Кравченко В.Ф.
Сиренко Ю.К.
Сиренко К.Ю.

Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. Моделирование и анализ переходных и установившихся процессов.

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.954 : 537.874
ББК 22.313
К 78

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 10-01-07011

Кравченко В.Ф., Сиренко Ю.К., Сиренко К.Ю. **Преобразование и излучение электромагнитных волн открытыми резонансными структурами. Моделирование и анализ переходных и установившихся процессов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1310-6.

Начально-краевые задачи, рассмотренные в книге, описывают неустановившиеся электромагнитные поля, формируемые компактными, волноводными и периодическими открытыми резонаторами. Набор объектов анализа (неоднородности регулярных волноводов, решетки, диэлектрические и металлические рассеиватели в свободном пространстве, излучатели импульсных волн), разработанные методы и вычислительные схемы, полученные математические и физические результаты представляют, по мнению авторов, ту основу, на которой возможно построение современной теории резонансного рассеяния несинусоидальных волн. Актуальность создания такой теории предопределяют перспективы практического использования сигналов различной длительности, потребность в надежной модельной проработке проектируемых узлов и устройств импульсной радиотехники, постоянно ощущающийся недостаток в достоверных качественных и количественных характеристиках процессов формирования, излучения, распространения и рассеяния импульсных и монохроматических электромагнитных волн.

Для аспирантов и исследователей, работающих в области теоретической и прикладной радиофизики, антенной и волноводной техники. Для студентов, специализирующихся в области прикладной математики и вычислительной физики.

ISBN 978-5-9221-1310-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

ГЛАВА I. **Основные положения и методы теории несинусоидальных электромагнитных волн** 11

1.1. Введение 11

1.2. Основные уравнения вычислительной электродинамики 12

1.2.1. Уравнения Максвелла (12). 1.2.2. Телеграфные и волновые уравнения (14). 1.2.3. Функции Боргниса (16).

1.3. Начально-краевые задачи и фундаментальные результаты теории . 17

1.3.1. Области анализа, краевые и начальные условия (17). 1.3.2. Постановка начально-краевых задач. Обобщенные функции и обобщенные решения (18). 1.3.3. Фундаментальные результаты теории (22).

1.4. Метод конечных разностей и поглощающие условия на виртуальных границах областей анализа 23

1.4.1. Метод конечных разностей. FDTD-метод (23).

ГЛАВА II. **Волноводные узлы и периодические структуры: точные поглощающие условия на виртуальных границах в поперечном сечении регулярных волноведущих трактов** 28

2.1. Введение 28

2.2. Компактный волноводный узел. Двухмерные скалярные задачи в декартовой системе координат 30

2.2.1. Преобразование эволюционного базиса сигнала в регулярном плоскопараллельном волноводе (30). 2.2.2. Нелокальные поглощающие условия (33). 2.2.3. Локальные поглощающие условия (36).

2.3. Аксиально-симметричные волноводные узлы. Двухмерные скалярные задачи в цилиндрической системе координат 38

2.3.1. Постановка и общие решения модельных начально-краевых задач (38). 2.3.2. Точные поглощающие условия (41).

2.4. Векторные задачи теории открытых волноводных резонаторов 43

2.4.1. Общие вопросы теории (43). 2.4.2. Точные поглощающие условия в векторных начально-краевых задачах (46).

2.5. Задачи электродинамической теории решеток 49

2.5.1. Скалярные задачи для идеальной отражательной решетки (50). 2.5.2. Транспортный оператор, определяющий пространственно-временные трансформации сигналов в канале Флоке, и точные условия для уходящих волн (51). 2.5.3. Условия для ограничения области анализа в векторных задачах электродинамической теории решеток (54).

ГЛАВА III. **Компактные неоднородности свободного пространства: виртуальные координатные границы в скалярных и векторных задачах теории рассеяния волн** 57

3.1. Введение 57

3.2. Точные условия для виртуальных границ в цилиндрической (полярной) системе координат 59

3.2.1. Трансформации эволюционного базиса расходящейся цилиндрической волны (59). 3.2.2. Условия излучения и нелокальные поглощающие условия (61).

3.3. Точные условия для виртуальных границ в декартовой системе координат. Проблема угловых точек и ее решение 62

3.3.1. Сокращение области анализа до полосы (62). 3.3.2. Угловые точки: корректная формулировка внутренних начально-краевых задач в точных локальных поглощающих условиях (65).

3.4. Векторные задачи: сферическая система координат 68

3.4.1. Постановка задач и предварительные построения (68). 3.4.2. Нелокальные условия излучения для функций Боргниса (72). 3.4.3. Точные условия излучения для компонент вектора напряженности электрического поля (78).

