

Кульчин Ю.Н.  
Витрик О.Б.  
Камшилин А.А.  
Ромашко Р.В.

**Адаптивные методы  
обработки  
спекл-модулированных  
оптических полей**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 535  
ББК 22.34  
А 28



*Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 09-02-07016*

Авторский коллектив:

Кульчин Ю.Н., Витрик О.Б., Камшилин А.А., Ромашко Р.В.

**Адаптивные методы обработки спекл-модулированных оптических полей.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 288 с. — ISBN 978-5-9221-1194-2.

В настоящей монографии обобщаются результаты фундаментальных исследований в области обработки стохастических оптических полей. Рассмотрены основные физические принципы, лежащие в основе методов обработки спекл-структур, включающие как классические стационарные методы пространственной фильтрации оптических сигналов, голографической и спекл-интерферометрии, так и адаптивные методы, являющиеся дальнейшим развитием классических. Приводится описание информационно-измерительных систем, использующих классические и адаптивные методы обработки спекл-структур, предназначенных для регистрации перемещений, механических напряжений, скоростей, микро- и макропрофиля поверхности различных объектов.

Книга рассчитана на широкий круг специалистов, занимающихся оптической обработкой информации, оптоэлектроникой, теорией и практикой разработки систем телеметрии, и может быть полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1194-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© Коллектив авторов, 2009

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	6
<b>Глава 1. Случайные величины и процессы в оптике . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1. Основные понятия теории вероятностей . . . . .	9
1.2. Статистические средние. Моменты случайных величин. Центральные моменты случайных величин . . . . .	12
1.3. Характеристическая функция случайной величины . . . . .	14
1.4. Плотность распределения преобразованных случайных величин	15
1.5. Многомерные распределения случайных величин . . . . .	16
1.6. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированные величины . . . . .	17
1.7. Распределения суммы, произведения и частного случайных величин	18
1.8. Центральная предельная теорема. Гауссовские случайные величины	20
1.9. Суммы случайных фазоров. Амплитуда и фаза световой волны, рассеянной диффузным объектом. Распределение интенсивности рассеянного когерентного света . . . . .	21
1.10. Распределение интенсивности частично-когерентного светового излучения, рассеянного неподвижным объектом . . . . .	24
1.11. Случайные процессы. Основные понятия . . . . .	26
1.12. Стационарные случайные процессы . . . . .	28
1.13. Эргодические случайные процессы . . . . .	31
1.14. Спектр мощности стационарных случайных процессов. Взаимный спектр мощности . . . . .	33
1.15. Теорема Винера–Хинчина . . . . .	34
Список литературы к главе 1 . . . . .	36
<b>Глава 2. Принципы корреляционной обработки спекловых полей</b>	<b>37</b>
2.1. Спекл-структуры. Физические причины их формирования и основные статистические параметры . . . . .	37
2.2. Основные методы обработки спекл-структур . . . . .	43
2.3. Корреляция интенсивностей спекловых полей при поперечном смещении диффузоров . . . . .	47
2.4. Корреляция интенсивностей спекловых полей при аксиальной деформации многомодовых волоконных световодов в случае широкого спектра направляемых мод . . . . .	51

2.5. Корреляция интенсивностей спекловых полей при аксиальной деформации одноволоконных многомодовых интерферометров в случае узкого спектра направляемых мод . . . . .	56
Список литературы к главе 2 . . . . .	61
<b>Глава 3. Методы корреляционной обработки спекл-модулированных сигналов с применением оптических пространственных фильтров и приборов с зарядовой связью . . . . .</b>	<b>65</b>
3.1. Особенности корреляционной обработки спекл-модулированных сигналов оптическим пространственным фильтром . . . . .	66
3.2. Особенности адаптивной корреляционной обработки спекл-сигналов с использованием приборов с зарядовой связью . . . . .	74
3.3. Измерения параметров деформации объектов корреляционным методом . . . . .	85
Список литературы к главе 3 . . . . .	95
<b>Глава 4. Пространственная фильтрация динамических спеклов . . . . .</b>	<b>98</b>
4.1. Статистические свойства динамических спеклов . . . . .	99
4.1.1. Флуктуации интенсивности рассеянного света (100). 4.1.2. Функция корреляции и спектр мощности (101). 4.1.3. Динамические спеклы при освещении гауссовым лучом и распространении в свободном пространстве (104). 4.1.4. Типы изменений спекл-картины: трансляция и кипение (107).	
4.2. Измерение скорости динамических спеклов . . . . .	113
4.2.1. Теория пространственной фильтрации (115). 4.2.2. Различные типы пространственных фильтров (120).	
4.3. Измерение профиля объекта с помощью динамических спеклов . . . . .	128
4.3.1. Конфигурация профилометра на динамических спеклах (128). 4.3.2. Корреляционные свойства динамических спеклов при сканировании объекта лазерным лучом (132). 4.3.3. Точность измерений в системах с динамическими спеклами (138). 4.3.4. Погрешность определения частоты модуляции фототока (140). 4.3.5. Экспериментальная оценка достижимой точности измерений (144). 4.3.6. Многоканальный профилометр (147). 4.3.7. Погрешность измерения $z$ -расстояния и время отклика (151).	
Список литературы к главе 4 . . . . .	152
<b>Глава 5. Методы статической голографии в обработке спекловых полей . . . . .</b>	<b>156</b>
5.1. Общий принцип голографии . . . . .	156
5.2. Измерительные системы на основе статических голограмм . . . . .	160
5.2.1. Голографический интерферометр (160). 5.2.2. Голографический коррелятор (164).	
Список литературы к главе 5 . . . . .	168

---

Глава 6. <b>Адаптивные интерферометры на основе динамических голограмм</b> .....	170
6.1. Формирование динамической голограммы в фоторефрактивном кристалле .....	172
6.2. Векторная модель двухволнового взаимодействия на фоторефрактивной динамической голограмме .....	184
6.3. Основные параметры адаптивных интерферометров на основе динамических голограмм .....	190
6.3.1. Чувствительность (190). 6.3.2. Адаптивность (198). 6.3.3. Оптическая мощность (202).	
6.4. Схемы адаптивных интерферометров, работающих в линейном режиме .....	203
6.4.1. Адаптивные интерферометры на основе дрейфовой голограммы (204). 6.4.2. Адаптивные интерферометры на основе диффузионных голограмм (206). 6.4.3. Сравнительный анализ схем реализаций адаптивных интерферометров (218).	
Список литературы к главе 6 .....	221
Глава 7. <b>Оптические Novelty-фильтры — адаптивные голографические корреляторы</b> .....	225
7.1. Процесс взаимодействия двух плоских волн на динамических голограммах в фоторефрактивных кристаллах .....	227
7.2. Передаточная характеристика оптического Novelty-фильтра . . .	231
7.3. Особенности функционирования оптических Novelty-фильтров .	234
7.3.1. Высокочастотный и низкочастотный Novelty-фильтры (234). 7.3.2. Полосовой Novelty-фильтр (236).	
7.4. Novelty-фильтры, основанные на использовании явления фантинга в фоторефрактивных кристаллах .....	237
7.4.1. Функциональные фильтры для обработки изображений (239). 7.4.2. Адаптивные корреляционные высокочастотные фильтры спекл-модулированных сигналов реального времени (242).	
Список литературы к главе 7 .....	245
Глава 8. <b>Многоканальные адаптивные системы на основе динамических голограмм</b> .....	247
8.1. Пространственное мультиплексирование .....	252
8.2. Угловое мультиплексирование .....	256
8.3. Спектральное мультиплексирование .....	266
Список литературы к главе 8 .....	279

## **ВВЕДЕНИЕ**

Бурное развитие современной техники в конце XX и начале XXI веков характеризуется разнообразием контролируемых процессов и измеряемых физических величин, достаточно широким частотным диапазоном определяемых сигналов и высокими требованиями к метрологическому обеспечению. В связи с этим широко используются автоматизированные системы контроля и управления, сводящие к минимуму участие и влияние человеческого фактора. Такие автоматизированные системы в различных прикладных областях создаются для того, чтобы более эффективно решать задачи, связанные с исследованием физических объектов и явлений и принятием управленческих решений в реальном времени. Одними из основных операций в подобных системах являются измерение, запись и хранение физических величин, которые должны производиться в разнообразных режимах работы, при организации работы с дистанционным доступом к объекту исследования и функционировании в широком диапазоне изменения параметров окружающей среды, в частности температуры, давления, электромагнитных помех и т.д. Разработка и внедрение современных систем автоматизации неразрывно связаны с решением ряда комплексных проблем, среди которых ключевое место занимает создание высокочувствительных и надежных датчиков физических величин, обладающих свойством адаптивности, т.е. способностью самостоятельно вносить поправки на воздействие постороннего влияющего фактора и производить коррекцию рабочих характеристик.

