

Сухинин С.Н.

**Прикладные задачи
устойчивости
многослойных
композитных
оболочек**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 678.5-419.8
ББК 22.251
С 91



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 09-08-07010*

Сухинин С. Н. **Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 248 с. — ISBN 978-5-9221-1224-6.

Разработаны прикладные методы расчета на устойчивость трехслойных и многослойных тонкостенных конструкций, выполненных из композитов. Проведено сравнение результатов, полученных теоретическим путем, с экспериментальными данными. Даны рекомендации по назначению поправочных эмпирических коэффициентов.

Для инженеров, конструкторов, научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, работающих в области механики многослойных оболочечных конструкций из композитов.

ISBN 978-5-9221-1224-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2010

© С. Н. Сухинин, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	12
Глава 1. Разрешающие соотношения для исследования устойчивости многослойных ортотропных оболочек	21
1.1. Разрешающие соотношения для исследования устойчивости трёхслойных ортотропных оболочек с лёгким наполнителем	21
1.2. Трёхслойные с жёстким наполнителем и многослойные композитные оболочки	27
1.3. Разрешающие соотношения для многослойных композитных оболочек (классическая модель)	30
1.4. Полубезмоментная модель и непологие оболочки.	30
Глава 2. Методы расчёта на устойчивость трёхслойных и многослойных стержней и арок	33
2.1. Расчёт на общую устойчивость трёхслойных стержней с лёгким наполнителем	33
2.2. Трёхслойные с жёстким наполнителем и многослойные стержни	38
2.3. Многослойные стержни на упругом основании и местная устойчивость трёхслойных стержней	38
2.4. Запасы устойчивости трёхслойных стержней с лёгким наполнителем.	41
2.5. Расчёт на устойчивость трёхслойных арок с лёгким наполнителем	42
2.6. Устойчивость трёхслойных с жёстким наполнителем и многослойных арок	45
2.7. Арки на упругом основании и расчёт местной устойчивости трёхслойных арок	46
Глава 3. Расчёт изотропных цилиндрических оболочек на общую устойчивость	48
3.1. Разрешающие соотношения для исследования общей устойчивости	48

3.2. Устойчивость многослойных цилиндрических оболочек (классическая модель)	50
3.2.1. Осевое сжатие (51). 3.2.2. Внешнее давление (52). 3.2.3. Кручение (54). 3.2.4. О зависимостях между критическими усилиями в изотропных цилиндрических оболочках (56).	
3.3. Устойчивость трёхслойных цилиндрических оболочек с лёгким заполнителем	56
3.3.1. Осевое сжатие (57). 3.3.2. Внешнее давление (62). 3.3.3. Особенности расчёта на устойчивость при кручении (65).	
3.4. Трёхслойные с жёстким заполнителем и многослойные изотропные оболочки	70
Глава 4. Методы расчёта на устойчивость многослойных композитных цилиндрических оболочек	73
4.1. Устойчивость тонкостенных композитных оболочек (классическая модель)	73
4.1.1. Осевое сжатие (75). 4.1.2. Осевое сжатие: теория и эксперимент (79). 4.1.3. Нагружение внешним давлением (96). 4.1.4. Нагружение крутящим моментом и перерезывающими усилиями (99). 4.1.5. О специфических зависимостях между критическими параметрами в тонкостенных ортотропных оболочках (102).	
4.2. Методы расчёта на устойчивость трёхслойных композитных оболочек с лёгким заполнителем	102
4.2.1. Осевое сжатие (103). 4.2.2. Осевое сжатие: сравнение теоретических и экспериментальных данных (115). 4.2.3. Действие внешнего давления (120). 4.2.4. Особенности расчёта трёхслойных оболочек при кручении (124).	
4.3. Устойчивость трёхслойных ортотропных оболочек с жёстким заполнителем и многослойных оболочек	131
Глава 5. Устойчивость композитных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении	134
5.1. Устойчивость многослойных композитных оболочек при нагружении осевой сжимающей нагрузкой и внутренним давлением	134
5.1.1. Многослойные ортотропные оболочки (классическая модель) (134). 5.1.2. Трёхслойные ортотропные оболочки (144).	
5.2. Устойчивость многослойных композитных оболочек при нагружении осевой сжимающей нагрузкой и внешним давлением	148
5.2.1. Многослойные ортотропные оболочки (классическая модель) (148). 5.2.2. Трёхслойные ортотропные оболочки (154).	
5.3. Устойчивость многослойных ортотропных оболочек при нагружении внешним давлением и растягивающим осевым усилием	161
5.3.1. Многослойные ортотропные оболочки (классическая модель) (161). 5.3.2. Трёхслойные ортотропные оболочки (163).	
5.4. Устойчивость при совместном действии осевого сжатия и кручения	168

5.5. Устойчивость при совместном действии внешнего давления и кручения	169
5.6. Устойчивость при совместном действии осевой сжимающей силы и изгибающего момента	169
5.7. Устойчивость при поперечном изгибе	169
Глава 6. Устойчивость цилиндрических оболочек со сплошным заполнителем	171
6.1. Математическая модель и разрешающие соотношения	171
6.2. Расчёт на устойчивость при осевом сжатии	173
6.3. Расчёт на устойчивость при действии внешнего давления	177
6.4. Особенности расчётов на устойчивость при кручении	179
6.5. Совместное действие осевого сжатия и наружного давления	180
6.6. Расчёт на местную устойчивость трёхслойных оболочек с лёгким заполнителем	184
Глава 7. Устойчивость многослойных композитных конических оболочек	186
7.1. Математические модели и разрешающие соотношения	186
7.2. Расчёт критических нагрузок при осевом сжатии	189
7.3. Расчёт критического внешнего давления	190
7.4. Устойчивость при действии крутящего момента и сдвигающих усилий	192
Глава 8. Устойчивость многослойных сферических оболочек при действии внешнего давления	194
8.1. Разрешающие соотношения	194
8.2. Устойчивость изотропных оболочек (классическая модель)	195
8.3. Изотропные трёхслойные оболочки с лёгким заполнителем	196
8.4. Устойчивость многослойных ортотропных оболочек (классическая модель)	198
8.5. Устойчивость трёхслойных ортотропных оболочек	200
Глава 9. Устойчивость при осевом сжатии цилиндрических оболочек с отверстиями	208
9.1. Выбор математической модели и постановка задачи	208
9.2. Влияние отверстий на критическую нагрузку изотропных оболочек	212
9.3. Влияние отверстий на критическую нагрузку многослойных композитных оболочек	217