3.5. Аксиально-симметричные задачи: сферическая и цилиндрическая системы координат 80

3.5.1. Постановка начально-краевых задач и некоторые общие положения (80). 3.5.2. Точные условия излучения для виртуальной сферической границы (81). 3.5.3. Некоторые особенности реализации точных поглощающих условий (83).

ГЛАВА IV. **Излучение импульсных волн: модельные начально-краевые задачи и точные поглощающие условия** 85

4.1. Введение 85

4.2. Излучатели модельной геометрии с бесконечными фланцами 86

4.2.1. Постановка начально-краевых задач (86). 4.2.2. Точные поглощающие условия в зоне излучения антенны (86). 4.2.3. Точные поглощающие условия в поперечном сечении подводящих волноводов (89).

4.3. Излучение импульсных волн из плоскопараллельного волновода . . 91

4.3.1. Сокращение области анализа до полуплоскости и полосы (91). 4.3.2. Проблема угловых точек и точные поглощающие условия на координатной прямоугольной границе (95). 4.3.3. Виртуальная граница в поперечном сечении плоскопараллельного волновода (96).

4.4. Компактные антенны с волноводной питающей линией 97

ГЛАВА V. **Возможные расширения, перспективы, нерешенные задачи** 99

5.1. Введение 99

5.2. Проблемы больших и отдаленных источников поля 100

5.2.1. Проходной волноводный резонатор. Двухмерные скалярные задачи (101). 5.2.2. Компактные неоднородности. Формулировка модифицированных задач в терминах вторичного поля (104). 5.2.3. Поле заданных источников в полом волноводе произвольного поперечного сечения (106). 5.2.4. Определение поля падающей волны в задачах о компактных неоднородностях свободного пространства (109).

5.3. Каскады «элементарных» неоднородностей 111

5.3.1. Эволюционный базис сигнала и операторы преобразования (111). 5.3.2. Уравнения операторного метода в задачах для каскадных соединений «элементарных» неоднородностей (115).

5.4. Эволюционные базисы уходящих волн в областях с однородным и неоднородным заполнением 117

ГЛАВА VI. **Исследование открытых резонаторов методами временной области** . . . 122

6.1. Введение . . . 122

6.2. Теоретическое обоснование подхода . . . 123

6.2.1. Начально-краевые и краевые задачи теории открытых компактных резонаторов (123). 6.2.2. Пространственно-частотные представления неустановившихся полей (126).

6.3. Методологические основы исследования . . . 128

6.3.1. Предварительный качественный анализ (128). 6.3.2. Выбор источников поля при постановке вычислительных экспериментов (132). 6.3.3. Представление и анализ результатов счета (136).

6.4. Примеры численной реализации подхода . . . 138

6.4.1. Открытые резонаторы классической конфигурации (138). 6.4.2. Квазиоптические открытые резонаторы с зеркалами-решетками (140).

ГЛАВА VII. **Аксиально-симметричные волноводные трансформаторы** 149

7.1. Введение . . . 149

7.2. Общие положения . . . 150

7.2.1. Электродинамические характеристики волноводных узлов (150). 7.2.2. Тестовые задачи (153).

7.3. Диапазонные свойства простых неоднородностей . . . 156

7.3.1. Ступенчатые и гладкие переходы. Модовое расслоение сверхширокополосных импульсов (156). 7.3.2. Конусные заглушки в круглых и коаксиальных волноводах. Частотно-модовое расслоение сверхширокополосных импульсов (162).

7.4. Щелевые резонансы . . . 165

7.4.1. Поперечные щели на внутреннем и внешнем проводниках коаксиального волновода (166). 7.4.2. Эффекты сильного преобразования и полного отражения TM_{01}-волны на расширении круглого волновода с тонкими продольными щелями (171). 7.4.3. Аксиально-симметричные развороты (175).

ГЛАВА VIII. **Аксиально-симметричные излучатели импульсных и монохроматических волн** . . . 179

8.1. Введение . . . 179

8.2. Общие положения . . . 180

8.2.1. Электродинамические характеристики антенн (180). 8.2.2. Тестовые задачи (184).

8.3. Монополи . . . 185

8.3.1. Излучение TM_{0n}-волн (185). 8.3.2. Излучение TE_{0n}-волн (197).

8.4. Зеркальные антенны . . . 203

8.5. Щелевые резонансы в аксиально-симметричных излучающих структурах . . . 207

8.6. Резонансные антенны . . . 215

8.6.1. Излучение из полуконфокального резонатора с полупрозрачным плоским зеркалом (215). 8.6.2. Дисковые диэлектрические резонаторы на монополе, продолжающем центральный проводник коаксиальной питающей линии (219).