Фундаментальные открытия в области физической и квантовой оптики второй половины XX века, бурное развитие физики и техники лазеров послужили основой для создания нового направления измерительной техники, базирующегося на использовании оптических эффектов для регистрации и контроля разнообразных физических величин, таких, как температура, давление, деформация, скорость, ускорение и т.д. Подобные приборы, получившие название оптических датчиков физических величин, обладают многими важными эксплуатационными качествами. Они могут быть нечувствительными к влиянию электромагнитных помех, работать в условиях высокой взрыво- и пожароопасности, в условиях агрессивных сред, иметь малые размеры и массу, а также использоваться для дистанционных измерений. Кроме того, они достаточно легко и просто сопрягаются с современными вычислительными средствами и системами передачи данных.

Высокая точность оптических, в том числе и волноводных датчиков физических величин определяется использованием в них когерентного светового излучения. Однако при прохождении когерентного светового излучения через оптические системы или при отражении его от поверхностей объектов наблюдается модуляция волнового фронта световой волны спеклами — хаотическим чередованием светлых и темных пятен. Явление возникновения спеклов неразрывно связано с использованием высококогерентного лазерного излучения. Физическая причина возникновения спеклов чрезвычайно проста: оно обусловлено либо наличием шероховатости оптических элементов (микроскопическими вариациями рельефа, масштаб которых сопоставим с длиной волны используемого света), либо наличием хаотически распределенных микронеоднородностей показателя преломления материала оптических элементов (посторонних микровключений) и вариациями оптической плотности среды или атмосферы, через которую распространяются световые лучи. Каждая точечная неоднородность вышеупомянутых объектов рассеивает некоторое количество света в направлении наблюдателя. Вследствие высокой когерентности лазерный свет, рассеянный одной из точек объекта, интерферирует со светом, рассеянным любой другой его точкой. В результате когерентные световые волны, используемые в оптических датчиках физических величин, практически всегда являются пространственно промодулированными хаотической интерференционной структурой. Будучи направленными на экран или детектируемыми глазом, эти волны оказываются зернистыми, состоящими из хаотически распределенных темных и светлых пятен, которые и получили название спеклов.

На ранних этапах развития когерентной оптики наличие зашумляющей волновые фронты спекловой структуры рассматривалось только как нежелательный фактор при разработке измерительных систем или систем формирования изображений. Однако фундаментальные исследования Дж. Берча и Дж. Токарского [1] показали, что феномен спекл-структуры может найти применение при создании основ измерительной техники нового типа. Эти исследования, а также работы М. Франсона, Дж. Гудмена, Ч. Веста и ряда других ученых [2–4] привели к формированию в 60–70 гг. XX века нового направления в метрологии — спекл-интерферометрии. Благодаря интерференционному сравнению спекловых полей, формируемых объектами в различные моменты времени, методы спекл-интерферометрии позволяют получать информацию о величине перемещения объектов, скорости их движения, амплитуде и частоте их вибраций, оценивать шероховатость поверхности объектов и т. д.

Начиная с 80-х годов XX века классические методы спекл-интерферометрии получили дальнейшее развитие, что позволило значительно расширить диапазон их применения в задачах метрологии. В частности, оказалось возможным разрабатывать методы измерений, способные

адаптироваться к случайным изменениям пространственной структуры спекл-модулированных волн, вызываемым неконтролируемыми внешними факторами, и обеспечивать режим реального времени в случае регистрации динамических спеклов, когда объекты перемещаются с высокими скоростями. Новым применением таких методов стала обработка сигналов одноволоконных многомодовых интерферометров (ОМИ), которые формируют спекл-структуры поля в результате когерентного сложения полей большого числа собственных волн многомодового волоконного световода.

Данная монография обобщает результаты проведенных в течение последних 30 лет фундаментальных исследований в области обработки спекл-структур, включающие как классические методы пространственной фильтрации оптических сигналов, голографической и спекл-интерферометрии, так и адаптивные методы реального времени, являющиеся дальнейшим развитием классических. В ней рассматриваются физические модели формирования спекл-структур неподвижными и движущимися диффузными объектами и многомодовыми волоконными световодами. На основе методов статистической оптики исследуются корреляционные свойства спекл-структур, обосновывается спекл-корреляционный метод обработки сигналов одноволоконных многомодовых интерферометров, излагаются принципы построения и функционирования оптических Novelty-фильтров для распознавания и выделения происходящих в реальном времени изменений в пространственной структуре оптических сигналов, проводится подробное описание классических и принципиально новых информационно-измерительных систем для регистрации перемещений, механических напряжений, скоростей, микро- и макропрофиля поверхности различных объектов с использованием адаптивных методов обработки спекловых полей.

Авторы считают, что данная монография может оказаться полезной как специалистам, так и инженерам и аспирантам, работающим в области оптической обработки информации, оптоэлектроники и метрологии.

### Литература

1. *Burch J. M., Tokarsky J.* Production of multiple beam fringes from photographic scatter // *Optica Acta*. — 1968. — V. 15. — P. 101–111.
2. *Goodman J. W.* Speckle phenomena in optics: theory and applications. — Englewood, CO: Roberts & Company, Publishers, 2006. — 387 p.
3. *Франсон М.* Оптика спеклов / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 171 с.
4. *Вест Ч.* Голографическая интерферометрия / Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 504 с.



## Глава 1

# СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ПРОЦЕССЫ В ОПТИКЕ

Данная глава призвана напомнить читателю основные понятия теории вероятностей, математической статистики и статистической оптики, что может оказаться полезным при ознакомлении с материалом последующих глав. Основное внимание в ней будет обращать не на математическую строгость выкладок, а на физический смысл и физическую интерпретацию приводимых понятий и формул. Для более глубокого изучения основ данных разделов математики и физики существует множество прекрасных учебников, справочных пособий и монографий, например [1–6], к которым мы и отсылаем читателя.

### 1.1. Основные понятия теории вероятностей

Базовыми понятиями теории вероятностей являются понятия *случайного эксперимента*, *случайного события* и *случайной величины* (или случайной переменной). Эксперимент становится случайным тогда, когда его результат не может быть заранее точно предсказан. Практически все физические измерения можно отнести к классу случайных экспериментов, поскольку в них всегда присутствует разброс в результатах, обусловленный, например, влиянием случайных помех или погрешностью измерительной аппаратуры. Величина, измеряемая в ходе случайного эксперимента, называется случайной, а к случайным событиям относится тот факт, что в результате измерения эта величина принимает какое-либо численное значение. Например, температура воздуха за окном является случайной величиной, а случайное событие состоит в том, что ее значение оказывается равным  $+20^{\circ}\text{C}$ . Если набор случайных событий представляется в виде набора дискретных чисел, то соответствующая случайная величина называется дискретной. Если же значения случайной величины образуют континуум, последняя называется непрерывной. Примером дискретной величины может служить количество распадов атомов какого-либо радиоактивного вещества, наблюдаемых за единицу времени, температура же за окном — пример непрерывной случайной величины. Каждому случайному событию ставится в соответствие действительное положительное число, называемое вероятностью. Смысл этого термина проще всего понять на примере

дискретных случайных величин. Предположим, что при многократном повторении случайного эксперимента некоторая дискретная случайная величина  $X$  принимала  $n$  раз значение, равное  $x$ . Если  $N$  — общее число экспериментов, то отношение  $n$  к  $N$  будет называться относительной частотой события, состоящего в том, что  $X = x$ . Пусть, например, из десяти попыток метания игральной кости в двух случаях выпало число три. Тогда относительной частотой появления числа три будет  $1/5$ . Интуитивно ясно, что при увеличении количества попыток метания кости относительная частота события не останется постоянной, а будет колебаться возле предельного значения, равного  $1/6$ , постепенно приближаясь к нему. Это предельное значение и является вероятностью появления числа три.