Приложение А. Расчёт жесткостей неоднородных по толщине многослойных и трёхслойных композитных конструкций	221
А.1. Неоднородные по толщине многослойные оболочки	221
А.1.1. Структура и жёсткости многослойного ортотропного пакета (221). А.1.2. Расчёт характеристик упругости многослойных ортотропных пакетов с произвольным армированием (226).	
А.2. Трёхслойные оболочки	231
А.2.1. Трёхслойные оболочки с лёгким наполнителем (232).	
А.2.2. Трёхслойные оболочки с жёстким наполнителем (234).	
Приложение Б. Основные обозначения	235
Б.1. Геометрические параметры ($i = 1, 2, 3, 4$)	235
Б.2. Жесткостные характеристики многослойных оболочечных конструкций из композитов ($i = 1, 2, 3, 4$)	235
Б.3. Параметры анизотропии многослойных ортотропных оболочек.	237
Б.4. Дифференциальные операторы	237
Б.5. Силовые факторы.	237
Список литературы	240

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящей книге решаются задачи исследования устойчивости стержней, арок и оболочек (цилиндрических, конических, сферических) с учётом особенностей сопротивления анизотропных многослойных и трёхслойных оболочечных конструкций. С использованием асимптотического анализа получены простые и удобные при оперативном инженерном анализе формулы для расчёта критических нагрузок. Установлены критерии применимости основных математических моделей, используемых для расчёта на устойчивость трёхслойных и многослойных конструкций, и погрешности применения этих моделей. Проводится сравнительный экспериментально-теоретический анализ, и даются рекомендации по выбору эмпирических поправочных коэффициентов.

В первой главе на основе модели ломаной линии [16] получены разрешающие соотношения для исследования устойчивости трёхслойных ортотропных оболочек вращения из композиционных материалов (КМ). Описана структура трёхслойного пакета, формулируются гипотезы ломаной линии, выписаны дифференциальные уравнения устойчивости. Обращается внимание на дифференциальный оператор, отвечающий за сопротивление трёхслойного пакета поперечным сдвигам. Представляя решение в виде, предложенном С.П. Тимошенко [79], можно получить разрешающие соотношения, из которых критические параметры находятся минимизацией по параметрам волнообразования. Асимптотически выделяются два типа заполнителей — слабо сопротивляющиеся поперечным сдвигам и достаточно жёсткие на поперечные сдвиги. Для каждого типа заполнителя строится функция влияния поперечных сдвигов, что помогает получить простые расчётные формулы. Как частный случай из полученных соотношений следуют зависимости для классических оболочек и для оболочек, сопротивляющихся в соответствии с моделью прямой линии. Получены также разрешающие соотношения, основанные на полубезмоментной модели сопротивления трёхслойных оболочек. Эта модель удобна для анализа устойчивости при действии наружного давления и кручения.

Вторая глава посвящена исследованию устойчивости трёхслойных стержней и круговых арок. Разрешающие дифференциальные соотношения получены как частный случай из соответствующих зависимостей гл. 1. В результате решения получены простые формулы для расчёта критических усилий. Эти формулы определяются тремя естественными обобщёнными жесткостями трёхслойных конструкций: обобщённая жёсткость несущих слоёв — критическое усилие

при сопротивлении стержней без заполнителя; обобщённая жёсткость трёхслойного стержня — критическое усилие в стержне с абсолютно жёстким на поперечные сдвиги заполнителем и обобщённая жёсткость трёхслойной конструкции на поперечный сдвиг. Как частные случаи из полученных формул следуют расчётные зависимости для многослойных стержней и арок. Анализ полученных соотношений позволил установить критерии применимости математических моделей, основанных на гипотезах ломаной линии, прямолинейного элемента и классических гипотезах. Рассмотрены и решены также задачи об устойчивости стержней и арок на упругом основании Власова–Пастернака и местной устойчивости трёхслойных стержней и арок.

Третья глава содержит материалы по устойчивости изотропных однослойных и трёхслойных цилиндрических оболочек. Обращается внимание на то, что в расчётах на устойчивость при осевом сжатии изотропных однородных оболочек нельзя однозначно определить форму волнообразования — этих форм может быть бесконечно много, и все они соответствуют одному и тому же значению критического усилия. В то же время при исследовании устойчивости от действия наружного давления или кручения формы волнообразования однозначно определяются расчётным путём. Этот факт сказывается на степени различия теоретических и экспериментальных значений критических усилий [4, 69]. Получены зависимости для расчёта критических усилий в изотропных трёхслойных цилиндрических оболочках при действии осевого сжатия, наружного давления и кручения. Установлены критерии применимости различных математических моделей к исследованию устойчивости трёхслойных изотропных оболочек.

В четвёртой главе помещены результаты исследования устойчивости ортотропных цилиндрических оболочек, выполненных из композиционных материалов.

Начало гл. 4 посвящено исследованию устойчивости тонкостенных многослойных и однородных композитных цилиндрических оболочек. Исследования проводятся в рамках классических оболочек с неизменной нормалью. Показано, что в реальных конструкциях порядок погрешности при этом составляет h/R (h , R — соответственно толщина и радиус оболочки). В зависимости от вида анизотропии получены расчётные соотношения для критических усилий при действии осевых сил. Отмечено, что при расчётах получаются однозначные формы потери устойчивости, что вселяет надежду [4] на хорошее согласование теоретических и экспериментальных значений критических усилий. Особое внимание в гл. 4 уделено сравнительному экспериментально-теоретическому анализу критических усилий при осевом сжатии цилиндрических оболочек. Как известно, в изотропных оболочках различие теории и эксперимента может достигать $2 \div 3$ раз. С целью установить разницу в аналогичном случае для ортотропных композитных оболочек был проведён анализ 270 результатов испытаний композитных оболочек, стеклопластиковых

и углепластиковых, изготовленных в заводских условиях или с помощью ручной укладки. Статистический анализ проводился на основе нормального закона распределения, который в данном случае хорошо выполняется. На основании проведённого статистического анализа даны рекомендации по выбору поправочных эмпирических коэффициентов. В отличие от изотропных оболочек различие между теорией и экспериментом для композитных оболочек находится в пределах $20 \div 30\%$.

