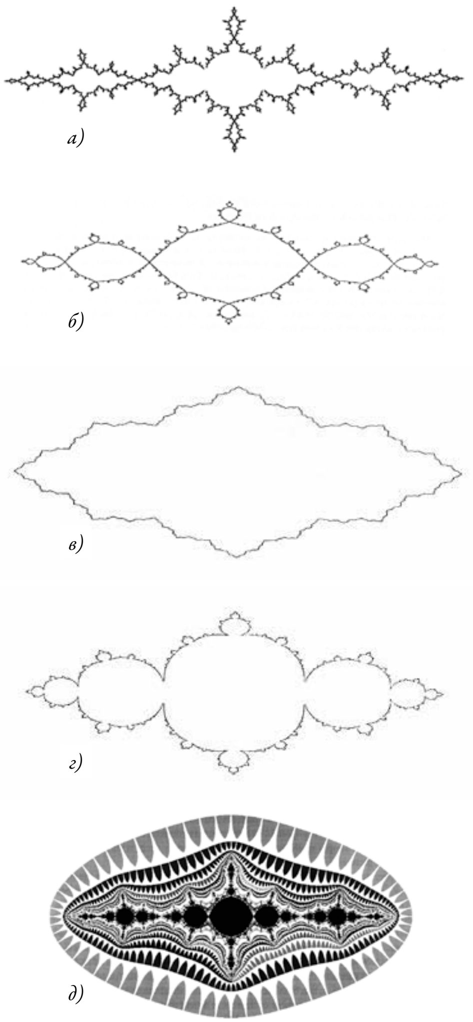


Рис. 8. Отображение Жюлиа в процессе распыляющего IFS преобразования[79]

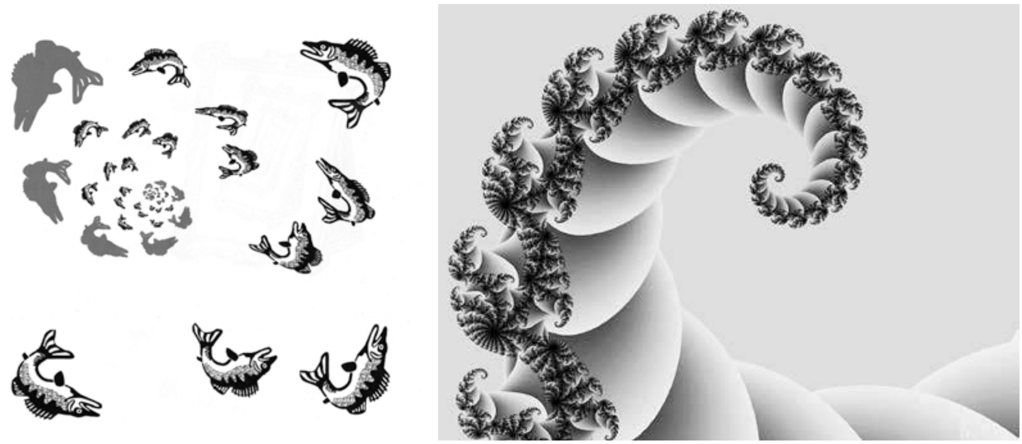
Рефракция (деформация). Есть петли, которые искажают образ вследствие рефракции, сдвига, деформации. Подобно тому, как эхо отсылает обратно несколько размытый, обрезанный или обрубленный звук, искажая его первоначальный смысл, отражение предлагает взгляду сдвиг, при котором объект и его отражение невозможно наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали. Между объектом и отражением проскальзывает несхожесть[80] (рис. 10). У Борхеса есть притча о народе, который был изгнан, вытолкнут по другую сторону зеркала и который в результате стал лишь отражением покорившего его императора. Постепенно изгнанный народ становится все менее и менее похожим на своего поработителя, и однажды возвращается по эту сторону зеркальности — тот же совсем иной народ.

Таким образом, умножение отражений (рекурсия) и искажение отражений (рефракция) создают атмосферу, в которой возможна деформация и даже реверс, и всё же исключено восстановление прежнего состояния, благодаря чему реализуется уклонение от смертоносного вируса.