ГЛАВА IX. **Плоские модели открытых электродинамических структур** 225

9.1. Введение 225

9.2. Преобразование поверхностных волн в объемные: диэлектрические волноводы и компактные неоднородности свободного пространства . . . 228

9.2.1. Система «диэлектрический планарный волновод – цилиндрический диэлектрический резонатор» (228). 9.2.2. Система «диэлектрический планарный волновод – решетка» (229).

9.3. Излучение E-поляризованных волн из плоскопараллельного волновода с диэлектрическим стержнем 234

9.4. Секционированный параболический рефлектор 240

9.5. Открытые резонаторы и резонансные антенны 245

9.5.1. Разрежение спектра высокодобротных свободных колебаний поля в резонаторах с классической геометрией (245). 9.5.2. Излучатели, реализующие в подводящем тракте эффект сильного преобразования H_{01}-волны в H_{0m}-волну, $m > 1$ (251).

ГЛАВА X. **Специальные и прикладные задачи** 256

10.1. Введение 256

10.2. Формирование коротких электромагнитных импульсов 257

10.2.1. Расчет формирующей линии для излучателей мощных пикосекундных импульсов (257). 10.2.2. Новая схема формирования коротких импульсов (262).

10.3. Модельный синтез компрессоров мощности 266

10.4. Периодические диаграммообразующие структуры 275

10.4.1. Резонансные антенны с полупрозрачными зеркалами-решетками (275). 10.4.2. Двухмерные модели фазированных антенных решеток (288).

ЛИТЕРАТУРА 304

ПЕРЕЧЕНЬ ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ 313

Посвящается выдающимся ученым,
академикам НАН Украины
Владимиру Логвиновичу Рвачёву
и Виктору Петровичу Шестопалову

Предисловие

Современная методология получения новых знаний, основными составляющими которой являются математическое моделирование и вычислительный эксперимент [1, 2], реализуется в теории электромагнитного поля через решение краевых (частотная область) и начально-краевых (временная область) задач для уравнений Максвелла. Направление, связанное с исследованием процессов излучения, распространения и рассеяния импульсных волн [3–10], развивается в последние годы более интенсивно. Прежде всего, потому, что для проектирования ряда перспективных устройств техники связи, электроники и радиолокации потребовались надежные сведения о пространственно-временных и пространственно-частотных трансформациях поля в достаточно сложных электродинамических структурах, а возможности традиционных подходов частотной области [11–26] в этом отношении либо существенно ограничены, либо уже исчерпаны. В подходах временной области привлекает также и то, что они:

- свободны от ряда идеализаций, присущих частотной области;
- универсальны — ограничения на геометрические и материальные параметры рассматриваемых объектов минимальны;
- позволяют строить явные вычислительные схемы, которые не требуют обращения каких-либо операторов и могут быть реализованы за приемлемые промежутки времени на современных компьютерах;
- приводят к результатам, которые легко переводятся в стандартный набор характеристик частотной области.

Вместе с тем, в теории неустановившихся электромагнитных полей существует ряд проблем, не получивших к настоящему моменту времени универсальных, обоснованных и практически реализуемых решений, и это сказывается на качестве модельных построений, ограничивает возможности методов временной области по изучению физики переходных процессов и закономерностей пространственно-временных трансформаций импульсных волн. Это, прежде всего, проблема корректного и эффективного ограничения пространства счета [9, 10] в так называемых открытых задачах, т. е. в задачах, область анализа которых уходит на бесконечность вдоль одного или нескольких пространственных направлений. Перечень можно продолжить проблемой дальней зоны, проблемой больших и отдаленных источников поля и др. [9].

Книга посвящена математическому моделированию и физическому анализу переходных и установившихся процессов в открытых резонансных электродинамических структурах, формирующих, направляющих, рассеивающих и излучающих импульсные и монохроматические электромагнитные волны. Ее основные темы:

- точные поглощающие условия, построение которых позволяет существенно продвинуться в решении ряда общих теоретических проблем вычислительной электродинамики (главы II–V);
- пространственно-временные и пространственно-частотные трансформации электромагнитного поля в условиях возможного резонансного рассеяния волн (главы VI–X).

