Умаров Х.Г.

Полугруппы операторов и точные решения задач анизотропной фильтрации

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.986.7+532.546
ББК 22.162
У 52

Умаров Х. Г. **Полугруппы операторов и точные решения задач анизотропной фильтрации.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 216 с. — ISBN 978-5-9221-1134-8.

В монографии найдены в явном виде решения уравнения неустановившейся фильтрации в анизотропном трещиновато-пористом пласте.

В качестве вспомогательного материала изложены основы теории сильно непрерывных полугрупп линейных операторов в банаховых пространствах и теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых средах.

Предназначена студентам, аспирантам и преподавателям математических факультетов вузов, а также специалистам, занимающимся задачами нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых средах.

УМАРОВ Хасан Галсанович

ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *И.В. Шутов*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 28.09.09. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 14,9. Тираж 350 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

ISBN 978-5-9221-1134-8

Отпечатано в ГУП
«ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

9 785922 111348

ISBN 978-5-9221-1134-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография представляет собой расширенный вариант курса лекций, прочитанных автором в течение ряда лет студентам математического факультета Чеченского госуниверситета.

При выборе предмета читаемого спецкурса автор ставил своей целью, с одной стороны, обучить студентов современным методам функционального анализа, а с другой стороны, вызвать интерес студентов к этому курсу, связав его с региональными особенностями нефтяной республики (хотя, конечно, проблемы, связанные, например, с захоронением вредных промышленных отходов и защитой водоносных горизонтов от загрязнения и засоления, в которых рассматриваются фильтрационные процессы, подобные происходящим в нефтяных пластах, представляют общегосударственный интерес).

Монография состоит из двух частей. Часть I является вводной и представляет собой классический материал, заимствованный из различных учебников и монографий по функциональному анализу, в частности, по теориям полугрупп линейных сильно непрерывных операторов и линейным дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве, а также по теории подземной гидродинамики. Часть II — оригинальный материал, основанный на результатах по анизотропной фильтрации, полученных автором. Подготовленный читатель может сразу переходить ко второй части, к тому же для удобства читателя этой категории во введении ко второй части, на основании минимальных сведений из теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых и слоисто-неоднородных средах, формулируются рассматриваемые задачи фильтрации в изотропных и анизотропных нефтяных пластах.

Теория сильно непрерывных полугрупп линейных операторов, действующих в банаховом пространстве — один из методов функционального анализа, который сам может составлять основу спецкурса для студентов математического факультета. В предлагаемой монографии основные свойства сильно непрерывной полугруппы и ее производящего оператора приведены с доказательствами в гл. 1 части I. Для более углубленного знакомства с теорией полугрупп операторов и ее приложениями к линейным дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве мы рекомендуем монографии [1–4]. В гл. 2 части I включены сведения из теории подземной гидродинамики, необходимые для понимания основного материала. За более подробной информацией мы отсылаем читателя к учебникам по функциональному анализу [5–7] и по теории подземной гидрогазодинамики [8–10]. Список литературы не претендует на полноту, поскольку невозможно перечислить в таком издании даже все основные публикации по теории линейных сильно непрерывных полугрупп операторов, по линейным дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве и по теории нестационарной фильтрации в трещиновато-пористых средах. Поэтому автор ограничился в ссылках только теми книгами, которые, по его мнению, более доступны и предоставляют читателям материал для детального изучения и осмысления рассматриваемых проблем.

Часть II монографии состоит из трех глав, в которых последовательно рассматриваются задача Коши для уравнения фильтрации в изотропных и анизотропных трещиновато-пористых и слоисто-неоднородных пространствах, начально-краевая задача в анизотропном трещиновато-пористом полупространстве и начально-краевая задача в анизотропном трещиновато-пористом пространственном слое. В каждом случае сначала строится, а затем решается абстрактный аналог рассматриваемой задачи в произвольном банаховом пространстве. После этого, конкретизируя банахово пространство и действующие в нем операторы — коэффициенты уравнения — и применяя представления для используемых сильно непрерывных полугрупп операторов, из решения абстрактной задачи и оценки его нормы можно получить в явном виде решение рассматриваемой анизотропной задачи фильтрации и его оценку.

Кроме перечисленных начально-краевых задач, исследуется задача без начальных данных в анизотропном трещиновато-пористом полупространстве, при этом процесс фильтрации полагается длящимся столь долго, что влияние начального условия уже несущественно.

В монографии принята сквозная нумерация глав и тройная нумерация формул, а также теорем и других утверждений, в которой первая цифра указывает на номер главы, вторая — на номер параграфа и третья — на номер формулы в данном параграфе.