С применением полубезмоментной модели получены расчётные зависимости для анализа устойчивости многослойных композитных оболочек при действии внешнего давления. Установлены критерии применимости различных математических моделей и соответствующие погрешности. Сравнение с экспериментальными данными показало хорошее согласование теоретических и экспериментальных результатов. Аналогичные результаты получены для исследования устойчивости при действии кручения. Здесь обобщена на многослойные ортотропные оболочки известная для изотропных однородных оболочек формула Шверина [79].

Конец гл. 4 посвящён исследованию устойчивости трёхслойных композитных оболочек. Исследование проведено на основе наиболее общей модели, построенной на гипотезах ломаной линии [16]. Получено дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее потерю устойчивости трёхслойных композитных оболочек вращения.

При анализе устойчивости цилиндрических оболочек с использованием асимптотических методов получены простые расчётные формулы для вычисления критических усилий при осевом сжатии. Полученные зависимости хорошо согласуются с точным решением, полученным в результате дискретной минимизации по параметрам волнообразования. Из соотношений, полученных на основе наиболее общей модели ломаной линии, естественным путём следуют зависимости для модели прямой линии и классической модели оболочек, а также для многослойных композитных оболочек. Установлены критерии применимости различных математических моделей и погрешности их применения.

Проведён сравнительный экспериментально-теоретический анализ критических нагрузок на основе экспериментальных данных по осевому сжатию порядка 40 трёхслойных оболочек. Отмечены особенности проектирования моделей для экспериментальных исследований. На основе сравнительного анализа рекомендованы поправочные эмпирические коэффициенты.

Получены зависимости для расчёта критических усилий в трёхслойных цилиндрических оболочках при действии внешнего давления. Установлены критерии применения математических моделей и погрешности их применения.

Разработаны методики расчёта критических усилий при кручении трёхслойных ортотропных оболочек. Отмечены особенности волнообразования при слабых заполнителях. Обобщены на трёхслойные

оболочки формулы Шверина. Установлены критерии и погрешности применения различных математических моделей.

Полученные результаты распространены на трёхслойные оболочки с так называемым жёстким наполнителем, когда жёсткости наполнителя и несущих слоёв — одного порядка.

Пятая глава посвящена исследованию потери устойчивости при комбинированном нагружении многослойных и трёхслойных цилиндрических оболочек из композитов. Решены задачи устойчивости при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления, осевого сжатия и наружного давления. Дано сравнение теоретических результатов с имеющимися экспериментальными данными. Решены задачи об устойчивости ортотропных оболочек при совместном действии наружного бокового давления и осевого растяжения. Получены и построены графики взаимного влияния.

Даны рекомендации по учёту взаимного влияния на устойчивость осевого сжатия и кручения, внешнего давления и кручения, комбинированного нагружения осевой сжимающей силой и изгибающим моментом. Рассмотрена задача об устойчивости при поперечном изгибе.

В шестой главе решаются задачи об устойчивости многослойных ортотропных оболочек со сплошным упругим наполнителем и смежные задачи местной потери устойчивости трёхслойных оболочек. Принята модель упругого основания Власова–Пастернака, сопротивление тонкостенных оболочек и несущих слоёв моделируется на основе гипотез неизменной нормали.

Построены зависимости для расчёта критических усилий при действии осевого сжатия, внешнего давления и кручения. Расчётные зависимости содержат обобщённые жёсткости упругого основания и оболочки, что позволяет полностью определить критические усилия. Результаты расчётов сравниваются с экспериментальными данными; показано, что данные расчётов и экспериментов хорошо согласуются. Рассмотрена задача и построены кривые взаимного влияния при совместном действии осевых сжимающих сил и внешнего давления. Даны рекомендации для оценки предельных кривых.

На основе полученных результатов даны рекомендации по расчёту запасов устойчивости при исследовании местной формы потери устойчивости трёхслойных оболочек с лёгким наполнителем.

В седьмой главе на основе традиционного подхода к расчёту конструкций с малой конусностью исследуется устойчивость ортотропных многослойных и трёхслойных конических оболочек при действии осевого сжатия, внешнего давления и крутящих моментов.

В восьмой главе решаются задачи по устойчивости сферических оболочек при действии наружного давления. На основе наиболее общей модели ломаной линии получены разрешающие соотношения для расчёта критических усилий. Из общей модели как частные случаи следуют модель прямой линии и классическая модель оболочек. Даны критерии применимости используемых моделей. На примере анализа

устойчивости конкретных трёхслойных оболочек показано, что полученные расчётные формулы хорошо согласуются с точным решением (погрешность $2 \div 3\%$).

В девятой главе приводятся результаты обработки экспериментальных данных по исследованию устойчивости композитных и металлических цилиндрических оболочек с дефектами в виде отверстий квадратной и круговой форм. Предложена и обоснована математическая модель учёта влияния отверстий на несущую способность. Даны рекомендации по назначению эмпирических коэффициентов, учитывающих снижение несущей способности в зависимости от безразмерного параметра площади дефекта.

В Приложении А приводятся зависимости для расчёта жёсткостей, необходимых при анализе устойчивости многослойных и трёхслойных ортотропных оболочек. Отмечается ряд принципиальных особенностей по сравнению с изотропными и однородными тонкостенными конструкциями. В Приложении Б приведены основные обозначения.

Автор выражает искреннюю благодарность инженерам И. В. Матвеевой и Г. Е. Ташиловой за большую работу по проведению расчётов и оформлению материалов книги.

Книга издаётся при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-08-07010-д).

Введение

К конструкциям современной техники предъявляются требования высокой прочности при жёстких ограничениях по массе. В то же время условия эксплуатации конструкций становятся все более неблагоприятными: помимо интенсивного силового нагружения, они испытывают воздействие высоких и низких температур, эрозии, химических реагентов и т. п. В этих условиях наиболее эффективными становятся многослойные конструкции, выполненные из композиционных материалов (КМ). В начальные времена интенсивного применения КМ они считались прекрасными заменителями металлов. К настоящему времени КМ сами стали незаменимыми при создании многих изделий современной техники.