Известные эвристические и приближенные решения проблемы, связанной с переходом к конечным областям анализа в открытых задачах временной области, базируются, в основном, на использовании так называемых Absorbing Boundary Conditions (ABCs) [27–31] и Perfectly Matched Layers (PMLs) [32–34]. Главный недостаток этих решений — непрогнозируемое поведение вычислительных ошибок при больших значениях времени наблюдения t и, как следствие, отсутствие гарантий правильности получаемых результатов в ситуациях, связанных с резонансным рассеянием волн. В книге развит подход, позволяющий объективно оценить и минимизировать погрешности, возникающие при замене открытых начально-краевых задач задачами закрытыми. Его основу составляют построение и включение в вычислительную схему метода конечных разностей точных поглощающих условий, т. е. условий, добавление которых к оригинальной начально-краевой задаче никак не сказывается на ее решении. Коротко историю этого подхода можно изложить следующим образом. В 1986 г. А. Р. Майков, А. Г. Свешников и С. А. Якунин публикуют работу [35], в которой первыми формулируют точные нелокальные условия для виртуальных границ в поперечном сечении регулярных полубесконечных полых волноводов — каналов, по которым распространяются сигналы, формируемые каким-либо волноводным узлом. Позднее (см., например, работы [10, 36–42]) подход из [35], в основе которого лежит использование условий излучения для пространственно-временных амплитуд парциальных составляющих (мод) несинусоидальных волн, уходящих от области локализации эффективных источников и рассеивателей, был модифицирован и развит применительно к самым разным задачам теоретической и прикладной радиофизики. Рассмотрены волноводные и антенные задачи; задачи анализа и синтеза квазиоптических открытых дисперсионных резонаторов, задачи распространения волн в среде, окружающей человека в его повседневной деятельности, и т. д. Для ряда частных случаев строго решены проблемы нелокальности и угловых точек — точек пересечения виртуальных координатных границ. Эффективность и корректность подхода подтверждена результатами вычислительных экспериментов и решением тестовых задач.

Аналитические результаты этой работы (см. главы II–V: нелокальные и локальные точные поглощающие условия для различных структур и в различных системах координат; алгоритмы решения проблемы дальней зоны и проблемы больших и отдаленных источников поля; пространственно-временной аналог метода обобщенных матриц рассеяния и др.) ориентированы на использование в вычислительных схемах метода конечных разностей. Действительная история и теория этого метода, конечно же, гораздо богаче тех кратких и упрощенных версий, которые обычно излагаются в изданиях «electromagnetic community».

Finite-Difference Time-Domain Method [9] (FDTD-метод), с появлением которого в 1966 г. (см. каноническую работу K. S. Yee [43]) вполне справедливо связывают начало вычислительного бума, — пример хорошо продуманной реализации известных принципов при дискретизации роторных уравнений Максвелла, реализации, порожденной требованиями практики, появлением реальных перспектив осуществления огромных объемов вычислений за приемлемый промежуток времени. Но работа [43] не вызвала лавины теоретических результатов, как это часто утверждают. Правильнее было бы сказать, что она способствовала существенному расширению круга исследователей, владеющих основами метода, способных применить его без грубых ошибок и грамотно распорядиться ресурсами современных компьютеров при получении конкретных данных, характеризующих конкретные электродинамические элементы и узлы. Серьезно теорией конечно-разностных методов и разработкой принципов их использования в прикладной математике и вычислительной физике занимались те, чьи имена, к сожалению, мы не найдем ни в одном из обзоров, ни в одной из обобщающих работ (см., например, [9]), посвященных FDTD-методу.

J. L. Volakis и D. B. Davidson — редакторы раздела EM Programmer's Notebook в журнале Antennas & Propagation Magazine — в предисловии к статье [44] характеризуют FDTD-метод как «one of the workhorses of computational electromagnetics». Конечно же, в этих словах — только признание надежности и полезности соответствующего подхода, но на практике ему действительно чаще всего отводится лишь рутинная, объемная счетная работа. Вместе с тем, хорошо подготовленный вычислительный эксперимент может превращать алгоритмы метода конечных разностей в универсальный, эффективный и достаточно тонкий инструмент получения новых знаний о физике переходных и установившихся процессов. Обоснованию этого утверждения посвящены пять заключительных глав книги. Наиболее интересные результаты этих глав перечислены ниже.

• Разработан и реализован новый подход к анализу спектральных характеристик открытых компактных, волноводных и периодических резонаторов методами временной области (глава VI).

• Впервые строгими методами временной области подробно исследованы щелевые резонансы — полуволновые и четвертьволновые резонансы на TEM-волнах в узких радиальных и коаксиальных щелях идеальных проводников. Возбуждение таких резонансов позволяет существенно изменять основные характеристики простых аксиально-симметричных волноводных узлов и всенаправленных антенн стандартной конфигурации (главы VII и VIII).