Петля обратной связи: реверс и вирус

Реверс. Критский философ Эпименид был автором бессмертного суждения: «все критяне — лжецы». Если мы представим, что это суждение истинно, то тут же увидим, что мы ошиблись и на самом деле суждение ложно. Точно так же из предпосылки ложности этого суждения вытекает, что оно должно быть истинным. Парадокс Эпименида выворачивает образ наизнанку и вновь возвращает его. Дракон, кусающий себя за хвост, — древний символ петли, которая трансформирует противоположное в противоположное ($\alpha = -1$). Изнанка, реверс разрушают уклад, обольщают, путают карты. Операция, суть которой заключается в превращении внутреннего во внешнее, искажает, извращает, разрушает сходство, трансформирует образ в его противоположность и обратно.

Герой и дракон древних мифов суть противоположности, но, лишь отведав драконьей крови, с драконом сливаясь, герой начинает понимать «язык птиц»[82]. Реверс является необходимым условием и следствием всякого бокового взгляда, самого себя застигающего врасплох.



а) *б)*

Рис. 9. Фрактальные фрагменты Барнсли (*а*) и Мандельброта (*б*)

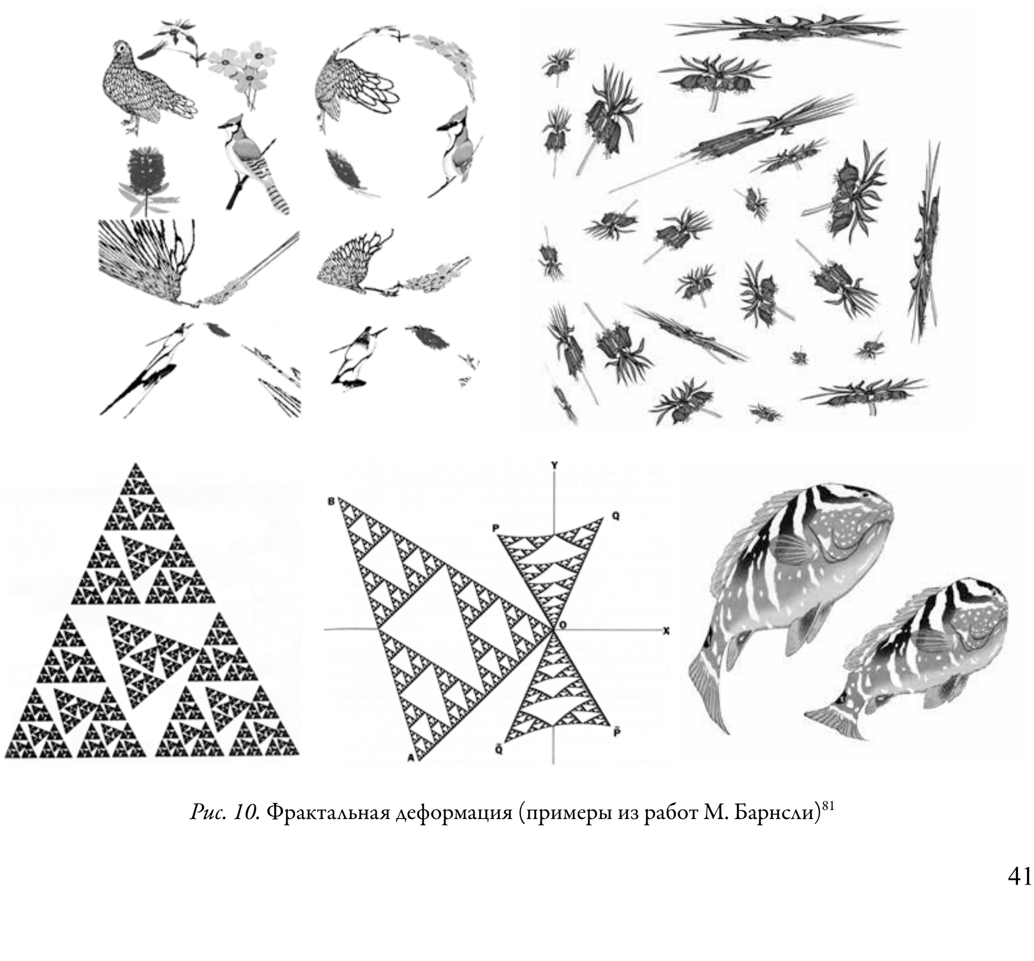


Рис. 10. Фрактальная деформация (примеры из работ М. Барнсли)[81]

Отображение себя на себя по необходимости связано посредством инварианта — себя самого. Реверс есть следствие и признак сингулярности. Реверс ведет от Себя — к Другому и обратно. «Другой — это то, что позволяет мне не повторяться до бесконечности»[83]. Реверс по определению производит деформацию. В отсутствие деформации развивается вирус.