Особое место в ряду многослойных конструкций из КМ занимают трёхслойные конструкции, применение которых позволяет в комплексе решить ряд важных задач при проектировании изделий: обеспечить высокую прочность и жёсткость, теплоизоляцию и теплостойкость, снизить затраты на технологические процессы и т. п. В данной книге основное внимание уделяется исследованию устойчивости именно трёхслойных конструкций. Из решения задач для трёхслойных конструкций как частный случай получены решения для многослойных композитных конструкций.

Трёхслойные оболочечные конструкции, как известно, состоят из двух тонкостенных достаточно жёстких несущих слоёв и сравнительно толстого слоя маложёсткого и малоплотного заполнителя между ними. Несущие слои обычно воспринимают растягивающие и сжимающие нагрузки, а заполнитель должен обеспечить совместное сопротивление несущих слоёв при изгибе. В современных трёхслойных конструкциях из КМ несущие слои выполняются в виде слоистых пакетов и в общем случае различаются между собой по толщинам и жесткостям, поэтому трёхслойная конструкция оказывается несимметричной по толщине.

Несущий слой толщиной h_i ($i = 1, 2$) в общем случае состоит из N_i слоёв (подслоёв), каждый из которых имеет толщину $h_i^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, N_i$). Свойства упругости ортотропного подслоя характеризуются модулями упругости $E_1^{(k)}$ и $E_2^{(k)}$ в двух направлениях, модулем $G_{12}^{(k)}$ сдвига в тангенциальной плоскости, коэффициентом Пуассона $\nu_1^{(k)}$, а также модулями $G_{13}^{(k)}$, $G_{23}^{(k)}$ поперечного сдвига. Таким образом, габаритно-жесткостные свойства каждого подслоя

несущего слоя в трёхслойной оболочечной конструкции характеризуются в общем случае семью параметрами. Точно так же слой заполнителя толщиной δ может в свою очередь состоять из N_3 слоёв, и каждый подслой характеризуется не менее, чем восемью габаритно-жесткостными параметрами (к семи перечисленным добавляется модуль упругости E_3 в направлении нормали).

Из сказанного следует, что анизотропия и сложная структура трёхслойных оболочечных конструкций из КМ приводят к значительному росту числа габаритно-жесткостных параметров, определяющих прочность и устойчивость конструкции. Общее число этих параметров в трёхслойной оболочке из КМ определяется величиной

$$P_N = 7(N_1 + N_2) + 8N_3 + 4, \quad (0.1)$$

где N_1 , N_2 , N_3 — числа подслоёв соответственно в первом, втором несущих слоях и слое заполнителя ($N = N_1 + N_2 + N_3$). Последнее слагаемое, равное четырём, соответствует в общем случае двум радиусам кривизны оболочки и двум её размерам в плане. Отсюда можно видеть, что в реальных трёхслойных конструкциях из КМ число рассматриваемых габаритно-жесткостных параметров достигает десятков. Даже в простейшем случае ортотропной цилиндрической оболочки с однородными одинаковыми несущими слоями ($N_1 + N_2 = 1$) и однородным заполнителем ($N_3 = 1$) число параметров достигает семнадцати ($P_2 = 7 + 8 + 2 = 17$).

Такая многопараметричность габаритно-жесткостных свойств трёхслойных оболочечных конструкций чрезвычайно затрудняет выявление основополагающих законов сопротивления таких конструкций и получение приемлемых для инженерного анализа расчётных формул. В этой ситуации важно установить минимальное количество комплексных габаритно-жесткостных факторов, определяющих напряжённо-деформированное состояние (НДС), жёсткость и устойчивость многослойных конструкций, и отыскать общие закономерности сопротивления в зависимости от этих факторов.

Рассмотрим основные математические модели (расчётные схемы), применяемые при анализе трёхслойных конструкций. Как известно, основной эффект повышения изгибной жёсткости в трёхслойных конструкциях достигается разнесением несущих слоёв на некоторую величину H , которая определяется толщинами заполнителя и несущих слоёв:

$$H \approx \delta + \frac{1}{2}(h_1 + h_2). \quad (0.2)$$

При этом изгибная жёсткость трёхслойного пакета пропорциональна квадрату величины H . Таким образом, разнесение несущих слоёв позволяет существенно повысить сопротивление трёхслойных конструкций действию изгибающих моментов. В то же время при нагружении поперечными силами в заполнителе возникают значительные

поперечные сдвиговые деформации, проистекающие от малой жёсткости заполнителя на сдвиги и увеличения относительной толщины конструкции. В связи с этим во многих практически важных случаях становятся непригодными математические модели, основанные на классических гипотезах неизменной нормали. Модернизация этих моделей связана с различными способами учёта деформаций заполнителя.

В зависимости от конструктивно-жесткостных параметров и условий нагружения трёхслойных тонкостенных конструкций при решении прикладных задач обычно используют один из следующих комплексов гипотез:

- классические гипотезы неизменной нормали;
- гипотезы прямолинейного элемента (прямой линии);
- гипотезы ломаной линии при несжимаемом по нормали заполнителе;
- гипотезы, учитывающие сжимаемость заполнителя по нормали.

Классические гипотезы неизменной нормали применяются в случае достаточно жёсткого заполнителя и малой относительной толщины оболочечной конструкции. Заполнитель считается абсолютно жёстким на сдвиг и обжатие по нормали. В соответствии с этими гипотезами отрезок $abcd$ (рис. 0.1 *a*) нормали поворачивается на угол θ и переходит