В общем случае под вероятностью события, состоящего в том, что некоторая случайная величина  $X$  принимает значение, равное  $x$ , можно понимать следующее число:

$$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N}, \quad (1.1)$$

где  $N$  — количество повторов случайного эксперимента;  $n$  — количество исходов, в которых  $X = x$ .

Следует сказать, что в математике из-за определенных трудностей с доказательством существования предела (1.1) понятие вероятности связывают с событиями чисто аксиоматически. Однако аксиомы вероятности напрямую связаны с соответствующими свойствами относительной частоты. Например, вероятность случайного события всегда лежит в пределах между 0 и 1, вероятность достоверного события равна 1, невозможного — 0. В настоящей работе мы не станем разбирать все аксиомы вероятности, равно как и иные математические проблемы, требующие строгого подхода, а сделаем акцент на физической интерпретации и на осмысливании тех результатов теории вероятностей и математической статистики, которые имеют непосредственное приложение к задачам оптики.

Особенностью непрерывной случайной величины является то, что обычно рассматривают вероятность попадания ее значений в некоторый заранее заданный интервал. Вероятность же того, что непрерывная случайная величина примет какое-либо строго определенное значение, как правило, оказывается равной нулю. Поясним это на примере. Обычно в прогнозах погоды на завтра указывают не конкретное значение ожидаемой температуры воздуха, а диапазон, в который с достаточно большой вероятностью должна попасть завтрашняя температура. Если все же говорится об определенной температуре, например о  $+20^\circ\text{C}$ , то на самом деле имеется в виду следующее. С достаточно большой вероятностью (положим, 0,9) можно утверждать, что температура будет

находиться в пределах от  $+17$  до  $+23$  °С. С несколько меньшей вероятностью (например, 0,5) можно утверждать, что она будет находиться в пределах от  $+19$  до  $+21$  °С. Если же сузить данный интервал до нуля, то вероятность такого прогноза тоже станет нулевой. В связи с этим для непрерывных случайных величин важное значение приобретает функция, называемая плотностью вероятности и определяемая как

$$p_X(x) = \frac{dP}{dx}, \quad (1.2)$$

где  $dP$  — вероятность попадания значений некоторой случайной величины  $X$  в интервал от  $x$  до  $x + dx$ .

В случае дискретных величин также можно ввести плотность вероятности, для чего требуется привлечь понятие дельта-функций Дирака [8]. Однако оптические величины, с которыми нам предстоит иметь дело в данной работе (амплитуда, фаза, интенсивность световой волны), являются непрерывными. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать свойства случайных флуктуаций только таких величин. Свойства же дискретных случайных переменных изложены в многочисленных руководствах по теории вероятностей, например в [1–3].

Зная плотность распределения  $p_X(x)$ , можно вычислить вероятность того, что непрерывная случайная величина  $X$  примет значения, лежащие в пределах от  $x_1$  до  $x_2$ . Как следует из соотношения (1.2), она равна

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx. \quad (1.3)$$

Вероятность того, что значения случайной величины не превышают некоторого числа  $x$ , равную

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x p_X(t) dt, \quad (1.4)$$

называют *функцией распределения* случайной величины. Поскольку суммарная вероятность всех исходов случайного эксперимента равна единице, из соотношения (1.4) получаем

$$F_X(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = 1. \quad (1.5)$$

Если случайная величина, например интенсивность света, никогда не принимает отрицательных значений, то считается, что при  $X < 0$  плотность распределения тождественно равна нулю. В этом случае нижний предел интегрирования в соотношениях (1.3)–(1.5) автоматически становится равным нулю.

В качестве примера рассмотрим плотность *равномерно распределенной* случайной величины:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{при } x \leq a \text{ или } x \geq b, \end{cases} \quad (1.6)$$

где  $a$  и  $b$  — действительные числа. Такая плотность распределения, графически представленная на рис. 1.1,  $a$ , означает одинаковую вероятность того, что случайная величина  $X$  примет какое-либо значение из интервала между  $a$  и  $b$ .

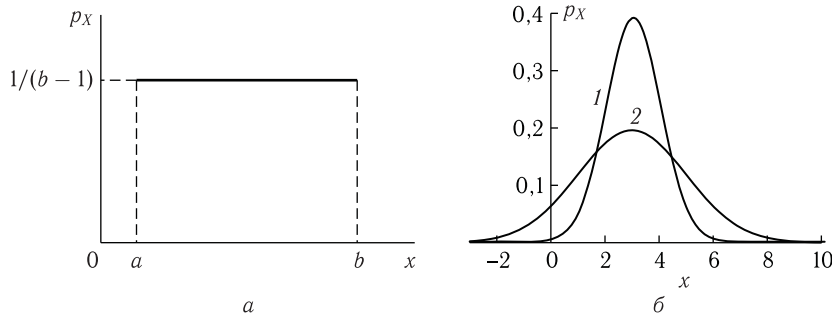


Рис. 1.1. Примеры плотности распределения: а) равномерная; б) гауссовская (нормальная) при  $a = 3$ ,  $b = 1$  (1) и  $a = 3$ ,  $b = 2$  (2)

Важное значение для последующего изложения имеет *гауссовская (нормальная)* плотность распределения:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}b} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2b^2}\right), \quad (1.7)$$

где  $a$  и  $b$  — по-прежнему действительные числа, причем  $b > 0$ . На рис. 1.1, б графически представлена эта плотность распределения для случаев  $a = 3$ ,  $b = 1$  (кривая 1) и  $b = 2$  (кривая 2). Видно, что *гауссовская случайная величина* с наибольшей вероятностью принимает значения вблизи числа  $a$ , а параметр  $b$  определяет, насколько велик может быть разброс ее значений.

## 1.2. Статистические средние.

### Моменты случайных величин.

#### Центральные моменты случайных величин

Простейшей средней характеристикой случайной величины является ее *первый момент* (математическое ожидание, среднее значение), который определяется как

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx. \quad (1.8)$$

Смысл соотношения (1.8) можно понять на следующем примере. Предположим, что в ходе экспериментов измерены следующие значения случайной величины: 1; 5; 8; 9; 14; 16; 24. Среднее арифметическое полученных значений можно вычислить по стандартной формуле:  $(1/N) \sum_{i=1}^N x_i$ , и в нашем примере оно равно 11. Рассмотрим другой путь оценки среднего. Разобьем весь диапазон изменения случайной величины на  $K$  интервалов и вычислим среднее по формуле  $(1/N) \sum_{i=1}^K x_i n_i$ , где  $x_i$  — значение величины в центре  $i$ -го интервала;  $n_i$  — число случаев, когда значения величины попали внутрь этого интервала. При разбиении, например, на три интервала — от 0 до 10, от 10 до 20 и от 20 до 30 — в нашем примере получаем  $(1/7) \cdot (5 \cdot 4 + 15 \cdot 2 + 25 \cdot 1) = 10,7$ . Как видно, полученная оценка не равна в точности среднему арифметическому, но по мере возрастания числа экспериментов и увеличения количества интервалов разбиения будет стремиться к нему. С другой стороны, согласно выражениям (1.1) и (1.2) отношение  $n_i/N$  в пределе  $N \rightarrow \infty$  равно вероятности попадания в соответствующий интервал, причем при сужении интервала разбиения эта вероятность стремится к величине  $p_X(x) dx$ . В результате при  $N \rightarrow \infty$  и  $K \rightarrow \infty$  выражение  $(1/N) \sum_{i=1}^K x_i n_i$  превращается в соотношение (1.8).