Вирус. Реверсу противостоит только вирус. Повторение порождает однообразие, массовое производство, ксерокопирование — патологию, ведущую к гибели, — вирус. Вирус, умножая одни и те же клетки, тем самым убивает организм. «Отсутствие изменений порождает другое, неуловимое, но абсолютное изменение, которое и являет собой вирус. Тот, в чьей жизни не происходит изменений, погибает от этого...»[84]. Вирус не позволяет остановиться, вернутся к началу, создает заграждение при обращении движения к истоку — petitio principi[85], заставляет реальность уклонятся от самой себя, тем только и обеспечивая вечное блуждание. Вирус отклоняет возвращение, оставляя единственное и последнее — воскрешение — то, что только «начинает быть начинать быть начинать».

Петля: самозаглатывание

Оператор реверса, ограниченный вирусом, порождает среди прочих траектории странные, которые не исчезают у предельной черты и не возвращаются к исходному образу, но такие, которые, почти обратив исходный образ в точку или уведя его за горизонт наблюдений, вдруг возвращают изумлённому наблюдателю образ несколько измененный — тот же. Для описания этого странного феномена Хофштадтер ввел термин «странная петля» в своей книге «Гёдель, Эшер, Бах» [86].

Эшер. Эшер исследовал зеркальное умножения отражений: картина в картине ($\alpha = 1$), угасающее отражение ($\alpha < 1$), возрастающее отражение ($\alpha > 1$). Но в «Магическом зеркале» и «Метаморфозах» он открыл для себя новый путь распространения пространства — вложенность, которая повторяет саму себя на нескольких планах реальности. Один из планов легко узнается как обыкновенный, за ним — несколько фантастический план. Сама картина, возможно, содержит только эти два плана; однако их игра приглашает зрителя увидеть самого себя как часть еще одного плана. Сделав этот шаг, вы околдованы возможностью бесконечной последовательности планов, вложенных между пределами. Такая ситуация сама по себе является достаточно удивительной и соблазняющей. Итерация без возвращения, повторяемость без повтора — странность.

Ремесло вело Эшера от полифонии форм, планов, уровней к их сингулярности, единству и единичности. Еще в «Метаморфозах» движение по кругу, по петле имеет столько начал, сколько может вообразить изощренный зритель, но в «Рисующих руках» вы вправе выбрать только одно из двух, а в «Галерее гравюр» выбора нет: начало и конец, первый и последний, альфа и омега — одно. Стяжение всех планов в один, и — естественно и неизбежно — создатель каждого и любого из всех возможных планов — один, вне планов, на ином уровне реальности (рис. 12).

Бах. Странность эта причудливым образом проявилась в музыке. Один из канонов «Музыкального приношения» Баха («Canon per *T*onos» — «Тональный канон») сконструирован таким образом, что его кажущийся финал неожиданно плавно переходит в начало, но со сдвигом тональности. Эти последовательные модуляции уводят слушателя все выше и выше от начальной тональности. Однако, чудесным образом, после шести модуляций мы почти возвращаемся. Все голоса теперь звучат ровно на октаву выше, чем в начале. Странность в том только, что, поднимаясь по уровням некой иерархии, мы неожиданно обнаруживаем себя почти на том же месте, откуда начали свой путь, — возвращение без повтора. На этом месте можно прервать пьесу, быть может, Бах именно это и намеревался сделать, но, может статься, что Бах упивался возможностью продолжать этот процесс бесконечно, следуя «бесконечно поднимающемуся канону». Может быть, поэтому он и написал на полях: «Пусть Королевская слава возрастает подобно этой модуляции»[87].

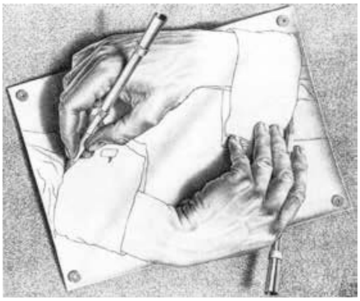
а)

б)

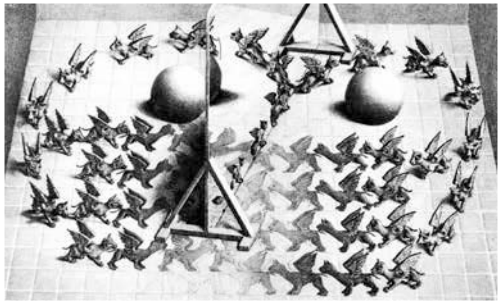
Рис. 11. Змея у Оуробору, кусающая свой хвост. Из иллюстраций к сочинениям Гораполлона (*а*); «Дракон» М. Эшера (1952, гравюра на доске) (*б*)