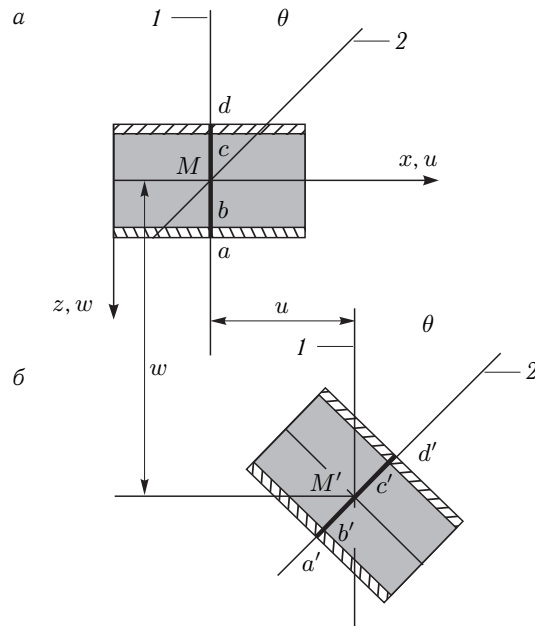


Рис. 0.1. Деформация трёхслойного пакета по классической модели: $abcd$ — элемент до деформации; $a'b'c'd'$ — элемент после деформации; 1 — нормали до деформации; 2 — нормали после деформации; θ — угол поворота нормали

после деформации в положение $a'b'c'd'$. При этом его длина не изменяется, он остается прямолинейным и нормальным к деформированной оси (рис. 0.1 б). Деформированное состояние при изгибе трёхслойной конструкции определяется в этом случае её прогибом. В соответствии с моделью неизменной нормали сопротивляются также многослойные тонкостенные оболочечные конструкции.

Гипотезы прямолинейного элемента [13, 37, 61] используются при достаточно (но не абсолютно) жёстком на сдвиги заполнителе и тонких несущих слоях, слабо сопротивляющихся изгибу. В этом случае (рис. 0.2 а) отрезок $abcd$ нормали после деформации

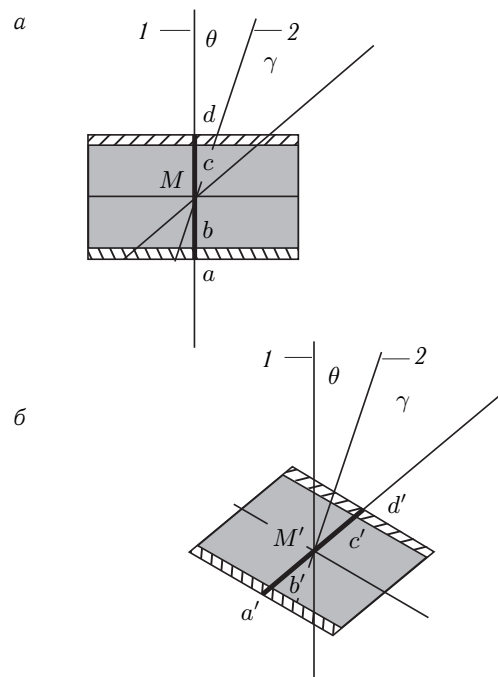


Рис. 0.2. Деформация трёхслойного пакета по модели прямолинейного элемента: $abcd$ — элемент до деформации; $a'b'c'd'$ — элемент после деформации; I — нормаль до деформации; 2 — нормаль после деформации; θ — угол поворота нормали; γ — угол поперечного сдвига пакета; $\theta + \gamma$ — угол полного поворота элемента $abcd$ относительно начальной нормали I

переходит в отрезок $a'b'c'd'$ (рис. 0.2 б), который остаётся прямолинейным и сохраняет длину, но перестаёт быть нормалью к упругой линии: за счёт поперечных сдвигов в заполнителе отрезок $a'b'c'd'$ поворачивается относительно нормали к деформированной оси на угол сдвига γ . Суммарный поворот элемента относительно первоначальной

нормали составляет $\gamma + \theta$, где θ — угол поворота нормали (рис. 0.2 б). Деформированное состояние конструкции в рассматриваемом случае определяется прогибом и поперечными сдвигами всего пакета. Расчётную схему для трёхслойных или многослойных конструкций, основанную на гипотезах прямой линии, в литературе часто связывают со сдвиговой моделью Тимошенко, предложенной им для учёта поперечных сдвигов в фермах и балочных элементах. Типичными оболочками, сопротивляющимися в соответствии с моделью прямой линии, являются сравнительно толстостенные многослойные оболочки из КМ, а также трёхслойные конструкции с сотовым наполнителем.

Модель ломаной линии [16, 19] необходима для исследования трёхслойных конструкций с достаточно жёсткими на изгибы несущими слоями и маложёстким наполнителем. При этом обычно предполагается, что несущие слои сопротивляются в соответствии с классическими гипотезами, а недеформируемый по нормали наполнитель претерпевает сдвиговые деформации. Отрезок $abcd$ первоначальной нормали (рис. 0.3 а) в процессе деформирования переходит в ломаную

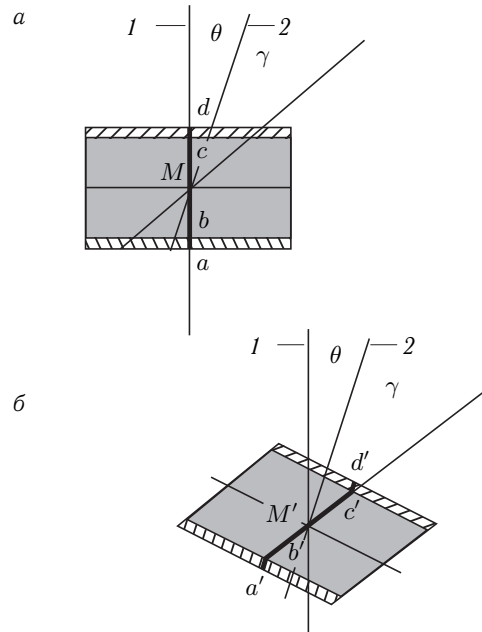


Рис. 0.3. Деформация трёхслойного пакета по модели ломаной линии: $abcd$ — элемент до деформации; $a'b'c'd'$ — элемент после деформации; 1 — нормаль до деформации; 2 — нормаль после деформации; θ — угол поворота нормали; γ — угол поперечного сдвига наполнителя; $\theta + \gamma$ — угол поворота элемента bc наполнителя относительно начальной нормали 1

линию $a'b'c'd'$ (рис. 0.3б), полная длина которой равна длине первоначального отрезка $abcd$. Часть $b'c'$ ломаной, относящаяся к заполнителю, повёрнута относительно новой нормали на угол сдвига γ , а части ломаной $a'b'$, $c'd'$, связанные с несущими слоями, повёрнуты на угол θ и совпадают по направлению с новой нормалью, поскольку считается, что поперечные сдвиги в несущих слоях отсутствуют. Таким образом, излом отрезка $abcd$ произошёл вследствие разных законов сопротивления поперечному изгибу для несущих слоёв и для заполнителя. В соответствии с моделью ломаной линии сопротивляются, например, трёхслойные оболочечные конструкции со слабым на сдвиг пенопластовым заполнителем.