Х.Г. Умаров

Часть I

ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ И НЕФТЯНЫЕ ЗАЛЕЖИ

Глава 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

§ 1. Постановка задачи Коши, порождающей полугруппу операторов

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение задачи Коши для линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = ay, \tag{1.1.1}$$

$$y(0) = y_0, \tag{1.1.2}$$

где a и y_0 — заданные числа, существует, единственно и дается формулой

$$y = e^{at} y_0 \equiv \exp(at)\, y_0. \tag{1.1.3}$$

С другой стороны, из курса математического анализа [11, т. I, гл. II, § 4, п. 75] известно, что экспонента $e^{at} \equiv \exp(at)$ есть единственное решение функционального уравнения

$$f(t+\tau) = f(t) \cdot f(\tau) \tag{1.1.4}$$

с начальным условием

$$f(0) = 1 \tag{1.1.5}$$

в классе непрерывных функций.

Соотношения (1.1.1)–(1.1.5) достаточно легко переносятся на конечномерный случай. Систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{array}{l} y_1'(t) = a_{11} y_1(t) + a_{12} y_2(t) + \ldots + a_{1n} y_n(t)\,, \\ y_2'(t) = a_{21} y_1(t) + a_{22} y_2(t) + \ldots + a_{2n} y_n(t)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n'(t) = a_{n1} y_1(t) + a_{n2} y_2(t) + \ldots + a_{nn} y_n(t) \end{array}\right\}$$

запишем в матричном виде

$$y'(t) = \mathscr{A} y(t)\,, \tag{1.1.6}$$

где $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Для системы (1.1.6) задача Коши состоит в нахождении решения $y = y\,(t)$, удовлетворяющего начальному условию

$$y\,(0) = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix} = y_0. \tag{1.1.7}$$

Решение задачи Коши (1.1.6), (1.1.7) дается формулой

$$y\,(t) = \exp\,(t\mathscr{A})\,y_0, \tag{1.1.8}$$

где матричнозначная экспоненциальная функция $\exp\,(t\mathscr{A})$ определяется разложением в ряд:

$$\exp\,(t\mathscr{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathscr{A}^k. \tag{1.1.9}$$

Матричнозначная экспоненциальная функция (1.1.9) удовлетворяет функциональному уравнению (1.1.4) с заменой (1.1.5) на условие

$$f\,(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. в этом случае $f\,(0)$ — единичная (тождественная) матрица.

Обобщение задачи Коши (1.1.6), (1.1.7) на бесконечномерный случай, когда для аналога дифференциального уравнения (1.1.6) коэффициент $\mathscr{A}$ есть неограниченный оператор A, приводит к понятию *полугруппы операторов — операторнозначной экспоненты*, с помощью которой строится аналог решения (1.1.8) соответствующей задачи Коши.

Пусть E — банахово пространство [1]). Рассмотрим в E обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u'\,(t) = Au\,(t)\,, \quad t > 0, \tag{1.1.10}$$

где A — линейный замкнутый оператор с плотной в E областью определения $\mathscr{D}\,(A)$, имеющий регулярную точку, т. е. имеющий непустое

[1]) В рассматриваемых нами приложениях чаще всего E — пространство функций $m + n$ переменных: m параметрических «временны́х» переменных и n «пространственных» переменных. Функция только «пространственных» переменных является элементом — точкой банахова пространства E.

резольвентное множество $\rho(A)$. Здесь производная $u'(t)$ — предел при $\Delta t \to 0$ разностного отношения

$$\frac{1}{\Delta t}\left[u(t+\Delta t) - u(t)\right]$$

в смысле сходимости в банаховом пространстве E; оператор A постоянен, т. е. не зависит от переменной t.

Решением уравнения (1.1.10) на отрезке $[0, t_0]$ называется дифференцируемая абстрактная вектор-функция $u(t)$, $t \in [0, t_0]$, принимающая значения из $\mathscr{D}(A)$ и обращающая уравнение (1.1.10) в тождество:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left\|(\Delta t)^{-1}\left[u(t+\Delta t) - u(t)\right] - Au(t)\right\| = 0, \quad \forall\, t \in [0, t_0].$$

Под *задачей Коши* для дифференциального уравнения (1.1.10) понимают, как и в классическом случае, задачу нахождения решения уравнения (1.1.10), удовлетворяющего начальному условию

$$u(0) = u_0 \in \mathscr{D}(A). \tag{1.1.11}$$

Задача Коши называется *корректной* на конечном отрезке $[0, t_0]$, если:

1) для любого начального данного $u_0 \in \mathscr{D}(A)$ существует ее единственное решение $u = u(t)$, $t \in [0, t_0]$;

2) это решение в каждой точке отрезка $[0, t_0]$ непрерывно зависит от начальных данных, а именно, из $\mathscr{D}(A) \ni u_{0,k} \to 0$, $k \to \infty$, для соответствующих решений $u_k = u_k(t)$ следует $u_k \to 0$, $k \to \infty$, при каждом $t \in [0, t_0]$.

В силу постоянства оператора A из корректности задачи Коши (1.1.10), (1.1.11) на конечном отрезке $[0, t_0]$ следует ее корректность на всей полуоси $[0, +\infty[$.