Гёдель. Курт Гёдель открыл странные петли в теории чисел, одной из самых древних и освоенных областей математики. Теорема Гёделя впервые увидела свет как «Теорема VI» в его статье 1931 г. «О формально неразрешимых суждениях» в «Principle. Mathematica». Теорема утверждает следующее: «все непротиворечивые аксиоматические формулировки теории чисел содержат неразрешимые суждения». Суждения теории чисел не говорят ничего про суждения теории чисел; они не более как суждения теории чисел. Здесь есть петля, но нет странности. Странная петля спрятана в доказательстве.

Для доказательства Гёдель предложил простое построение. Выбрав произвольно суждение теории чисел (последовательность символов), Гёдель присваивает ему номер — код. В этом коде, обычно именуемом Гёделевой нумерацией, символы и последовательности символов обозначаются числами. В дальнейшем, для ссылки на данное суждение, используется соответствующий Гёделев номер. Теперь множество суждений теории чисел включает суждения о суждениях теории чисел. Сделав этот шаг, не устоять перед соблазном продолжить суждения о суждениях относительно суждений теории чисел и так до бесконечности, до абсурда. Здесь обнаруживается неограниченность. Ограниченное число вполне заурядных ограниченных множеств создает пространство неограниченного разнообразия, поле для неограниченного блуждания. Любое множество суждений теории чисел

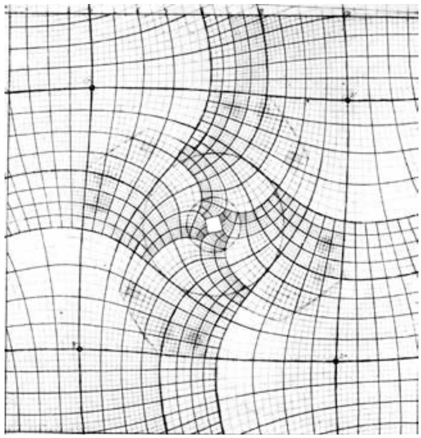


а)



б)

в)

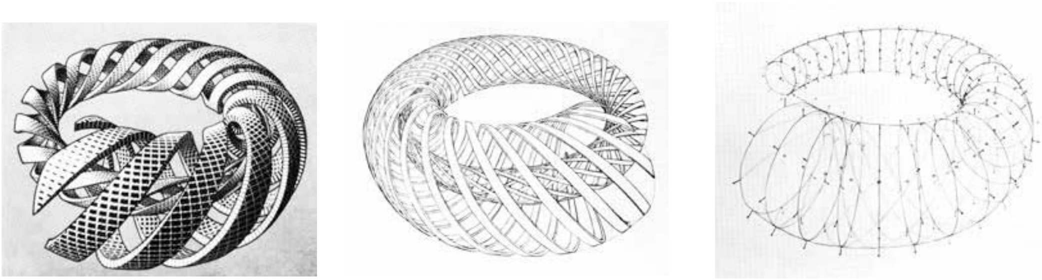


г)

Рис. 12. М. Эшер:
а) «Рисующие руки» (1948); *б)* «Магическое зеркало» (1946, литография) 28 × 44,5 см.; *в)* «Галерея гравюр» (литография); *г)* эскизы (1956) для выставки гравюр (литография)

о теории чисел вполне заурядное, т. е. являет собой полифонию суждений. Множество суждений о суждениях теории чисел также заурядное. Любое множество суждений следующего уровня — заурядное множество. При этом множество всех множеств суждений есть множество странное — самозаглатывающее[88]. Приметой и дефиницией его служит сдвиг определяющих параметров порядка. Для иллюстрации теоремы Гёделя Хофштадтер привел метафору патефона.

На патефон ставится пластинка. Звук, создаваемый патефоном, неожиданно попадает в резонанс с конструкцией патефона и разрушает его. Итак есть два тесно связанных изоморфизма, создающие эффект бумеранга: (1) от звуковых дорожек пластинки — к звуку, полученному при помощи патефона и (2) от от звука — к вибрации патефона. Таким образом, теорема Геделя утверждает, что система не может понять свое собственное устройство, если не поднимется на следующий уровень: для любого патефона существуют такие пластинки, которые нельзя на нем проигрывать.