Совершенно аналогично среднее значение любой функции от случайной переменной вычисляется по формуле

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p_X(x) dx, \quad (1.9)$$

из которой следуют простейшие свойства вычисления средних:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= a, & \overline{b} &= b; \\ \overline{af + bg} &= a\bar{f} + b\bar{g}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты.

Среднее значение от  $x^m$  называется *моментом  $m$ -го порядка* случайной величины. В соответствии с формулой (1.9) оно вычисляется как

$$\overline{x^m} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m p_X(x) dx. \quad (1.11)$$

Часто большой интерес представляют *центральные моменты* случайной величины:

$$\overline{(x - \bar{x})^m} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^m p_X(x) dx, \quad (1.12)$$

которые характеризуют степень ее разброса относительно среднего значения.

Поскольку первый ( $m = 1$ ) центральный момент оказывается тождественно равным нулю ( $\overline{x - \bar{x}} = \bar{x} - \bar{x} \equiv 0$ ), особую роль играет второй центральный момент, который называется *дисперсией*:

$$D_X = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2. \quad (1.13)$$

Квадратный корень из дисперсии называется *средним квадратичным отклонением* (СКО):

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (1.14)$$

Для равномерно распределенной случайной величины с плотностью распределения, задаваемой выражением (1.6), на основании соотношений (1.11)–(1.14) получаем  $\bar{x} = (b + a)/2$ ,  $\sigma_X = (b - a)/2\sqrt{3}$ . Для гауссовой случайной величины с плотностью распределения, задаваемой выражением (1.7), будем иметь  $\bar{x} = a$ ,  $\sigma_X = b$ .

### 1.3. Характеристическая функция случайной величины

Среднее значение функции  $\exp(i\omega x)$  представляет собой *характеристическую функцию* случайной величины:

$$M_X(\omega) = \overline{\exp(i\omega x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega x) p_X(x) dx. \quad (1.15)$$

Как видно, характеристическая функция является преобразованием Фурье от плотности распределения величины  $X$ . Поэтому, зная характеристическую функцию, можно найти плотность распределения, выполнив обратное преобразование Фурье.

Разложим экспоненциальную функцию  $\exp(i\omega x)$  в ряд Тейлора:  $\exp(i\omega x) = \sum_{m=0}^{\infty} (i\omega x)^m / m!$ . В результате на основании соотношения (1.15) получаем

$$M_X(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\omega)^m}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x^m p_X(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(i\omega)^m}{m!} \langle x^m \rangle. \quad (1.16)$$

В выражении (1.16) и далее в этой главе предполагается, что все моменты конечны и получающийся ряд абсолютно сходится. Таким образом, характеристическая функция может быть представлена в виде разложения в ряд по моментам случайной величины. Поэтому задание моментов всех порядков эквивалентно заданию плотности распределения случайной величины. В свою очередь, как это следует из соотношения (1.16), момент  $m$ -го порядка может быть вычислен в результате дифференцирования характеристической функции согласно следующему выражению:

$$\overline{x^m} = (-i)^m \left. \frac{d^m}{d\omega^m} M_X(\omega) \right|_{\omega=0}. \quad (1.17)$$

### 1.4. Плотность распределения преобразованных случайных величин

Во многих случаях важно знать не только средние значения функций от случайных переменных, но и плотности распределения таких функций. Предположим, что значения случайных величин  $Y$  и  $X$  связаны соотношением  $y = f(x)$ , где  $f(x)$  — действительная непрерывная функция. Рассмотрим сначала случай, когда обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  также является однозначной действительной функцией. Пусть  $p_X(x)$  — плотность распределения случайной величины  $X$ . В соответствии с выражением (1.2) вероятность обнаружить значение величины  $X$  в окрестности числа  $x$  равна  $dP = p_X(x) dx = p_X(f^{-1}(y)) |df^{-1}(y)|$ . В последнем выражении дифференциал обратной функции взят под знаком модуля, поскольку вероятность не может быть отрицательной величиной. Полагая, что производная  $d(f^{-1}(y))/dy$  существует, получаем

$$p_Y(y) = \frac{dP}{dy} = p_X(f^{-1}(y)) \left| \frac{d(f^{-1}(y))}{dy} \right|. \quad (1.18)$$

В качестве примера применения этого метода рассмотрим преобразование

$$y = A \cos \varphi, \quad (1.19)$$

в котором аргумент косинуса будем полагать случайной величиной, равномерно распределенной на промежутке от 0 до  $\pi$ , а число  $A$  — константой. В соответствии с выражениями (1.6) и (1.18) получаем

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left| \frac{d \arccos(y/A)}{dy} \right| = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{A^2 - y^2}} & \text{при } -A \leq |y| \leq A, \\ 0 & \text{при } |y| \geq A. \end{cases} \quad (1.20)$$

На рис. 1.2, *а* представлен график исходной плотности распределения, а на рис. 1.2, *б* — плотности распределения преобразованной случайной величины  $p_Y(y)$ .

Если функция  $f(x)$  необратима, но состоит из  $M$  обратимых отрезков, то может быть использована процедура, которая сводится к  $M$ -кратному применению рассмотренной выше. Предположим, что на каждом  $m$ -м отрезке обратная функция представляется в виде  $f_m^{-1}(y)$ . Тогда плотность распределения величины  $Y$  можно записать в виде

$$p_Y(y) = \sum_{m=1}^M p_X(f_m^{-1}(y)) \left| \frac{d(f_m^{-1}(y))}{dy} \right|. \quad (1.21)$$

В качестве конкретного примера снова возьмем гармоническую функцию  $y = A \cos \varphi$ , но ее аргумент будем полагать равномерно распределенным на промежутке от 0 до  $2\pi$ , на котором обратное преобразо-

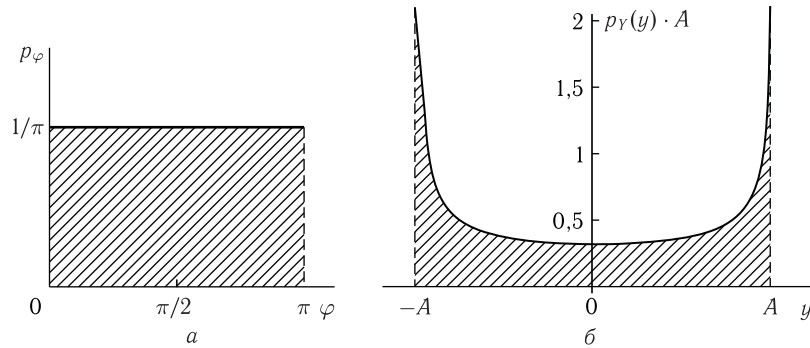


Рис. 1.2. Плотность распределения случайной величины: а) до преобразования; б) после преобразования

вание становится двухзначным. Поэтому обратную функцию следует рассматривать на двух отрезках: от 0 до  $\pi$ , где ее можно записать как  $\arccos(y/A)$ , и от  $\pi$  до  $2\pi$ , где ее можно записать в виде  $2\pi - \arccos(y/A)$ . Вычислив производную обратной функции для обоих отрезков, на основании выражения (1.21) получаем  $p_Y(y) = 1/(2\pi\sqrt{A^2 - y^2}) + 1/(2\pi\sqrt{A^2 - y^2})$ . Таким образом, окончательный вид искомой плотности распределения совпадает с выражением (1.20).