Если задача Коши корректно поставлена, то решение $u = u(t)$, для каждого фиксированного $t > 0$, можно рассматривать как значение — образ, полученный преобразованием (отображением) начального данного u_0. Оператор $\mathscr{U}(t)$, ставящий в соответствие начальному данному u_0 задачи Коши значение решения $u = u(t)$ в момент времени t, определен на линейном многообразии $\mathscr{D}(A) \subset E$, линеен (в силу линейности задачи) и ограничен. Так как $\overline{\mathscr{D}(A)} = E$, то оператор $\mathscr{U}(t)$ допускает продолжение без увеличения нормы (по непрерывности) до линейного ограниченного оператора $U(t)$, определенного на всем пространстве E.

Из корректности задачи Коши следует, что решение в момент времени $t + s > 0$ может быть получено двумя способами:

1) как решение $\mathscr{U}(t+s)\, u_0$ задачи Коши с начальным условием u_0;

2) как решение $\mathscr{U}(t)\,[\mathscr{U}(s)\, u_0]$ в момент времени $t > 0$ с начальным условием $\mathscr{U}(s)\, u_0$:

$$\mathscr{U}(t+s)\, u_0 = \mathscr{U}(t)\,[\mathscr{U}(s)\, u_0], \quad t, s > 0, \quad u_0 \in \mathscr{D}(A). \tag{1.1.12}$$

В равенстве (1.1.12), справедливом на всюду плотном в банаховом пространстве E множестве $\mathscr{D}(A)$, линейный оператор $\mathscr{U}(t)$ ограничен, поэтому (1.1.12) можно распространить по непрерывности на все пространство E:

$$U(t+s)\ e = U(t)\ U(s)\ e, \quad t, s > 0, \quad \forall e \in E.$$

Таким образом, однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $\{U(t)\,,\ t > 0\}$ из пространства $\mathscr{L}(E, E)$ линейных непрерывных операторов, действующих из E в E, обладает *полугрупповым свойством*:

$$U(t+s) = U(t)\,U(s)\,, \quad t, s > 0,$$

и образует *сильно непрерывную при $t > 0$ полугруппу*:

$$U(t+\Delta t)\,e \to U(t)\,e, \quad t > 0, \quad \forall e \in E, \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Для сильно непрерывной при $t > 0$ полугруппы $U(t)$ предел функции $U(t)\ e$ при $t \to 0+$ может не существовать, если элемент e не принадлежит множеству $\mathscr{D}(A)$.

Корректно поставленная задача Коши называется *равномерно корректной*, если из сходимости к нулю начальных данных:

$$u_{0,k} \to 0, \quad k \to \infty,$$

следует, что соответствующие решения сходятся к нулю:

$$u_k \to 0, \quad k \to \infty$$

равномерно по t на каждом конечном промежутке $[0, t_0]$.

Полугруппа $U(t)$, порождаемая равномерно корректной задачей Коши, обладает свойством

$$U(t)\ e \to e \text{ при } t \to 0+, \ \forall e \in E,$$

т. е.

$$\lim_{t \to 0+} \|U(t)\ e - e\| = 0, \quad \forall e \in E \tag{1.1.13}$$

и называется *сильно непрерывной полугруппой класса C_0*.

Итак, решение равномерно корректной задачи Коши (1.1.10), (1.1.11) можно записать в виде

$$u(t) = U(t)\ u_0, \quad u_0 \in \mathscr{D}(A)\,,$$

где $U(t)$, $t > 0$, — сильно непрерывная полугруппа линейных ограниченных операторов класса C_0.

§ 2. Основные свойства сильно непрерывных полугрупп класса C_0

В предыдущем параграфе, при поочередном рассмотрении случаев реализации коэффициента A дифференциального уравнения (1.1.10) в виде числа, матрицы и оператора, показано возникновение понятия полугруппы операторов как абстрактной функции (решения соответствующего дифференциального уравнения), удовлетворяющей полугрупповому свойству. Теперь изучим свойства сильно непрерывных полугрупп класса C_0.

В этом и последующих параграфах будут рассматриваться линейные операторы (ограниченные и неограниченные), действующие в банаховом пространстве E (т. е. из E в E).

Абстрактная операторнозначная функция $U(t) : [0, +\infty[\to \mathscr{L}(E, E)$, удовлетворяющая условиям

$$U(t+s) = U(t)\,U(s)\,, \quad t, s \geqslant 0, \tag{1.2.1}$$

$$U(0) = \mathrm{I},$$

где I — единичный оператор, есть *однопараметрическая полугруппа операторов в банаховом пространстве* $\mathscr{L}(E, E)$.

Полугруппы операторов $U(t)$ классифицируются [3] соответственно их поведению — «гладкости» в нуле, т. е. при $t \to 0+$. Здесь рассматриваются *полугруппы класса C_0, сильно непрерывные в нуле:*

$$\lim_{t \to 0+} U(t)\,e = e, \quad \forall e \in E. \tag{1.2.2}$$

Теорема 1.2.1. *Для полугрупп класса C_0 справедлива оценка*

$$\|U(t)\| \leqslant M \exp(\omega t)\,, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2.3}$$

где M и ω — некоторые постоянные.