а) б) в)

Рис. 13. М. Эшер «Спирали»[89] (1953):
а) торцовая гравюра (две доски), 27 × 33,5 см; *б)* эскиз (1953,31 × 43 см); *в)* эскиз (1953,28 × 42,5 см)

Итак, самозаглатывание есть путь неограниченного, неповторимого блуждания вдоль траектории, которая никогда себя не повторяет, но и не уводит в бесконечность. Ровно так, как на гравюре Эшера «Спирали» (рис. 13).

Странная петля эта, будучи ограниченной (сингулярность), еще и проницаема настолько, что любой и каждый фрагмент отражает все фрагменты, создавая эффект рефлексии целого в себе самом (автореференция). Траектория петли нигде не пересекается, себя не касается, не прекращается. Она словно скользит в поле геометрически строго организованных аттракторов и репеллеров единого фрактального образования — проницаемого, прозрачного и призрачного.

1.2.2. Странный аттрактор

Суть в том, что жизнь не может устоять перед влечением к странному аттрактору.

Жан Бодрийяр «Прозрачность зла»

Соблазн сильнее расчёта. Символы, различимые прежде гадательно, обрели арифметическую определенность. «Пусть люди как угодно назовут это нечто, прокладывающее себе дорогу, пусть странным аттрактором, — нам не уйти от этой экспоненциальной траектории, от эффектов, не поддающихся измерению»[90]. «При исследовании того, как простое относится к сложному, мы выбираем в качестве путеводной нити понятие аттрактора, т. е. конечного состояния или хода эволюции диссипативной системы»[91].

Аттракторами (*англ.* to attract — притягивать) называют точки или замкнутые линии, притягивающие к себе все возможные траектории поведения системы. Феномен определен следующим образом:

- Аттрактор устойчив. В долгосрочной перспективе единственными моделями поведения становятся сами аттракторы. Все иные типы движения преходящи.
- Аттрактор — это пространственно-временной объект, который охватывает весь процесс, не являясь причиной, не являясь следствием.

- Аттрактор формируется только системами с ограниченным числом степеней свободы.

Формальное определение аттрактора

Пусть имеется некоторая конечная (или бесконечная) область G_1, которая включает в себя область G_0. Области G_0 и G_1 удовлетворяют следующим условиям:

Для любых начальных условий $x(t_0)$ из области G_1 при $t \to \infty$ (или при $n \to \infty$ для систем с дискретным временем) все фазовые траектории рано или поздно достигают области G_0.

Если фазовая траектория принадлежит области G_0 в момент времени $t = t_1$ ($n = n_1$), то она будет принадлежать G_0 всегда, т. е. для любых $t > t_1$, ($n > n_1$) фазовая траектория будет находиться в области G_0.

Если эти условия выполняются, то область G_0 называется аттрактором динамической системы. Область G_1 называется областью (или бассейном) притяжения аттрактора G_0.

Типовые аттракторы представляют собой точку, круг, тор и фрактал. В последнем случае аттрактор называется странным. Проиллюстрируем природу аттракторов на примерах.

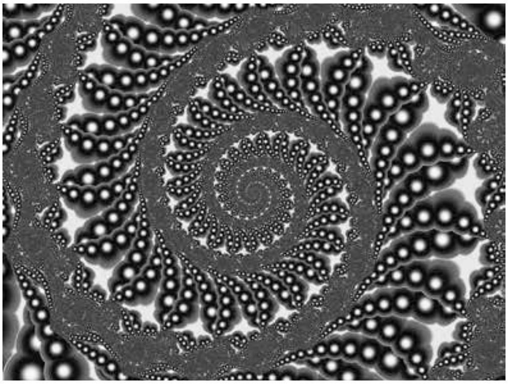
Точечный аттрактор

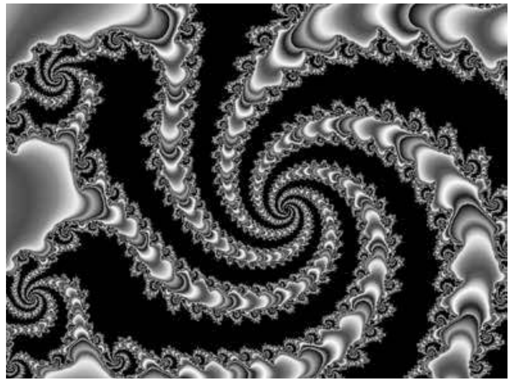
По определению аттрактора любое равновесное (устойчивое, статическое) состояние системы соответствует точечному аттрактору (рис. 1). Все дороги ведут в Рим. Так ведет себя маятник: при любой начальной скорости и при любом начальном положении по истечении достаточного времени под действием трения маятник останавливается. Это положение равновесия и есть точечный аттрактор. На рынке это монополия в условиях очень стабильной экономики. В геометрической интерпретации это седловая точка. В человеческом поведении это фиксация на одном желании. Вот простейший способ привнести порядок в хаос[92]: покупайте только черные носки своего размера; тогда любая пара носок, взятых по утру, будет черной (пусть не идентичные, носки сохранят порядок по параметру цвета).