### 1.5. Многомерные распределения случайных величин

Если в ходе случайного эксперимента регистрируются два и более случайных параметра, для них можно определить  $m$ -мерную совместную плотность распределения в следующем виде:

$$p_{X_1 \dots X_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{d^m P}{dx_1 \dots dx_m}, \quad (1.22)$$

где  $d^m P$  — вероятность попадания значений  $i$ -й случайной переменной ( $i = 1, \dots, m$ ) в интервал от  $x_i$  до  $x_i + dx_i$ . Плотность распределения каждой из этих случайных переменных в отдельности выражается через совместную плотность распределения следующим образом:

$$p_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{X_1 \dots X_m}(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_m. \quad (1.23)$$

Для совместных распределений можно рассматривать параметры, аналогичные параметрам одномерных распределений. Например, для двухмерного распределения можно по аналогии с выражением (1.11) определить совместный момент  $k, l$ -го порядка:

$$\overline{x^k y^l} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k y^l p_{XY}(x, y) dx dy. \quad (1.24)$$



Так же как и в случае одномерных случайных величин, задание моментов всех порядков эквивалентно заданию плотности распределения многомерной случайной величины.

### 1.6. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированные величины

Случайные величины, регистрируемые в эксперименте, могут зависеть друг от друга. Например, атмосферное давление Земли зависит от температуры воздуха, и наоборот. Если же флуктуации одной из переменных никак не сказываются на параметрах распределения другой, как, например, давление марсианской атмосферы никак не сказывается на температуре земной атмосферы, эти переменные будут статистически независимы. Математически условие статистической независимости случайных величин  $X$  и  $Y$  может быть представлено в виде

$$p_{XY}(x, y) = p_X(x)p_Y(y). \quad (1.25)$$

Непосредственно из выражений (1.24) и (1.25) вытекает следующее свойство двух независимых случайных переменных:

$$\overline{x^k y^l} = \overline{x^k} \cdot \overline{y^l}. \quad (1.26)$$

Поэтому для того, чтобы проверить гипотезу о независимости случайных величин, нужно проверить справедливость равенства (1.26) для любых целых положительных значений чисел  $k$  и  $l$ . Конечно, технически сделать это очень сложно. Поэтому обычно проверяют справедливость этого соотношения для каких-либо определенных значений этих чисел. При этом разница между правой и левой частями в выражении (1.26) может служить мерой статистической зависимости величин. Для случая  $k = 1$  и  $l = 1$  эта мера называется ковариацией:

$$C_{XY} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}. \quad (1.27)$$

Нормированная ковариация называется коэффициентом корреляции величин  $X$  и  $Y$ :

$$\rho_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sqrt{C_{XX}C_{YY}}} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (1.28)$$

Из выражения (1.28) непосредственно следует, что в случае, когда  $X \equiv Y$ , коэффициент корреляции равен единице. Непосредственным вычислением также легко убедиться в том, что если значения величин  $X$  и  $Y$  связаны детерминированной линейной зависимостью:  $x = ay + b$ , где  $a$  и  $b$  — константы, то  $\rho_{XY} = 1$ , когда  $a > 0$ , и  $\rho_{XY} = -1$ , когда  $a < 0$ .

Если  $\rho_{XY} = 1$ , то говорят, что величины  $X$  и  $Y$  полностью коррелированы. Это означает, что их флуктуации идентичны с точностью до масштабного коэффициента. Если  $\rho_{XY} = -1$ , то говорят, что переменные  $X$  и  $Y$  антикоррелированы. Это означает, что их флуктуации с точностью до масштабного коэффициента идентичны, но противоположны по знаку. Например, положительное отклонение величины  $X$  всегда вызывает отрицательное изменение величины  $Y$ .

Во всех остальных случаях коэффициент корреляции лежит в промежутке между  $-1$  и  $1$  и служит прямой мерой подобия флуктуаций величин  $X$  и  $Y$ .

Если  $\rho_{XY} = 0$ , то говорят, что величины  $X$  и  $Y$  не коррелированы. Это означает отсутствие линейной зависимости между этими случайными величинами, однако не означает отсутствия любой зависимости вообще. Как указывалось выше, для того чтобы убедиться в независимости случайных величин, необходимо убедиться в справедливости выражения (1.26) для любых значений чисел  $k$  и  $l$ . Однако в практически важном частном случае — для гауссовских случайных величин — отсутствие корреляции одновременно означает их независимость, что дополнительно будет обсуждаться далее.

Укажем также, что термином «корреляция» (не следует путать с коэффициентом корреляции) часто называют совместный момент порядка  $k = 1, l = 1$ :

$$\Gamma_{XY} = \overline{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} xy \rho_{XY}(x, y) dx dy. \quad (1.29)$$

Согласно выражениям (1.27) и (1.28) корреляция связана с ковариацией и коэффициентом корреляции следующими соотношениями:

$$C_{XY} = \Gamma_{XY} - \bar{x} \cdot \bar{y}; \quad (1.30)$$

$$\rho_{XY} = \frac{\Gamma_{XY} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (1.31)$$

### 1.7. Распределения суммы, произведения и частного случайных величин

Пусть случайная величина  $Z$  является суммой или разностью двух других (не обязательно независимых) случайных переменных,  $X$  и  $Y$ . Рассмотрим статистические характеристики такой величины. Проще всего найти среднее значение и СКО ее распределения. В силу линейности операции нахождения среднего получаем

$$\begin{aligned} \bar{Z} &= \overline{X \pm Y} = \bar{X} \pm \bar{Y}; \\ \sigma_Z^2 &= \overline{(X \pm Y)^2} - \bar{X} \pm \bar{Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 \pm 2\sigma_X \sigma_Y \rho_{XY}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Часто необходимо знать не только моменты распределения величины  $Z$ , но и саму плотность распределения, если совместная плотность распределения  $p(x, y)$  величин  $X$  и  $Y$  известна. Вначале рассмотрим случай, когда  $Z = X + Y$ . Предположим, что величина  $X$  приняла некоторое фиксированное значение, равное  $x$ . Для того чтобы выполнялось соотношение  $Z = X + Y$ , нужно, чтобы переменная  $Y$  в этот момент стала равной  $z - x$ . Вероятность такого совместного события рассчитывается как  $p_{XY}(x, z - x) dx d(z - x) = p(x, z - x) dx dz$ . Для каждого значения  $z$  переменная  $x$  пробегает интервал от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Следовательно, вероятность события, при котором величина  $Z$  лежит в окрестности числа  $x + y$ , будет равна  $dP = dz \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x) dx$ . Как следствие плотность распределения величины  $Z$  запишется в виде

$$p_Z(z) = \frac{dP}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, z - x) dx. \quad (1.33)$$

По аналогии получаем, что плотность распределения разности величин  $X$  и  $Y$  равна

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, x - z) dx. \quad (1.34)$$

Пусть теперь  $Z = X \cdot Y$ . Вероятность совместного события, состоящего в том, что  $X = x$ ,  $Y = z/x$ , равна  $p_{XY}(x, z/x) dx |d(z/x)| = p_{XY}(x, z/x)/|x| dx dz$ . Следовательно,

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_{XY}(x, z/x)}{|x|} dx. \quad (1.35)$$

Совершенно аналогично получаем плотность распределения величины  $Z = X/Y$ :

$$p_Z(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x, x/z) |x| dx. \quad (1.36)$$

Рассмотрим случай, когда  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины. На основании выражений (1.25) и (1.33) плотность распределения их суммы будет равна

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_Y(x) p_Y(z - x) dx. \quad (1.37)$$

Такой интеграл является сверткой функций  $p_X$  и  $p_Y$ . Пользуясь свойством преобразования Фурье от свертки [8], получаем, что характе-

ристическая функция переменной  $Z$  связана с характеристическими функциями переменных  $X$  и  $Y$  следующим простым соотношением:

$$M_Z(\omega) = M_X(\omega)M_Y(\omega). \quad (1.38)$$

Исходя из вышеизложенного, становится ясно, как найти плотность распределения суммы большого числа независимых случайных переменных. Действительно, на основании выражения (1.38) характеристическая функция величины  $Z = \sum_{i=1}^N X_i$  будет равна

$$M_Z(\omega) = \prod_{i=1}^N M_{X_i}(\omega). \quad (1.39)$$

Тогда, чтобы найти  $p_Z(z)$ , останется выполнить обратное преобразование Фурье от характеристической функции  $M_Z(\omega)$ .