Доказательство. Прежде всего покажем, что существует постоянная $M \geqslant 1$, являющаяся верхней гранью для функции $\|U(t)\|$ на отрезке $[0, 1]$:

$$\|U(t)\| \leqslant M, \quad \forall t \in [0, 1]\,.$$

Действительно, если предположить противное, то найдется последовательность точек $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, 1] : t_k \to 0+$, такая, что $\|U(t_k)\| \geqslant k$. Тогда в силу принципа равномерной ограниченности найдется такой элемент $e_0 \in E$, что

$$\left\|U\left(t_{k_j}\right) e_0\right\| \geqslant k_j \text{ при } t_{k_j} \to 0+,\ k_j \to \infty, \tag{1.2.4}$$

где $\left\{t_{k_j}\right\}$ — подпоследовательность последовательности $\{t_k\}$. Но (1.2.4) невозможно для полугрупп класса C_0, так как противоречит (1.2.2).

Пусть $t \geqslant 1$, тогда $t = k + \delta$, где k — натуральное число, а $\delta \in [0, 1[$. Применяя полугрупповое свойство (1.2.1), имеем

$$U(t) = U(k + \delta) = U(k)\,U(\delta) = U^k(1)\,U(\delta),$$

и поэтому

$$\|U(t)\| \leqslant \left\|U^k(1)\right\| \|U(\delta)\| \leqslant \|U(\delta)\| \, \|U(1)\|^k \leqslant M \exp\left(k \ln \|U(1)\|\right).$$

Если $\|U(1)\| \leqslant 1$, то $\ln \|U(1)\| \leqslant 0$ и, значит, $\|U(t)\| \leqslant M$, $\forall\, t \geqslant 0$, т. е. оценка (1.2.3) выполняется при $\omega = 0$.

Если же $\|U(1)\| > 1$, то $\ln \|U(1)\| > 0$ и, следовательно,

$$\|U(t)\| \leqslant M \exp\left(k \ln \|U(1)\|\right) \exp\left(\delta \ln \|U(1)\|\right) = M \exp(\omega t),$$

т. е. оценка (1.2.3) выполняется при $\omega = \ln \|U(1)\|$. Теорема 1.2.1 доказана.

Наименьшее число ω, для которого справедлива оценка (1.2.3), называется *типом полугруппы*, при этом

$$\omega \equiv \inf_{t>0} \frac{\ln \|U(t)\|}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t}.$$

Если тип полугруппы отрицательный, то норма полугруппы экспоненциально убывает, если тип — неположительный, то норма полугруппы равномерно ограничена:

$$\|U(t)\| \leqslant M, \quad t \geqslant 0;$$

если при этом $M = 1$, т. е.

$$\|U(t)\| \leqslant 1, \quad t \geqslant 0,$$

то полугруппа называется *сжимающей*.

Теорема 1.2.2. *Полугруппа $U(t)$ класса C_0 сильно непрерывна на всей полуоси $[0, +\infty[$.*

Доказательство. Пусть e — произвольный элемент банахова пространства E. Покажем, что абстрактная вектор-функция $u(t) = U(t)\,e$ непрерывна в любой точке $t > 0$. Действительно, пусть $\Delta t \to 0+$, тогда

$$\|u(t + \Delta t) - u(t)\| \leqslant \|U(t)\| \, \|U(\Delta t)\, e - e\| \to 0$$

и, значит, согласно (1.1.13) функция $u(t)$ непрерывна справа в любой точке $t > 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0+} u(t + \Delta t) = u(t), \quad \forall\, t > 0.$$

С другой стороны, при $t - \Delta t > 0$ и $\Delta t \to 0+$ имеем

$$\|u(t - \Delta t) - u(t)\| \leqslant \|U(t - \Delta t)\, e - U(t - \Delta t)\, U(\Delta t)\, e\| \leqslant$$
$$\leqslant \|U(t - \Delta t)\| \, \|U(\Delta t)\, e - e\| \to 0,$$

поэтому функция $u(t)$ непрерывна слева в любой точке $t > 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0+} u(t - \Delta t) = u(t), \quad \forall\, t > 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\Delta t \to 0+} U(t \pm \Delta t)\, e = U(t)\, e, \quad \forall e \in E, \ \forall t > 0,$$

что и доказывает теорему 1.2.2.