• Впервые широко представлены сведения об основных электродинамических характеристиках (амплитудно-частотных и импульсных) канонических аксиально-симметричных излучателей TE_{0n}- и TM_{0n}-волн (монополей, зеркальных и резонансных антенн) — положено начало формированию «библиотеки элементарных излучателей», обращение к которой может упростить и ускорить решение многих прикладных задач (глава VIII).

• В рамках плоских моделей проанализированы открытые электродинамические структуры (излучатели, работающие на эффекте преобразования поверхностных волн в объемные; сверхширокополосные и резонансные антенны; резонаторы с существенно разреженным спектром; и т.д.), каждую из которых можно рассматривать в качестве прототипа при модельном синтезе новых узлов и устройств резонансной квазиоптики, антенной техники, вакуумной и твердотельной электроники (глава IX).

• Решены специальные и прикладные задачи, связанные с анализом и синтезом резонансных излучателей мощных коротких радиоимпульсов, компрессоров мощности, фазированных антенных решеток, и т.д. (глава X).

Книга снабжена файловым приложением, включающим **.exe**-файлы, запуск которых позволяет наблюдать (в динамическом режиме) за пространственно-временными трансформациями электромагнитного поля. Файловое приложение к книге — папка **Book_Files** в архиве **Book_Files.rar** — размещено на сайте Института радиофизики и электроники НАН Украины по адресу http://www.ire.kharkov.ua/downloads/Book_Files.rar и автоматически загружается при активации соответствующей ссылки.

Папка **Book_Files** содержит четыре папки (**Figures_EXE_07**, **Figures_EXE_08**, **Figures_EXE_09** и **Figures_EXE_10**), в каждую из которых включены **.exe**-файлы, дополняющие иллюстративный материал к главам VII, VIII, IX и X. Группа цифр и буквенных символов, следующих за идентификатором B, определяет рисунок или фрагмент рисунка, с которым данный файл связан. Так, например, файлу B_07-24-A.exe отвечает фрагмент a двадцать четвертого рисунка из главы VII (рис. 7.24, a).

.exe-файлы запускаются двойным щелчком, а закрываются нажатием кнопки «Закрыть» (в поле картинки) или кнопки «Esc» на клавиатуре.

Мы благодарим за помощь наших коллег, сотрудников отдела математической физики и отдела теории дифракции и дифракционной электроники Института радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова Национальной академии наук Украины Анну Игоревну Амосову, Людмилу Георгиевну Величко, Вадима Леонидовича Пазынина, Елену Сергеевну Шафалюк, Наталью Петровну Яшину. Большая часть материала, включенного в книгу, — это результат нашей совместной работы в последние несколько лет.

В. Ф. Кравченко, *Ю. К. Сиренко*, *К. Ю. Сиренко*

Москва–Харьков, 2009

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И МЕТОДЫ ТЕОРИИ НЕСИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1.1. Введение

В семидесятые годы прошлого столетия академик А. А. Самарский определил роль математического моделирования и вычислительного эксперимента в науке как основных составляющих незадействованной пока еще в полной мере, ресурсосберегающей, безопасной, универсальной и эффективной методологии получения новых знаний [1]. Методологии, сглаживающей извечный конфликт между фундаментальной наукой и наукой прикладной, сокращающей до пренебрежимо малых величин отрыв теории от эксперимента. Смысл одного из основных утверждений А. А. Самарского сводился к тому, что главной заботой моделирования как научной дисциплины должно стать снабжение моделей развитым «интеллектуальным ядром», способным обеспечить в процессе исследования качественное и количественное пополнение соответствующего банка знаний. Пример — математическая физика, в уравнения и задачи которой закладываются известные сведения об окружающем нас «физическом» мире. Закладываются так, что, решая эти задачи, мы можем существенно расширить наши представления о том или ином явлении, подтвердить или опровергнуть выдвинутые предположения и гипотезы.

В вычислительной электродинамике есть немало задач, без удовлетворительного решения которых невозможно строить модели, отвечающие современным требованиям теории и практики. Часть из них непосредственно связана с одной из основных тем книги: построением условий, позволяющих эффективно ограничивать пространство счета конечно-разностных методов при численном решении так называемых открытых задач, т. е. задач с неклассическими (неограниченными) областями анализа. Соответствующая проблема формулируется достаточно просто: необходимо провести эквивалентную замену оригинальной открытой начально-краевой задачи закрытой задачей. Но это математическая проблема, и корректно решить ее можно только математическими средствами. Использование подходов физического уровня строгости (см., например, классические работы [27, 28]) приводит к результатам, достоверность и надежность которых может быть гарантирована только в исключительных ситуациях.