### 1.8. Центральная предельная теорема. Гауссовские случайные величины

Особую важность для последующего изложения имеет центральная предельная теорема, которая утверждает, что плотность распределения суммы  $Z = \sum_{i=1}^N X_i$ , где  $X_i$  — независимые случайные переменные с произвольными и в общем случае различными функциями распределения, при  $N \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к гауссовской, задаваемой выражением (1.7) [1–3]. В §1.2 указывалось, что параметры  $a$  и  $b$  нормального распределения имеют смысл соответственно среднего значения и СКО величины  $Z$ . Они связаны с соответствующими параметрами случайных переменных  $X_i$  следующими соотношениями, которые непосредственно вытекают из выражений (1.32):

$$\begin{aligned} a &= \bar{Z} = \sum_{i=1}^N \bar{X}_i; \\ b &= \sigma_Z = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sigma_{X_i}^2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

При конечном значении числа  $N$  могут, безусловно, наблюдаться более или менее значительные отклонения от нормального закона. Тем не менее центральная предельная теорема оказывается необычайно ценной для задач, в которых учитывается суммарное влияние огромного числа флуктуаций независимых параметров.

Несколько случайных величин также может иметь совместную гауссовскую плотность распределения. Наиболее важным для дальнейшего изложения является случай двух совместно распределенных гауссовских случайных величин,  $X$  и  $Y$ , которые имеют нулевые средние зна-

чения и одинаковые среднеквадратичные отклонения  $\sigma$ . В этом случае их совместная плотность распределения запишется как

$$p_{XY}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho_{XY}^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 - 2xy\rho_{XY}}{2\sigma^2(1-\rho_{XY}^2)}\right), \quad (1.41)$$

где  $\rho_{XY}$  — коэффициент корреляции величин  $X$  и  $Y$ .

Из выражения (1.41) видно, что в случае, когда  $\rho_{XY} = 0$ , совместная плотность вероятности превращается в произведение  $p_X(x)p_Y(y)$ . Таким образом, две некоррелированные гауссовские случайные величины являются независимыми.

### 1.9. Суммы случайных фазоров. Амплитуда и фаза световой волны, рассеянной диффузным объектом. Распределение интенсивности рассеянного когерентного света

Случайным фазором называется комплексное число вида  $a_m \exp(i\varphi_m)$ , в котором  $a_m$  и  $\varphi_m$  — случайные переменные. Его можно интерпретировать, например, как возмущение электромагнитной волны, вызванное рассеянием на каком-либо из элементов диффузного объекта, в котором  $a_m$  и  $\varphi_m$  описывают амплитуду и фазу рассеянной компоненты. Обе составляющие поляризации электромагнитной волны, рассеянной всем объектом, будут представлять сумму большого числа таких возмущений. Поэтому для задач оптики представляет большой интерес рассмотрение статистических свойств суммы вида

$$E = \sum_{m=1}^N a_m \exp(i\varphi_m). \quad (1.42)$$

Для упрощения анализа будем полагать, что переменные  $a_m$  и  $\varphi_m$  статистически независимы, фазы  $\varphi_m$  равномерно распределены на интервале от  $-\pi$  до  $\pi$ , а число  $N$  очень велико. Тогда действительная и мнимая части выражения (1.42):

$$\begin{aligned} E_R &= \sum_{m=1}^N a_m \cos \varphi_m; \\ E_I &= \sum_{m=1}^N a_m \sin \varphi_m, \end{aligned} \quad (1.43)$$

будут представлять суммы многих независимых случайных вкладов. В силу же центральной предельной теоремы эти величины с высокой степенью достоверности могут считаться гауссовскими случайными величинами. Найдем наиболее важные статистические параметры этих

величин. Используя свойство независимости переменных  $a_m$  и  $\varphi_m$ , получаем  $\overline{E_R} = \sum_{m=1}^N \overline{a_m \cos \varphi_m}$  и  $\overline{E_I} = \sum_{m=1}^N \overline{a_m \sin \varphi_m}$ . В силу того что на отрезке от  $-\pi$  до  $\pi$   $\overline{\cos \varphi_m} = \overline{\sin \varphi_m} = 0$ , средние значения обеих переменных,  $E_R$  и  $E_I$ , оказываются равными нулю. Их вторые моменты вычисляются, соответственно, как  $\overline{E_R^2} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{a_k a_m \cos \varphi_k \cos \varphi_m}$  и  $\overline{E_I^2} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{a_k a_m \sin \varphi_k \sin \varphi_m}$ . Исходя из равномерного распределения фазы, получаем

$$\overline{\cos \varphi_k \cos \varphi_m} = \overline{\sin \varphi_k \sin \varphi_m} = \begin{cases} 1/2 & \text{при } k = m; \\ 0 & \text{при } k \neq m. \end{cases} \quad (1.44)$$

В результате для величин  $\overline{E_R^2}$  и  $\overline{E_I^2}$  имеем  $\overline{E_R^2} = \overline{E_I^2} = (1/2) \sum_{m=1}^N \overline{a_m^2} = \sigma^2$ . Как видно, обе совместно распределенные гауссовские случайные величины,  $E_R$  и  $E_I$ , имеют нулевые средние значения и одинаковые среднеквадратичные отклонения  $\sigma$ , вследствие чего их совместная плотность распределения будет описываться соотношением (1.41).

Вычислим входящий в выражение (1.41) коэффициент корреляции величин  $E_R$  и  $E_I$ . Учитывая, что для любых значений чисел  $k$  и  $m$  выполняется соотношение  $\overline{\cos \varphi_k \sin \varphi_m} = 0$ , получаем, что  $\overline{E_R E_I} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{a_k a_m \cos \varphi_k \sin \varphi_m} = 0$ . При подстановке этого результата в выражение (1.28) с учетом найденных ранее моментов величин  $E_R$  и  $E_I$  можно видеть, что коэффициент корреляции действительной и мнимой частей суммы (1.42) оказывается равным нулю. Совместная плотность распределения величин  $E_R$  и  $E_I$  может быть вычислена как

$$dP = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{E_R^2 + E_I^2}{2\sigma^2}\right) dE_R dE_I. \quad (1.45)$$

Введем обозначения  $E_0 = \sqrt{E_R^2 + E_I^2}$ ,  $\psi = \arctg(E_I/E_R)$ , которые можно интерпретировать как амплитуду и фазу суммарной электромагнитной волны. В то же самое время такое преобразование переменных означает переход от декартовых координат  $E_R$  и  $E_I$  к полярным —  $E_0$  и  $\psi$ . Элементы площади в этих координатах соотносятся как  $dE_R dE_I = E_0 dE_0 d\psi$ . Поэтому заменяя переменные в выражении (1.45), получаем, что

$$dP = \begin{cases} \frac{E_0}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{E_0^2}{2\sigma^2}\right) dE_0 d\psi & \text{при } -\pi < \psi \leq \pi, \quad E_0 > 0; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.46)$$

Из выражения (1.46) видно, что совместная плотность вероятности  $dP/(dE_0 d\psi)$  не зависит от переменной  $\psi$ . Это означает, что фаза рассеянной волны распределена равномерно на отрезке от  $-\pi$  до  $\pi$ , так же как и фазы возмущений, из которых она складывается. Плотность рас-