§ 3. Производящий оператор полугруппы класса C_0

Основной характеристикой сильно непрерывной полугруппы операторов является ее производящий оператор A, определяемый по формуле

$$Ae = \lim_{\tau \to 0+} \tau^{-1} [U(\tau) - \mathrm{I}]\, e \tag{1.3.1}$$

для всех элементов e банахова пространства E, составляющих область определения $\mathscr{D}(A)$, для которых предел (1.3.1) существует. Другими словами, область определения $\mathscr{D}(A)$ составляют те элементы $e \in E$, для которых абстрактная вектор-функция $u(t) = U(t)\, e$, $t \geqslant 0$, дифференцируема в нуле справа:

$$u'(t)\big|_{t=0+} = U'(0+)\, e = Ae. \tag{1.3.2}$$

Непосредственно из определения следует, что производящий оператор A — линейный и что множество $\mathscr{D}(A)$ — линейное многообразие в банаховом пространстве E.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $U(t)$, $t \geqslant 0$, — *сильно непрерывная полугруппа операторов класса* C_0 *и элемент* $e \in \mathscr{D}(A)$, *тогда функция* $u(t) = U(t)\, e$ *принимает значения из* $\mathscr{D}(A)$ для всех $t \geqslant 0$, *дифференцируема на полуоси* $[0, +\infty[$ *и справедливы равенства*

$$\frac{du(t)}{dt} = AU(t)\, e = U(t)\, Ae, \quad t \geqslant 0. \tag{1.3.3}$$

Доказательство. Пусть τ — фиксированное положительное число. Введем в рассмотрение линейный ограниченный оператор

$$A_\tau = \frac{1}{\tau} [U(\tau) - \mathrm{I}], \quad \tau > 0. \tag{1.3.4}$$

Если элемент $e \in \mathscr{D}(A)$, то согласно (1.3.1)

$$\lim_{\tau \to 0+} A_\tau e = Ae.$$

Зафиксируем $t \geqslant 0$ и рассмотрим разностное отношение $\tau^{-1} [u(t + \tau) - u(t)]$, в котором $e \in \mathscr{D}(A)$. Используя полугрупповое свойство (1.2.1) и формулу (1.3.4), имеем

$$\tau^{-1} [U(t + \tau) - U(t)]\, e = A_\tau U(t)\, e = U(t)\, A_\tau e. \tag{1.3.5}$$

Так как $e \in \mathscr{D}(A)$, то предел при $\tau \to 0+$ правой части последнего равенства в (1.3.5) существует, а поэтому существуют и пределы в обеих частях первого равенства в (1.3.5). Отсюда следует, что: 1) значения функции $u(t)$ принадлежат $\mathscr{D}(A)$ для всех $t \geqslant 0$; 2) на множестве $\mathscr{D}(A)$ полугруппа $U(t)$ коммутирует с производящим оператором A:

$$AU(t)\,e = U(t)\,Ae, \quad e \in \mathscr{D}(A)\,; \tag{1.3.6}$$

3) производная справа функции $u(t)$, $t \geqslant 0$, существует и принимает значение (1.3.6).

Чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что и производная слева от функции $u(t)$, $t \geqslant 0$, также существует и принимает то же значение (1.3.6). Пусть $t, \tau > 0$, причем τ достаточно мало, так что $t - \tau > 0$, тогда

$$(-\tau)^{-1}\left[U(t-\tau) - U(t)\right]e = U(t-\tau)\,A_\tau e, \quad e \in \mathscr{D}(A)\,,$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\left\|(-\tau)^{-1}\left[u(t-\tau) - u(t)\right] - U(t)\,Ae\right\| &\leqslant \\ \leqslant \|U(t-\tau)\|\left[\|A_\tau e - Ae\| + \|U(\tau)\,Ae - Ae\|\right] &\leqslant \\ \leqslant M\exp\left(\omega(t-\tau)\right)\left[\|A_\tau e - Ae\| + \|U(\tau)\,Ae - Ae\|\,\right] &\to 0\end{aligned}$$

при $\tau \to 0+$. Теорема 1.3.1 доказана.

Теорема 1.3.2. *Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная полугруппа класса C_0 и A — ее производящий оператор, тогда для произвольного элемента $e \in E$ справедливо равенство*

$$U(t)\,e - e = A\int_0^t U(\xi)\,ed\xi; \tag{1.3.7}$$

если же $e \in \mathscr{D}(A)$, то

$$U(t)\,e - e = \int_0^t U(\xi)\,Aed\xi. \tag{1.3.8}$$

Доказательство. Для произвольных чисел $t, \tau > 0$ и любого элемента $e \in E$ имеем

$$\begin{aligned}A_\tau \int_0^t U(\xi)\,ed\xi &= \frac{1}{\tau}\int_0^t \left[U(\xi+\tau)\,e - U(\xi)\,e\right]d\xi = \\ &= \frac{1}{\tau}\int_\tau^{t+\tau} U(\xi)\,ed\xi - \frac{1}{\tau}\int_0^t U(\xi)\,ed\xi = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(\xi)\left[U(t)\,e - e\right]d\xi.\end{aligned} \tag{1.3.9}$$