Расчётные схемы, учитывающие деформации заполнителя в направлении нормали, сложны, приводят к разрешающим дифференциальным уравнениям высокого порядка и описывают специфическое напряжённо-деформированное состояние весьма локального характера. В связи с этим такие модели в расчётной практике применяются редко. Например, в [49, 50, 78] такие модели использовались для анализа устойчивости трёхслойных конструкций. Во многих случаях податливость заполнителя в направлении нормали можно учитывать с помощью различных моделей упругого основания [44]. Так решены задачи о местной устойчивости (выпучивании) несущих слоёв при сжатии трёхслойных конструкций [73].

Обычно при исследовании НДС и устойчивости трёхслойных конструкций считается, что заполнитель не сопротивляется в тангенциальной плоскости, а сопротивляется только поперечным сдвигам. В этом случае заполнитель принято называть лёгким. В большинстве трёхслойных конструкций в качестве заполнителя используются лёгкие типы пенопластов или различного рода соты, поэтому гипотеза о лёгком заполнителе вполне оправдана. Если жёсткости заполнителя соизмеримы с жесткостями несущих слоёв, то заполнитель принято называть жёстким. В этом случае трёхслойная конструкция представляет собой частный случай многослойной конструкции и, как показали исследования [62, 64], к ней применимы модели прямой линии или даже неизменной нормали.

Как уже отмечалось, усложнение математических моделей приводит к повышению порядка разрешающих дифференциальных уравнений, что часто исключает возможность получения обзримых расчётных соотношений, пригодных для оперативного инженерного анализа. В связи с этим естественно стремиться по возможности упростить модель, с тем чтобы без потери точности получить простые расчётные формулы, наглядно отражающие основные закономерности сопротивления сложных по структуре многослойных конструктивных элементов. Отсюда проистекает задача чёткого определения границ применимости тех или иных математических моделей. В своё время оценки границ применимости различных расчётных моделей для изотропных оболочек

были проведены в [46, 47], а для ортотропных — в [37]. Более чётко границы применимости для трёхслойных ортотропных оболочек из КМ были установлены в [9, 64, 72].

Отметим принципиальную особенность исследования НДС, жёсткости и устойчивости анизотропных многослойных и, в частности, трёхслойных оболочечных конструкций, выполненных из КМ. Речь идёт о выборе координатной поверхности (поверхности приведения). В случае классических однородных по толщине оболочечных конструкций и пластин за поверхность приведения принимают срединную поверхность, которая в большинстве случаев совпадает с нейтральной поверхностью.

В отличие от однородных конструкций, в многослойных ортотропных оболочках с произвольным расположением слоёв по толщине срединная и нейтральная поверхности в большинстве случаев не совпадают. Кроме того, поскольку каждый ортотропный слой имеет четыре независимых постоянных упругости, а слои могут быть расположены по толщине произвольным образом, многослойные ортотропные оболочки не имеют единой нейтральной поверхности. При этом жёсткости многослойного пакета на растяжения-сжатия и сдвиги не зависят от выбора поверхности приведения, а изгибно-крутильные жёсткости существенно зависят от этого выбора. В каждой многослойной ортотропной оболочечной конструкции имеется в общем случае четыре поверхности, относительно которых соответствующие статические моменты обращаются в нуль, а изгибно-крутильные жёсткости принимают минимальные значения. Именно эти минимальные жёсткости определяют сопротивление многослойных конструкций изгибу и кручению. В этом состоит известный принцип минимальных жесткостей [30, 32], позволяющий получить простые инженерные решения многих задач по расчёту на прочность многослойных оболочечных конструкций с произвольной структурой по толщине [68].

Необходимо также обратить внимание на методическую ошибку при определении жесткостей многослойной конструкции, которая иногда встречается при проведении расчётов реальных конструкций. Минимальные жёсткости, определяющие прочность и устойчивость многослойных ортотропных конструкций, включают в себя жёсткости D_1 , D_2 на изгиб в двух направлениях, крутильную жёсткость D_3 и жёсткость D_4 , соответствующую учёту коэффициентов Пуассона при изгибе. Кроме того, ортотропная оболочечная конструкция имеет жёсткости B_1 , B_2 на растяжение-сжатие в двух направлениях, на сдвиги B_3 и жёсткость B_4 , соответствующую учёту коэффициентов Пуассона при растяжении-сжатии.

Иногда в практических расчётах вместо указанных жесткостей используют так называемые приведённые («средние») модули

упругости. Указанные модули упругости определяются иногда как отношение жёсткости B на растяжение-сжатие к полной толщине h оболочки:

$$E_{\text{ср}} = \frac{B}{h}. \quad (0.3)$$

Так определив приведённый («средний») модуль упругости, вычисляют по известной формуле «среднюю» изгибную жёсткость

$$D_{\text{ср}} = \frac{E_{\text{ср}} h^3}{12}. \quad (0.4)$$

Как показал анализ [41], вычисленная таким образом изгибная жёсткость может существенно (в ту или другую сторону) отличаться от истинного значения минимальной изгибной жёсткости D пакета.