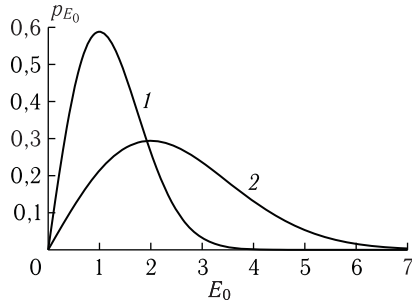


Рис. 1.3. Релеевская плотность распределения для случаев  $\sigma = 1$  (1) и  $\sigma = 2$  (2)

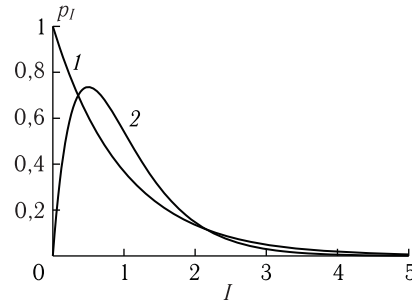


Рис. 1.4. Плотность распределения интенсивности поляризованного (1) и неполяризованного (2) рассеянного когерентного излучения

предела амплитуды можно получить, интегрируя совместную плотность распределения по углу  $\psi$ . В результате получаем, что

$$p_{E_0}(E_0) = \begin{cases} \frac{E_0}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{E_0^2}{2\sigma^2}\right) & \text{при } E_0 > 0; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.47)$$

Эта функция называется релеевской плотностью распределения. Ее вид показан на рис. 1.3. Среднее значение и СКО величины, распределенной по такому закону, равны

$$\begin{aligned} \overline{E_0} &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \\ \sigma_{E_0} &= \sigma \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Интенсивность когерентного света  $I$  будет пропорциональна квадрату амплитуды  $E_0$ . Выполняя соответствующую замену переменных в выражении (1.47), получаем

$$p_I(I) = \begin{cases} \frac{1}{\bar{I}} \exp\left(-\frac{I}{\bar{I}}\right) & \text{при } I > 0; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \quad (1.49)$$

где  $\bar{I}$  — среднее значение интенсивности света.

Таким образом, интенсивность обеих линейно поляризованных компонент рассеянного излучения подчиняется экспоненциальному распределению (рис. 1.4, кривая 1). Среднеквадратичное отклонение интенсивности в случае такой плотности распределения равно ее среднему значению:  $\sigma_I = \bar{I}$ , характеристическая функция имеет вид

$$M_I(\omega) = \frac{1}{1 - i\omega\bar{I}}. \quad (1.50)$$

Обычно рассеянное излучение частично или полностью деполяризовано. Если требуется знать плотность распределения интенсивности частично поляризованного излучения, то можно представить его в виде суммы двух статистически независимых компонент, каждая из которых подчиняется распределению (1.49) и имеет свое значение средней интенсивности, соответственно  $\bar{I}_x$  и  $\bar{I}_y$ . При этом соотношение между величинами  $\bar{I}_x$  и  $\bar{I}_y$  определяется степенью поляризации излучения. При таком подходе в соответствии с выражением (1.37) получаем, что при  $I > 0$

$$p_I(I) = \frac{1}{\bar{I}_x - \bar{I}_y} \left[ \exp\left(-\frac{I}{\bar{I}_x}\right) - \exp\left(-\frac{I}{\bar{I}_y}\right) \right]. \quad (1.51)$$

В частном случае полностью деполяризованного излучения, когда  $\bar{I}_x = \bar{I}_y = 0,5\bar{I}$ , выражение (1.51) преобразуется к виду

$$p_I(I) = \frac{4}{I^2} I \exp\left(-\frac{2I}{\bar{I}}\right). \quad (1.52)$$

График этой плотности представлен на рис. 1.4, кривая 2.

### **1.10. Распределение интенсивности частично-когерентного светового излучения, рассеянного неподвижным объектом**

Задача этого параграфа состоит в нахождении плотности распределения интенсивности световой волны, рассеянной неподвижным случайно неоднородным объектом, в случае, когда на формирование картины интерференции оказывают влияние когерентные свойства излучения. Такая ситуация имеет место, например, когда площадь апертуры светового пучка больше площади его когерентности  $S_C$ . Другой вариант реализуется при формировании случайно-неоднородного поля на выходе из многомодового световода, в случае, когда время задержки между модами  $\tau_D$  (возникающее из-за межмодовой дисперсии) превышает время когерентности направляемого света  $\tau_C$  [9]. Может быть рассмотрен и смешанный случай, когда одновременно  $S_0 > S_C$  и  $\tau_D > \tau_C$ . Не вдаваясь в подробности теории когерентности, используем упрощенный подход, подобный изложенному в работе [6]. Будем полагать, что излучение в пределах одной «ячейки» когерентности объема,  $V_C = S_C \cdot c \cdot \tau_C$ , является полностью когерентным, излучение из разных «ячеек» когерентности — полностью некогерентным, т. е. статистически независимым. Введем параметр  $K = V/V_C$ , который указывает число «ячеек» когерентности, укладываемых в пределах объема  $V = S_0 \cdot c \cdot \tau_D$ . Значения параметра  $K$  меньше единицы невозможны, поскольку результаты измерений всегда определяются состояниями полей по крайней мере в одной ячейке когерентности. В связи с этим в случае,



когда формально оказывается, что  $K < 1$ , следует принять, что  $K = 1$ . Далее будем рассматривать только случай полностью поляризованного излучения. При рассеянии излучения одной из «ячеек» когерентности плотность распределения интенсивности  $p_I(I)$  и характеристическая функция  $M_I(\omega)$  будут, соответственно, задаваться выражениями (1.49) и (1.50). При рассеянии излучения от  $K$  статистически независимых «ячеек» в соответствии с выражением (1.39) характеристическая функция станет равной  $M_I(\omega) = [1/(1 - i\omega\bar{I})]^K$ , где под  $J$  понимается интенсивность частично-когерентного света. Среднее значение интенсивности частично-когерентного излучения будет представлять собой сумму средних интенсивностей для всех независимых «ячеек»:  $\bar{J} = K \cdot \bar{I}$ . Поэтому последнее соотношение можно переписать в виде

$$M_I(\omega) = \left( \frac{1}{1 - i\omega(\bar{J}/K)} \right)^K. \quad (1.53)$$

Обратное преобразование Фурье для этой функции дает искомую плотность распределения интенсивности частично-когерентного света:

$$p_J(J) = \begin{cases} \left(\frac{K}{\bar{J}}\right)^K \frac{J^{K-1}}{\Gamma(K)} \exp\left(-K\frac{J}{\bar{J}}\right) & \text{при } J \geq 0; \\ 0 & \text{при } J < 0. \end{cases} \quad (1.54)$$

Заметим, что эта плотность может быть вычислена даже в случае, когда параметр  $K$  не является целым числом. График этой плотности распределения представлен на рис. 1.5. Видно, что при  $K = 1$  (когерентное излучение) плотность распределения является экспоненциальной, такой же, как кривая 1 на рис. 1.4. С ростом  $K$ , по мере того как излучение становится менее когерентным, плотность распределения приближается к гауссовской. Такой результат можно было предвидеть, исходя из центральной предельной теоремы, так как в этом случае имеет место сложение множества независимых флуктуаций интенсивности.