Круговой аттрактор

Круговой аттрактор всегда отражает наличие крайностей, между которыми система колеблется. Круговой аттрактор, будучи основан на двух пределах, порождает устойчивое динамическое состояние — цикл.

Идеальный маятник (без трения) колеблется до бесконечности, его траектория в фазовом пространстве — окружность. Сильно неравновесная диссипативная структура — химические часы — эволюционирует к устойчивому периодическому режиму. В экономике «Coca-Cola» конкурирует с «Pepsi» по кругу. Еще пример — круговой коридор цен: высокие рыночные цены на зерно осенью этого года вызовут увеличение посевных площадей следующей весной, что, в свою очередь, приведет к увеличению урожая зерна и снижению цены в будущем году. Затем фермеры уменьшат посевные площади и т. д. Одна деятельность неуклонно ведет к другой в повторяющемся порядке, как за светом дня следует темнота ночи. Кости, брошенные на мексиканское сомбреро, лягут во впадине, образованной загнутыми вверх полями. Точки возможного распределения брошенной на сомбреро игральной кости образуют окружность — всё тот же круговой аттрактор (рис. 2).





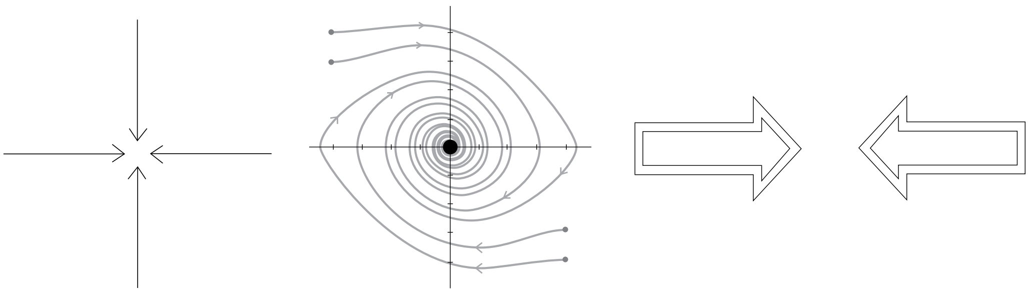


Рис. 1. Точечный аттрактор

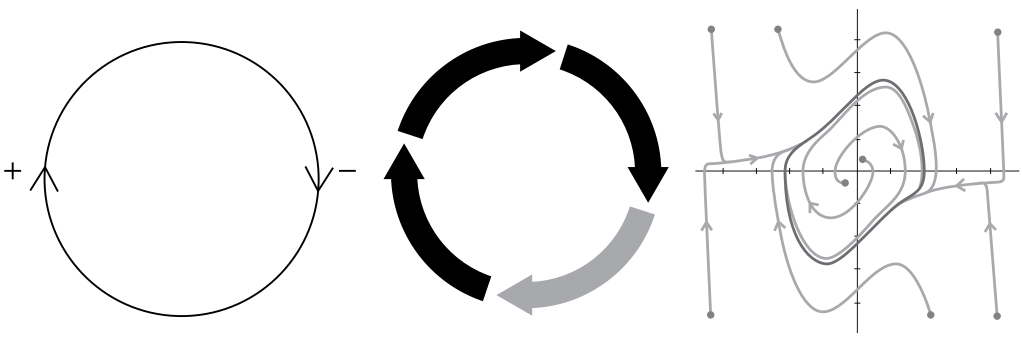


Рис. 2. Круговой аттрактор

Тороидальный аттрактор

В известном масштабе наблюдения сезоны года, приливы и отливы ведут себя циклически. Однако, присмотревшись, видим, что ход весны изменяется год от года, следуя циклу в несколько лет. Суперпозицию двух циклов описывает тороидальный аттрактор — тор, на котором траектория процесса образует спиралевидные дуги, возвращаясь сама к себе, завершив полный оборот. Основная характеристика такого процесса — это циклическое