Отсюда, используя сильную непрерывность в каждой точке $\xi \geqslant 0$ полугруппы $U(\xi)$ класса C_0, т.е. используя непрерывность функции $u(\xi) = U(\xi)\,e$, $\xi \geqslant 0$, для любого элемента $e \in E$, выводим, что существует предел при $\tau \to 0+$ правой части последнего равенства в (1.3.9), равный $U(t)\,e - e$. Поэтому существует предел левой части первого равенства в (1.3.9) и, значит,

$$\int_0^t U(\xi)\,ed\xi \in \mathscr{D}(A) \tag{1.3.10}$$

для любого $e \in E$. Переходя в (1.3.9) к пределу при $\tau \to 0+$, получим (1.3.7). Если же $e \in \mathscr{D}(A)$, то, используя вместо (1.3.9) равенство

$$\int_0^t U(\xi)\,A_\tau ed\xi = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(\xi)\,[U(t)\,e - e]\,d\xi,$$

получим (1.3.8). Теорема 1.3.2 доказана.

Теорема 1.3.3. *Производящий оператор A сильно непрерывной полугруппы $U(t)$, $t \geqslant 0$, класса C_0 есть замкнутый оператор с областью определения $\mathscr{D}(A)$, всюду плотной в E.*

Доказательство. Из сильной непрерывности полугруппы следует, что

$$\lim_{\tau\to 0+}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(\xi)\,ed\xi = e \tag{1.3.11}$$

для любого элемента $e \in E$. Одновременно рассматривая (1.3.10) и (1.3.11), заключаем, что замыкание множества $\mathscr{D}(A)$ совпадает с банаховым пространством E: $\overline{\mathscr{D}(A)} = E$, т.е. область определения $\mathscr{D}(A)$ всюду плотна в E.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность элементов из $\mathscr{D}(A)$, сходящаяся к элементу x_0 и такая, что соответствующая последовательность $\{Ax_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к элементу y_0. Покажем, что $x_0 \in \mathscr{D}(A)$ и $Ax_0 = y_0$. Для $x_n \in \mathscr{D}(A)$, применяя (1.3.3), получим

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(\xi)\,Ax_n d\xi = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \left(\frac{d}{d\xi}U(\xi)\,x_n\right)d\xi = \frac{1}{\tau}\,[U(\tau)\,x_n - x_n] = A_\tau x_n.$$

Отсюда, переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя оценку (1.2.3), имеем

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau U(\xi)\,y_0 d\xi = A_\tau x_0. \tag{1.3.12}$$

Согласно (1.3.11), предел левой части (1.3.12) при $\tau \to 0+$ существует и равен y_0, а поэтому элемент x_0 принадлежит области определения $\mathscr{D}(A)$, причем $y_0 = Ax_0$, что и завершает доказательство теоремы 1.3.3.

Степени производящего оператора A определяются по индукции соотношениями:

$$A^0 = \mathrm{I}, \quad A^1 = A$$

и

$$\mathscr{D}\left(A^k\right) = \left\{ e : e \in \mathscr{D}\left(A^{k-1}\right) \text{ и } A^{k-1}e \in \mathscr{D}(A)\right\},$$

$$A^k e = A\left(A^{k-1}e\right) = \lim_{\tau \to 0+} A_\tau \left(A^{k-1}e\right), \quad e \in \mathscr{D}\left(A^k\right).$$

Теорема 1.3.4. *Пересечение областей определения $\mathscr{D}\left(A^k\right)$ целых положительных степеней A^k производящего оператора A полугруппы $U(t)$ класса C_0 всюду плотно в банаховом пространстве E.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{E}$ совокупность элементов банахова пространства E, представимых в виде

$$e_\varphi = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi)\, U(\xi)\, e d\xi, \quad e \in E,$$

где числовая функция $\varphi(\xi)$ принадлежит множеству бесконечно дифференцируемых финитных функций на положительной полуоси $]0, +\infty[$.

Покажем, что:

1) $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}\left(A^k\right)$ для любого $k = 1, 2, \ldots$;

2) замыкание множества $\mathscr{E}$ совпадает с банаховым пространством $E : \overline{\mathscr{E}} = E$.

1) Для любого $\tau > 0$ имеем

$$A_\tau e_\varphi = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi)\left[U(\xi + \tau)\, e - U(\xi)\, e\right] d\xi =$$

$$= \frac{1}{\tau} \int\limits_\tau^{+\infty} \left[\varphi(\xi - \tau) - \varphi(\xi)\right] U(\xi)\, e\, d\xi - \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} \varphi(\xi) U(\xi)\, e\, d\xi,$$

и, значит, для достаточно малых положительных τ справедливо равенство

$$A_\tau e_\varphi = \int\limits_\tau^{+\infty} \frac{\varphi(\xi - \tau) - \varphi(\xi)}{\tau}\, U(\xi)\, e\, d\xi. \tag{1.3.13}$$