В данной главе помещены известные сведения, необходимые для решения основных задач работы. Ее второй раздел посвящен описанию двухмерных скалярных и трехмерных векторных уравнений вычислительной электродинамики, т. е.

уравнений, начально-краевые и краевые задачи для которых позволяют моделировать пространственно-временные и пространственно-частотные трансформации электромагнитных полей в процессе их формирования, излучения, распространения и рассеяния. В следующем разделе рассмотрены классическая и обобщенная постановки анализируемых задач (геометрия областей анализа, стандартные граничные и начальные условия, общие и фундаментальные решения, классы корректности и т.д.) и особенности математической техники, используемой при их решении (элементы теории обобщенных функций). Тема четвертого раздела — метод конечных разностей и проблема ограничения его расчетного пространства с использованием так называемых поглощающих условий (Absorbing Boundary Conditions — ABCs).

1.2. Основные уравнения вычислительной электродинамики

1.2.1. Уравнения Максвелла. В основе всех теоретических построений в радиофизике лежит система уравнений Максвелла, дополненная материальными уравнениями и уравнением непрерывности (уравнением закона сохранения заряда). Для локально неоднородных, изотропных, немагнитных и недисперсных сред распространения волн (именно такие среды рассматриваются в книге) соответствующие уравнения можно записать в виде:

$$\eta_0 \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\eta_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0\,, \quad \operatorname{div} (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho, \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \operatorname{div} (\sigma \mathbf{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(g,t) = \{E_x, E_y, E_z\}$ и $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}(g,t) = \{H_x, H_y, H_z\}$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; $\eta_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ — импеданс свободного пространства; ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные вакуума; $\mathbf{J} = \eta_0 \mathbf{j}$; $\mathbf{j}(g,t)$ — вектор плотности сторонних токов; $\sigma = \eta_0 \sigma_0$; $\varepsilon \equiv \varepsilon(g) \geqslant 1$ и $\sigma_0 \equiv \sigma_0(g) \geqslant 0$ — относительная диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость локально неоднородной среды распространения волн; $\rho = \rho_0/\varepsilon_0$; $\rho_0(g,t)$ — объемная плотность индуцированных и сторонних электрических зарядов; «время» t имеет размерность длины — это произведение истинного времени на скорость распространения света в вакууме; $g = \{x,y,z\}$ ($g = \{\rho,\phi,z\}$ или $g = \{r,\vartheta,\phi\}$) — точка пространства $\mathbf{R}^3$; x, y, z — прямоугольные декартовы координаты, ρ, ϕ, z и r, ϑ, ϕ — цилиндрические и сферические координаты.

Если ρ в (1.2), (1.3) представить в виде суммы двух слагаемых ρ_1 и ρ_2, отвечающих соответственно индуцированным и сторонним электрическим зарядам, то уравнения непрерывности можно записать для каждого из слагаемых в отдельности: индуцированным зарядам ρ_1 отвечает ток проводимости $\sigma\mathbf{E}$, а сторонним зарядам ρ_2 — сторонний ток $\mathbf{J}$. В отсутствие сторонних токов и зарядов индуцированные электрические заряды в однородной проводящей среде чрезвычайно быстро исчезают (релаксируют).

Первое уравнение (1.2) следует из второго уравнения (1.1), если только $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0|_{t=0}$. Второе уравнение (1.2) следует из первого уравнения (1.1) и уравнения (1.3), если только $\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho|_{t=0}$. Уравнение (1.3) следует из первого уравнения (1.1) и второго уравнения (1.2). Все это означает, что дивергентные уравнения системы (1.1)–(1.3) являются, по существу, условиями, налагаемыми на начальные данные задачи, а начальные данные для $\mathbf{E}$ и ρ должны быть согласованы [45]. Уравнение (1.3) согласовывает источники (сторонние токи и сторонние электрические заряды), порождающие электромагнитное поле, во все моменты времени наблюдения t. При правильной постановке задач все шесть компонент векторов напряженности поля определяются роторными уравнениями (1.1), которые в прямоугольных декартовых координатах принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_0 E_x + j_x, \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_0 E_y + j_y, \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_0 E_z + j_z, \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z} = -\eta_0\dfrac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\eta_0\dfrac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -\eta_0\dfrac{\partial H_z}{\partial t}. \end{cases}$$