На рис. 0.4 [41] показано отношение минимальной изгибной жёсткости D к «средней» жёсткости $D_{\text{ср}}$ в зависимости от 12 вариантов чередования слоёв в семислойных конструкциях двух типов. Из рисунка следует, что при расчёте изгибной жёсткости по формулам (0.3), (0.4) погрешность расчёта достигает двух раз. Меняя только чередование слоёв, можно добиться увеличения минимальной жёсткости более,

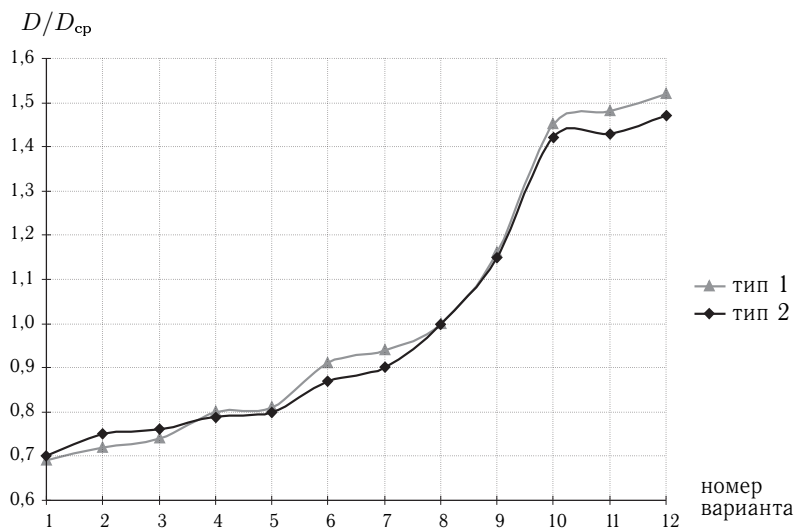


Рис. 0.4. Зависимость минимальной изгибной жёсткости от порядка чередования слоёв

чем в 2 раза: от относительного значения 0,7, соответствующего первому варианту, до значения 1,5, отвечающего двенадцатому варианту. При этом ясно, что если более жёсткие слои располагаются по периферии многослойного пакета, то минимальная жёсткость D будет выше

«средней» $D_{\text{ср}}$. Если же более жёсткие слои располагаются вблизи геометрической середины пакета, то усреднённая жёсткость $D_{\text{ср}}$ будет выше истинной минимальной жёсткости D . Таким образом, в зависимости от расположения слоёв по толщине многослойной оболочки расчёты на прочность и устойчивость по «средним» модулям могут происходить как в запас, так и в не запас прочности. Методы определения жесткостей многослойных ортотропных оболочек изложены в Приложении А.

Глава 1

РАЗРЕШАЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОСЛОЙНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

1.1. Разрешающие соотношения для исследования устойчивости трёхслойных ортотропных оболочек с лёгким заполнителем

Рассмотрим оболочку вращения, геометрические параметры которой показаны на рис. 1.1. Трёхслойный пакет, составляющий стенку оболочки, показан на рис. 1.2 и состоит из двух несущих слоёв с толщинами h_1 , h_2 и слоя заполнителя толщиной δ . Несущие слои

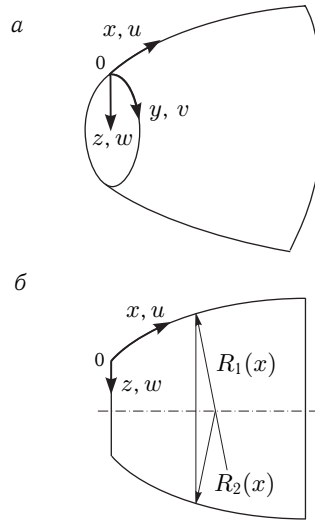


Рис. 1.1. Геометрия оболочки вращения и принятая система координат: *а* — система координат; *б* — геометрия оболочки вращения

могут быть выполнены в виде неоднородных по толщине многослойных ортотропных пакетов и различаться между собой. Ортотропный заполнитель в общем случае также может быть изготовлен в виде многослойного пакета. Полагаем, как обычно, что оси анизотропии (ортотропии) совпадают с главными направлениями кривизны оболочки.

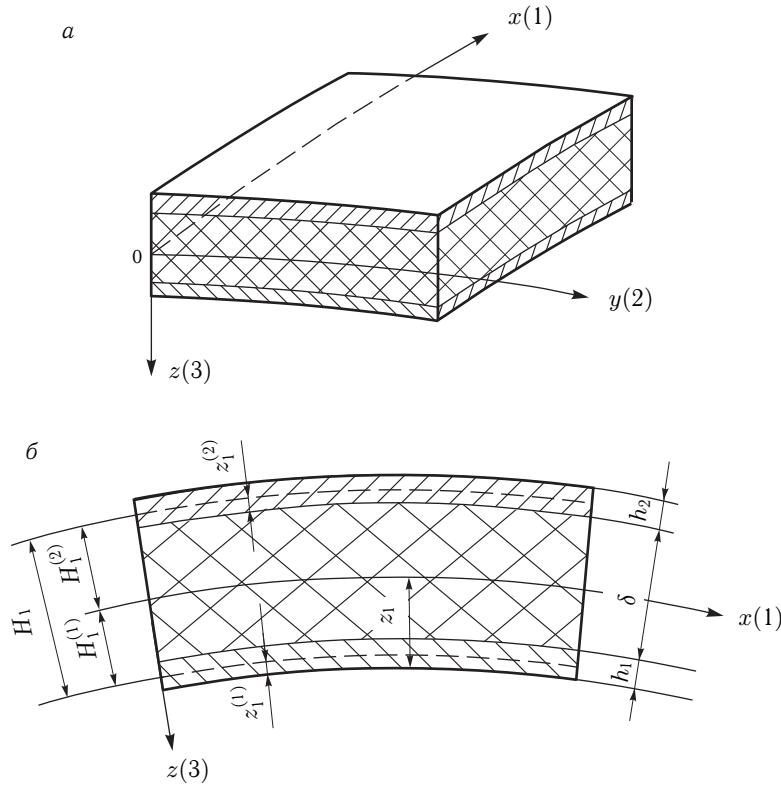


Рис. 1.2. Структура трёхслойного пакета: *a* — система координат; *b* — геометрические размеры

В разделе 1.1 исследуется общая потеря устойчивости, когда трёхслойный пакет изгибается как единое целое. В случае местной потери устойчивости оболочка в целом не теряет форму, а изгибаются (сморщиваются) лишь несущие слои (см. раздел 2.3 и гл. 6).

При выводе разрешающих соотношений для исследования общей устойчивости примем за основу гипотезы ломаной линии при несжимаемом по нормали лёгком заполнителе [16], хорошо отражающие сопротивление несущих трёхслойных конструкций. Эти гипотезы состоят в следующем:

- сопротивление несущих слоёв описывается классическими гипотезами неизменной нормали;
- заполнитель сопротивляется только поперечным сдвигам; жёсткости его в тангенциальной плоскости равны нулю;
- деформациями пакета в направлении нормали (оси z) пренебрегаем.