По условию $\varphi(\xi)$ непрерывно дифференцируема и имеет компактный носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset]0, +\infty[$, поэтому

$$\tau^{-1}\left[\varphi(\xi - \tau) - \varphi(\xi)\right] \to -\varphi'(\xi)$$

равномерно по $\xi \in \operatorname{supp}\varphi$ при $\tau \to 0+$. Следовательно, переходя к пределу при $\tau \to 0+$ в равенстве (1.3.13), получим

$$Ae_\varphi = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(\xi)\, U(\xi)\, e d\xi, \quad e \in E.$$

Далее по индукции имеем $\mathscr{E} \subset \mathscr{D}\left(A^k\right)$, $k = 1, 2, \ldots$, и

$$A^k e_\varphi = (-1)^k \int\limits_0^{+\infty} \varphi^{(k)}(\xi)\, U(\xi)\, e\, d\xi, \quad e \in E.$$

2) Предположим, что множество $\mathscr{E}$ не является всюду плотным в E, тогда существует ненулевой линейный непрерывный функционал $f^* \in E^*$, такой, что

$$\langle f^*, e_\varphi \rangle = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(\xi)\, \langle f^*, U(\xi)\, e \rangle d\xi = 0$$

для любой бесконечно дифференцируемой функции $\varphi(\xi)$, финитной в $]0, +\infty[$, и любого элемента $e \in E$. Следовательно,

$$\langle f^*, U(\xi)\, e \rangle = 0, \quad \xi > 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\xi \to 0$ и используя непрерывность линейного функционала f^*, а также принадлежность полугруппы $U(t)$ классу C_0, имеем $\langle f^*, e \rangle = 0$ для любого элемента e банахова пространства E, т. е. f^* — нулевой функционал. Полученное противоречие показывает, что $\overline{\mathscr{E}} = E$. Теорема 1.3.4 доказана.

§ 4. Резольвента производящего оператора

При изучении сильно непрерывных полугрупп $U(t)$, $t > 0$, класса C_0 важное значение имеет формула, выражающая резольвенту $R(\lambda, A) = (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}$ производящего оператора A через саму полугруппу.

Теорема 1.4.1. Пусть $U(t)$, $t \geqslant 0$, — *сильно непрерывная полугруппа класса* C_0, тип *которой равен* ω_0. *Тогда полуплоскость* $\mathrm{Re}\lambda > \omega_0$ *принадлежит резольвентному множеству* $\rho(A)$ *производящего оператора* A *полугруппы* $U(t)$ *и справедливо представление*

$$R(\lambda, A)\, e = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e\, dt, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega_0, \quad e \in E. \qquad (1.4.1)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение линейный оператор

$$\mathscr{R}_\lambda e = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e dt, \quad e \in E, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega_0,$$

и покажем, что

$$\mathscr{R}_\lambda = (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega_0.$$

Пусть $\sigma = \operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega > \omega_0$, тогда

$$\|U(t)\ e\| \leqslant M_0 \exp(\omega_0 t)\, \|e\| \leqslant M \exp(\omega t)\ \ \|e\|, \quad e \in E,$$

и, значит,

$$\|\mathscr{R}_\lambda e\| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} \exp(-(\lambda - \omega)\, t)\, dt\, \|e\| = \frac{M}{\lambda - \omega}\, \|e\|,$$

следовательно, оператор $\mathscr{R}_\lambda$ ограничен.

Покажем далее, что область значений $\mathscr{R}(\mathscr{R}_\lambda)$ введенного оператора вложена в область определения $\mathscr{D}(A)$ производящего. Заменяя переменные интегрирования, для произвольного элемента $e \in E$ имеем

$$A_\tau \mathscr{R}_\lambda e = \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, [U(t+\tau)\, e - U(t)\, e]\, dt =$$

$$= \frac{\exp(\lambda\tau) - 1}{\tau} \int\limits_\tau^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e dt - \frac{1}{\tau} \int\limits_0^{\tau} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e\, dt.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\tau \to 0+$, получим

$$A\mathscr{R}_\lambda e = \lambda \mathscr{R}_\lambda e - e, \quad e \in E;$$

следовательно, $\mathscr{R}(\mathscr{R}_\lambda) \subset \mathscr{D}(A)$ и

$$(\lambda \mathrm{I} - A)\, \mathscr{R}_\lambda e = e, \quad \forall e \in E. \tag{1.4.2}$$

Пусть теперь элемент e принадлежит множеству $\mathscr{D}(A)$, тогда

$$\mathscr{R}_\lambda A e = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, A e dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \left(\frac{d}{dt} U(t)\, e\right) dt =$$

$$= \exp(-\lambda t)\, U(t)\ e\big|_0^{+\infty} + \lambda \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e dt = \lambda \mathscr{R}_\lambda e - e.$$

Поэтому
$$\mathscr{R}_\lambda (\lambda \mathrm{I} - A)\, e = e, \quad \forall e \in \mathscr{D}(A)\,. \tag{1.4.3}$$

Из равенств (1.4.2) и (1.4.3) следует, что $\mathscr{R}_\lambda$ — резольвента производящего оператора. Т е о р е м а 1.4.1 д о к а з а н а.