В цилиндрических и сферических координатах — соответственно

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial H_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial H_\phi}{\partial z} = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_\rho}{\partial t} + \sigma_0 E_\rho + j_\rho, \\ \dfrac{\partial H_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial H_z}{\partial \rho} = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_\phi}{\partial t} + \sigma_0 E_\phi + j_\phi, \\ \dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial H_\rho}{\partial \phi}\right] = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_0 E_z + j_z, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial E_z}{\partial \phi} - \dfrac{\partial E_\phi}{\partial z} = -\eta_0\dfrac{\partial H_\rho}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial E_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial \rho} = -\eta_0\dfrac{\partial H_\phi}{\partial t}, \\ \dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial E_\rho}{\partial \phi}\right] = -\eta_0\dfrac{\partial H_z}{\partial t} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\left[\dfrac{\partial(H_\phi\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial H_\vartheta}{\partial\phi}\right] = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma_0 E_r + j_r, \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial H_r}{\partial\phi} - \dfrac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}\right] = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_\vartheta}{\partial t} + \sigma_0 E_\vartheta + j_\vartheta, \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(rH_\vartheta)}{\partial r} - \dfrac{\partial H_r}{\partial\vartheta}\right] = \varepsilon\eta_0^{-1}\dfrac{\partial E_\phi}{\partial t} + \sigma_0 E_\phi + j_\phi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\left[\dfrac{\partial(E_\phi\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial E_\vartheta}{\partial\phi}\right] = -\eta_0\dfrac{\partial H_r}{\partial t}, \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{1}{\sin\vartheta}\dfrac{\partial E_r}{\partial\phi} - \dfrac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}\right] = -\eta_0\dfrac{\partial H_\vartheta}{\partial t}, \\ \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial(rE_\vartheta)}{\partial r} - \dfrac{\partial E_r}{\partial\vartheta}\right] = -\eta_0\dfrac{\partial H_\phi}{\partial t}. \end{cases}$$

1.2.2. Телеграфные и волновые уравнения. Геометрия большей части модельных задач, т.е. задач, на которых отрабатываются детали математической техники и приемы эффективного счета, ведется поиск и анализ основных закономерностей и специфических особенностей в пространственно-временных трансформациях полей, достаточно проста. Это позволяет в ряде случаев редуцировать векторные трехмерные задачи для уравнений (1.1) до скалярных двухмерных или трехмерных задач. Так, например, в областях вариации координат $g = \{x, y, z\}$, где $\varepsilon(g) = \mathrm{const}$ и $\sigma(g) = \mathrm{const}$, и при однородных вдоль оси x источниках получаем $\partial/\partial x \equiv 0$, и общая задача для уравнений (1.1) разбивается на две взаимно дополняющие одна другую задачи для телеграфных уравнений:

$$\left[-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] E_x(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{\partial J_x}{\partial t}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\eta_0^{-1}\frac{\partial E_x}{\partial z}, \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = \eta_0^{-1}\frac{\partial E_x}{\partial y} \tag{1.5}$$

и

$$\left[-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] H_x(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{\partial j_y}{\partial z} - \frac{\partial j_z}{\partial y}, \tag{1.6}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y + J_y = \eta_0\frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + J_z = -\eta_0\frac{\partial H_x}{\partial y}. \tag{1.7}$$

Поле $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}$ $(E_y = E_z = H_x = j_y = j_z = 0)$, которое определяется решением $E_x(g,t)$ уравнения (1.4) и пересчетными формулами (1.5), называют E-поляризованным, а поле $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}$ $(H_y = H_z = E_x = j_x = 0)$, которое определяется уравнениями (1.6), (1.7) (основная неизвестная функция — $H_x(g,t)$), — H-поляризованным. Если поле одной поляризации в процессе распространения (рассеяния, излучения и т.д.) не порождает поле противоположной поляризации, то говорят, что поляризации разделяются, и соответствующие краевые или начально-краевые задачи решают отдельно для E- и H-случаев. Подобные ситуации реализуются, например, в задачах для плоскопараллельных открытых волноводных резонаторов и одномерно-периодических решеток, возбуждаемых наклонно падающей плоской волной. Переход от векторных задач к скалярным возможен и тогда, когда материальные параметры среды ε и σ являются функциями координат y и z. Уравнения, описывающие E-поляризованное поле (см. (1.4), (1.5)), в этом случае остаются неизменными, а задача для H-поляризованного поля усложняется и не всегда ее можно свести к определению одной функции $H_x(g,t)$.