При таких предпосылках жёсткости слоёв, из которых состоят наружные несущие слои, определяются модулями упругости $E_1^{(k)}$, $E_2^{(k)}$, $G_{12}^{(k)}$, коэффициентами Пуассона $\nu_1^{(k)}$, $\nu_2^{(k)}$ и толщинами $h^{(k)}$ (k — номер слоя). Если наполнитель выполнен в виде многослойного пакета, то его сдвиговые жёсткости определяются модулями $G_{13}^{(k)}$, $G_{23}^{(k)}$ поперечного сдвига и толщинами $\delta^{(k)}$ составляющих слоёв. Во многих случаях наполнитель однороден, и тогда его жёсткости на сдвиги определяются модулями сдвига G_{13} , G_{23} и толщиной δ (рис. 1.2).

При исследовании НДС, устойчивости и колебаний многослойных оболочечных конструкций из композитов коэффициенты Пуассона в большинстве случаев слабо влияют на конечный результат. Поэтому обычно принимается, что коэффициенты Пуассона одинаковы для всего пакета и равны некоторым приведенным величинам ν_1 , ν_2 . Формулы для расчёта приведенных коэффициентов ν_1 , ν_2 даны в Приложении А.

Считаем также, что оболочка полагая, т. е. параметры Ламе её координатной поверхности мало изменяются и в пределах рассматриваемой области полагаются постоянными.

На основе указанных предпосылок можно получить следующее дифференциальное уравнение для исследования устойчивости трёхслойных пологих оболочек вращения [66, 72]:

$$\begin{aligned}
D_1^* \left[\nabla_1^4 - \left(\bar{\omega}_{2\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{\omega}_{1\kappa} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla_{2*}^4 \right] \nabla_2^4 w + \\
+ \left(\frac{\bar{B}_2}{R_2^2} \nabla_R^4 + D_1^{\text{hc}} \nabla_1^4 \nabla_2^4 \right) \nabla_c^4 w = \nabla_2^4 \nabla_c^4 q w; \\
\nabla_1^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_1 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad \nabla_2^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \\
\nabla_{2*}^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \alpha_2^* \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_2^* \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \quad \nabla_R^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2; \\
\nabla_c^4 = 1 - (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{2\kappa}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{1\kappa}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{2\kappa} \nabla_{2*}^4; \\
\alpha_1 = 2 \left(2 \frac{D_{12}}{D_1} + \nu_2 \right); \quad \beta_1 = \frac{D_2}{D_1}; \\
\alpha_2 = \frac{\bar{B}_2}{B_{12}} - 2 \nu_2; \quad \beta_2 = \frac{B_2}{B_1}; \quad \alpha_2^* = \frac{\bar{B}_2^*}{B_{12}^*} - 2 \nu_2; \quad \beta_2^* = \frac{B_2^*}{B_1^*}; \\
\bar{\omega}_1 = \frac{D_1^*}{K_1}; \quad \bar{\omega}_2 = \frac{D_2^*}{K_2}; \quad \bar{\omega}_{1\kappa} = \frac{D_{12}^*}{K_1}; \quad \bar{\omega}_{2\kappa} = \frac{D_{12}^*}{K_2}; \\
q = T_1^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2S^0 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + T_2^0 \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad (1.1)
\end{aligned}$$

T_1^0, T_2^0, S^0 — докритические безмоментные усилия, действующие в оболочке.

Уравнение (1.1) можно записать также в следующем операторном виде:

$$(D_1^{\text{hc}} + D_1^* \Omega_{xy}) \nabla_1^4 w + \frac{\bar{B}_2}{R_2^2} \frac{\nabla_R^4}{\nabla_2^4} w = qw;$$

$$\Omega_{xy} = \frac{1 - \left(\bar{\omega}_{2\kappa} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{\omega}_{1\kappa} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\nabla_{2*}^4}{\nabla_1^4}}{\nabla_c^4}. \quad (1.2)$$

В формулах (1.1), (1.2) введены следующие обозначения:

B_1, B_2, B_{12} — жёсткости трёхслойного пакета на растяжение-сжатие и сдвиг в плоскости x, y ;

$$\bar{B}_2 = B_2(1 - \nu_1 \nu_2); \quad \bar{B}_2^* = B_2^*(1 - \nu_1 \nu_2);$$

$$B_1^* = \frac{4B_1^{(1)} B_1^{(2)}}{B_1}; \quad B_2^* = \frac{4B_2^{(1)} B_2^{(2)}}{B_2}; \quad B_{12}^* = \frac{4B_{12}^{(1)} B_{12}^{(2)}}{B_{12}};$$

$B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_{12}^{(1)}, B_1^{(2)}, B_2^{(2)}, B_{12}^{(2)}$ — жёсткости на растяжение-сжатие и сдвиги соответствующих несущих слоев;

D_1, D_2, D_{12} — минимальные изгибные и крутильная жёсткости трёхслойного пакета;

$$D_1 = D_1^{\text{hc}} + D_1^*; \quad D_2 = D_2^{\text{hc}} + D_2^*; \quad D_{12} = D_{12}^{\text{hc}} + D_{12}^*;$$

$D_1^{\text{hc}}, D_2^{\text{hc}}, D_{12}^{\text{hc}}$ — суммарные минимальные изгибные и крутильная жёсткости несущих слоёв;

D_1^*, D_2^*, D_{12}^* — минимальные изгибные и крутильная жёсткости трёхслойного пакета с безмоментными ($D_1^{\text{hc}} = D_2^{\text{hc}} = D_{12}^{\text{hc}} = 0$) несущими слоями;

K_1, K_2 — жёсткости трёхслойного пакета на поперечные сдвиги в плоскостях xz и yz соответственно.

Методы определения указанных жесткостей изложены в Приложении А.

Решение дифференциального уравнения (1.1) будем искать в виде [79]:

$$w(x, y) = w_0 \sin \frac{\lambda x}{R} \cos \frac{ny}{R}; \quad w(x, y) = w_0 \sin \frac{\lambda x + ny}{R};$$

$$\lambda = \frac{m\pi R}{\ell}; \quad (1.3)$$

m, n — параметры волнообразования; R, ℓ — характерные размеры оболочки.