Основной вопрос — при выполнении каких условий оператор A порождает полугруппу класса C_0 — решает теорема Хилле–Иосиды:

Теорема 1.4.2. *Для того чтобы замкнутый линейный оператор A с областью определения $\mathscr{D}(A)$, всюду плотной в E, был производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t)$,* $t \geqslant 0$, класса C_0, *необходимо и достаточно, чтобы существовали действительные числа M* и ω, *такие, что полупрямая $\lambda > \omega$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ и справедливы оценки степеней резольвенты*
$$\|R^n(\lambda, A)\| \leqslant \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.4.4}$$

При этом для соответствующей полугруппы выполняется неравенство
$$\|U(t)\| \leqslant M \exp(\omega t)\,, \quad t \geqslant 0. \tag{1.4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U(t)$, $t \geqslant 0$, — сильно непрерывная полугруппа класса C_0 и A — ее производящий оператор, тогда по теореме 1.3.3 оператор A — линейный замкнутый с областью определения $\mathscr{D}(A)$, всюду плотной в E. Согласно теореме 1.2.1 существуют постоянные M и ω, для которых выполняется оценка
$$\|\, U(t)\,\| \leqslant M\, \exp(\omega\, t)\,, \quad t \geqslant 0.$$

Наконец, по теореме 1.4.1 числа $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ производящего оператора и
$$R(\lambda, A)\, e = \int\limits_0^{+\infty} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e dt, \quad e \in E, \quad \mathrm{Re}\lambda > \omega.$$

Дифференцируя под знаком интеграла (что законно в силу (1.4.5)) при $\mathrm{Re}\lambda = \sigma > \omega$ и $n = 1{,}2{,}\ldots$, получим равенства
$$R^{(n-1)}(\lambda, A)\, e = (-1)^{n-1} \int\limits_0^{+\infty} t^{n-1} \exp(-\lambda t)\, U(t)\, e\, dt$$

и оценки норм
$$\left\|R^{(n-1)}(\lambda, A)\right\| \leqslant \\ \leqslant M \int\limits_0^{+\infty} t^{n-1} \exp(-(\lambda-\omega)\, t)\, e\, dt = (n-1)! \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}. \tag{1.4.6}$$

Для всех регулярных значений λ из резольвентного множества $\rho(A)$ выполняются равенства

$$R^{(k)}(\lambda, A) = (-1)^k k!\, R^{k+1}(\lambda, A). \tag{1.4.7}$$

Одновременно рассматривая (1.4.6) и (1.4.7), приходим к неравенствам (1.4.4). Необходимость доказана.

Пусть для линейного замкнутого оператора A с областью определения $\mathscr{D}(A)$, всюду плотной в E, можно указать числа M и ω, такие, что

$$\{\lambda : \lambda \in \,]\omega, +\infty[\} \subset \rho(A)$$

и

$$\|[(\lambda - \omega) R(\lambda, A)]^n\| \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для такого оператора

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda, A)\, e = e, \quad \forall e \in E. \tag{1.4.8}$$

Действительно, если элемент $e \in \mathscr{D}(A)$, то при $\lambda \to \infty$

$$\|\lambda R(\lambda, A)\, e - e\| = \|R(\lambda, A)\, Ae\| \leqslant \frac{M}{\lambda - \omega} \|Ae\| \to 0. \tag{1.4.9}$$

Нормы операторов $\lambda R(\lambda, A)$ равномерно ограничены, так как

$$\|\lambda R(\lambda, A)\, e\| \leqslant \frac{\lambda M}{\lambda - \omega} \leqslant 2M \text{ при } \lambda > 2\omega. \tag{1.4.10}$$

По теореме Банаха–Штейнхауза из соотношений (1.4.9), (1.4.10) следует (1.4.8).

Введем в рассмотрение семейство вспомогательных линейных ограниченных операторов

$$A_\lambda \equiv \lambda A R(\lambda, A) = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda \mathrm{I}, \quad \lambda > \omega,$$

коммутирующих между собой:

$$A_\lambda A_\nu = A_\nu A_\lambda, \quad \lambda, \nu > \omega.$$

Полагая в (1.4.8) $e = A\widetilde{e}$, получим

$$\lim_{\lambda \to +\infty} A_\lambda \widetilde{e} = A\widetilde{e}, \quad \forall\, \widetilde{e} \in \mathscr{D}(A). \tag{1.4.11}$$

Операторы A_λ, $\lambda > \omega$, порождают семейство коммутирующих между собой полугрупп

$$U_\lambda(t) \equiv \exp(tA_\lambda), \quad t \geqslant 0,$$

зависящих от параметра λ. При этом справедливы представление

$$U_\lambda(t) = \exp[t\lambda A R(\lambda, A)] = \exp\{t\lambda[\lambda R(\lambda, A) - \mathrm{I}]\} = \\ = \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k} t^k}{k!} R^k(\lambda, A), \quad t \geqslant 0,$$