Сделанные выше упрощения при описании физической картины рассеяния частично-когерентного света приводят к тому, что при любом значении параметра  $K$  выражение (1.54) является лишь приближенной формой для плотности распределения интенсивности такого света. Точные результаты могут быть получены лишь для некоторых определенных видов функ-

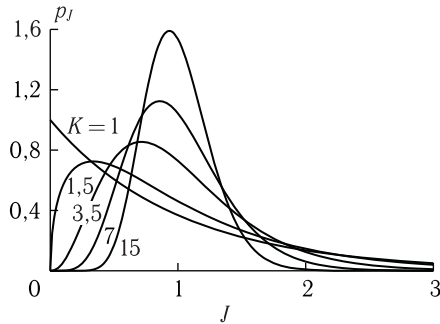


Рис. 1.5. Плотность распределения интенсивности частично-когерентного света

ций когерентности [6]. Однако приближенными результатами можно пользоваться во многих приложениях, поскольку они незначительно отличаются от точных, особенно для больших значений параметра  $K$ .

Наконец, отметим, что плотность распределения неполяризованного и частично-поляризованного излучения можно найти, пользуясь подходом, изложенным в § 1.9. Для этого следует полагать, что обе поляризационные компоненты излучения распределены в соответствии с выражением (1.54), а затем найти свертку их плотностей.

### 1.11. Случайные процессы. Основные понятия

Предположим, что задача экспериментатора состоит в том, чтобы в течение какого-то времени измерять значения интересующего его параметра. Положим, например, что это будет сила тока на выходе фотодиода. Из-за влияния температурных шумов и иных неконтролируемых факторов величина силы тока будет флуктуировать со временем, так что в ходе эксперимента будет зафиксирована случайная функция, которая называется *выборочной*. Теперь мысленно представим себе, что в лаборатории установлено множество совершенно одинаковых экспериментальных установок. Они позволяют получить соответствующее количество выборочных кривых, которые из-за влияния случайных факторов не будут точно повторяться (рис. 1.6). Под случайным процессом  $X(t)$  будем понимать семейство из всех возможных для данной системы выборочных функций  $X_m(t)$  (где  $m$  — номер реализации).

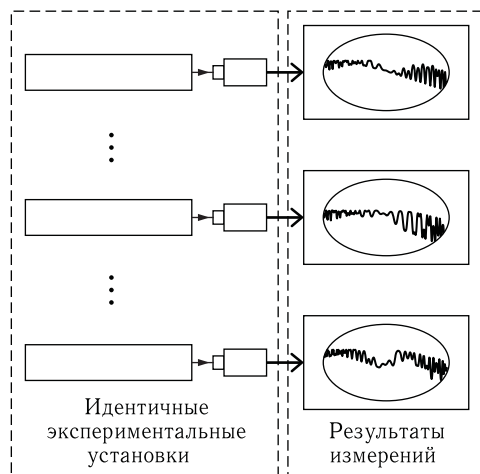


Рис. 1.6. Измерение ансамбля выборочных функций

Получение большого числа выборочных функций описанным выше методом часто сопряжено с серьезными практическими трудностями,

поскольку обычно экспериментатор имеет в своем распоряжении одну дорогостоящую установку, а не сто и не тысячу. В этом случае измерения повторяются на одной установке с некоторой разумной периодичностью. В результате будет также зарегистрировано семейство выборочных функций, которые можно рассматривать как компоненты единого случайного процесса.

Часто физическая система характеризуется набором из нескольких параметров, например силой тока  $i$ , напряжением  $u$ , зарядом  $q$ , которые также могут флуктуировать со временем. Семейства выборочных зависимостей  $i_m(t)$ ,  $u_m(t)$  и  $q_m(t)$  обычно считают компонентами различных случайных процессов (связанных между собой либо независимых). Однако в некоторых случаях удобно рассматривать эти флуктуации как составляющие единого многопараметрического процесса.

Естественным способом обработки выборочных зависимостей  $X_m(t)$ , равно как и функциональных преобразований  $f(X_m(t))$  от них, к которому часто прибегают экспериментаторы, является усреднение данных по времени, понимаемое как  $(1/T) \int_{t_1}^{t_1+T} f(X_m(t)) dt$ . Понятно, что результат такого усреднения зависит от выбора начала отсчета времени  $t_1$ , промежутка усреднения  $T$ , номера реализации и в общем случае может существенно отличаться от соответствующего среднего, найденного с использованием понятия вероятности.

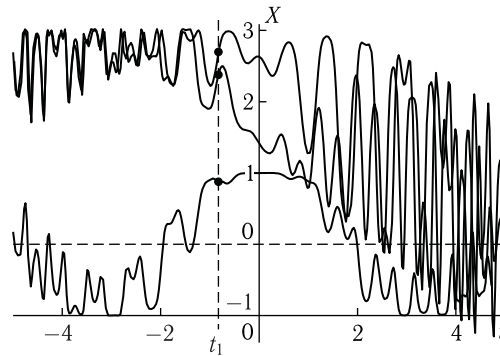


Рис. 1.7. Ансамбль выборочных функций

Вероятностное описание случайных процессов вводится следующим образом. Зарегистрируем значения случайного процесса  $X(t)$  в какой-либо фиксированный момент времени  $t_1$  (рис. 1.7). Каждая из большого количества выборочных функций в этот момент принимает какое-то численное значение, которое можно рассматривать как значение случайной переменной  $X_1 = X(t_1)$ . Иными словами, в фиксированный момент времени случайный процесс может рассматриваться как одномерная случайная переменная, которая может принимать различные

значения  $x_1$  (рис. 1.7). Далее можно рассматривать относительную частоту попадания полученных чисел в какой-либо интервал, вводить плотность вероятности и рассматривать другие статистические характеристики одномерной случайной величины  $X_1$  так, как это было сделано в пп. 1.1.1–1.1.4. Теперь зафиксируем значения случайного процесса  $X(t)$  в некоторые фиксированные моменты времени  $t_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Эти значения образуют совокупность случайных величин  $X_k$ . Будем полагать, что существует  $N$ -мерная полностью определенная плотность распределения  $p_{X_1, X_2, \dots, X_N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_N$  — значения, которые принимают случайные переменные  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_N)$ . Если такая плотность распределения известна для любого  $N$  (иногда ее обозначают как  $p_X(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$ ), случайный процесс считается полностью заданным. Эта плотность позволяет найти моменты любого порядка или другие статистические характеристики полученной совокупности случайных величин в соответствии с описанными в предыдущих параграфах процедурами. Полученные таким образом характеристики называются усредненными по ансамблю, чтобы отличать их от характеристик, которые получаются усреднением по времени.

### 1.12. Стационарные случайные процессы

Полное описание случайного процесса с использованием  $N$ -мерной плотности распределения далеко не всегда возможно и даже не всегда рационально. В большинстве практических приложений для вычисления величин, представляющих интерес для оптики, необходимо лишь частичное описание случайного процесса, когда оказывается важно знать плотности распределения только первого ( $p_X(x_1, t_1)$ ) и второго порядков ( $p_X(x_1, x_2, t_1, t_2)$ ). В соответствии с выражениями (1.8), (1.12) и (1.29) эти плотности задают средние значения  $\overline{X(t_1)}$ , дисперсии  $D = \overline{X^2(t_1)} - (\overline{X(t_1)})^2$  и корреляционную функцию  $\Gamma(t_1, t_2) = \overline{X(t_1)X(t_2)}$  случайных переменных  $X(t_1)$  и  $X(t_2)$  в разные моменты времени (параметр  $\Gamma(t_1, t_2)$  в теории случайных процессов называют не корреляцией, а корреляционной функцией). Такое описание становится особенно продуктивным, если сузить круг рассматриваемых случайных процессов. Одним из наиболее важных для оптики (равно как и для других разделов физики) типов случайных процессов является *стационарный случайный* процесс. Случайный процесс называется *строго (в узком смысле) стационарным*, если совместная плотность распределения  $N$ -го порядка,  $p_X(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N)$ , не зависит от выбора начала отсчета времени. То есть для любого временного интервала  $\tau$  имеем

$$p_X(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1, t_2, \dots, t_N) = p_X(x_1, x_2, \dots, x_N, t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_N + \tau). \quad (1.55)$$