В цилиндрической системе координат $g = \{\rho, \phi, x\}$ E-поляризованное поле $(\partial/\partial x \equiv 0$ и $E_\rho = E_\phi = H_x = j_\rho = j_\phi \equiv 0)$ описывается следующими скалярными уравнениями:

$$\left[-\varepsilon(g)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right] E_x(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{\partial J_x}{\partial t}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial t} = -\eta_0^{-1}\frac{1}{\rho}\frac{\partial E_x}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial H_\phi}{\partial t} = \eta_0^{-1}\frac{\partial E_x}{\partial \rho}. \tag{1.9}$$

В случае H-поляризации поля ($H_\rho = H_\phi = E_x = j_x = 0$) при $\varepsilon = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ — уравнениями

$$\left[-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]H_x(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial j_p}{\partial\phi} - \frac{\partial(\rho j_\phi)}{\partial\rho}\right], \tag{1.10}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} + \sigma E_\rho + J_\rho = \frac{\eta_0}{\rho}\frac{\partial H_x}{\partial\phi}, \quad \varepsilon\frac{\partial E_\phi}{\partial t} + \sigma E_\phi + J_\phi = -\eta_0\frac{\partial H_x}{\partial\rho}. \tag{1.11}$$

Аксиально-симметричные структуры в цилиндрической системе координат $g = \{\rho,\, \phi,\, z\}$ допускают раздельное рассмотрение TE_{0n}- ($\partial/\partial\phi \equiv 0$ и $E_\rho = E_z = H_\phi = j_\rho = j_z \equiv 0$) и TM_{0n}-волн ($H_\rho = H_z = E_\phi = j_\phi \equiv 0$). Для TE_{0n}-волн из (1.1) получаем

$$\left[-\varepsilon(g)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\right]E_\phi(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{\partial J_\phi}{\partial t}, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial t} = \eta_0^{-1}\frac{\partial E_\phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\eta_0^{-1}\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial\rho}, \tag{1.13}$$

а для TM_{0n}-волн при $\varepsilon = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$:

$$\left[-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\right)\right]H_\phi(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{\partial j_z}{\partial\rho} - \frac{\partial j_\rho}{\partial z}, \tag{1.14}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_\rho}{\partial t} + \sigma E_\rho + J_\rho = -\eta_0\frac{\partial H_\phi}{\partial z}, \quad \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z + J_z = \frac{\eta_0}{\rho}\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial\rho}. \tag{1.15}$$

Отметим, что уравнения (1.6), (1.7) и (1.14), (1.15) позволяют анализировать также и электромагнитные поля в средах, проводимость которых есть функция времени ($\sigma = \sigma(t)$). Этот факт будет использован в ряде специальных задач из последних глав книги.

В сферической системе координат TE_{0n}-волны ($\partial/\partial\phi \equiv 0$ и $E_r = E_\vartheta = H_\phi = j_r = j_\vartheta \equiv 0$) описываются уравнениями

$$\left[-\varepsilon(g)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\right]E_\phi(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{\partial J_\phi}{\partial t}, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = -\frac{1}{\eta_0 r\sin\vartheta}\frac{\partial(E_\phi\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}, \quad \frac{\partial H_\vartheta}{\partial t} = \frac{1}{\eta_0 r}\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r}, \tag{1.17}$$

а TM_{0n}-волны ($H_r = H_\vartheta = E_\phi = j_\phi \equiv 0$) при $\varepsilon = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ — уравнениями

$$\left[-\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\right)\right]H_\phi(g,t) = F(g,t) \equiv \frac{1}{r}\left[\frac{\partial j_r}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(rj_\vartheta)}{\partial r}\right], \tag{1.18}$$

$$\varepsilon\frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r + J_r = \frac{\eta_0}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(H_\phi\sin\vartheta)}{\partial\vartheta}, \quad \varepsilon\frac{\partial E_\vartheta}{\partial t} + \sigma E_\vartheta + J_\vartheta = -\frac{\eta_0}{r}\frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r}. \tag{1.19}$$

В общем же случае вектор-функции $\mathbf{E}(g,t)$ и $\mathbf{H}(g,t)$ находятся либо непосредственно из (1.1), либо из уравнений, вытекающих из системы (1.1) после серии простейших преобразований (исключение ряда неизвестных, переход к различного рода потенциалам и т. п.). В этой книге, обычно, рассматриваются следующие векторные задачи, эквивалентные (1.1):

$$\begin{cases} \left[\Delta - \operatorname{grad}\operatorname{div} - \varepsilon(g)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g)\dfrac{\partial}{\partial t}\right]\mathbf{E}(g,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{J}(g,t) \equiv \mathbf{F}(g,t), \quad g \in \mathbf{R}^3, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(g,t) = -\dfrac{1}{\eta_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}(g,t), \end{cases} \tag{1.20}$$

Δ — оператор Лапласа, в прямоугольных декартовых координатах он записывается в виде

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1.2.3. Функции Боргниса. При построении точных поглощающих условий наибольший интерес представляет часть пространства $\mathbf{R}^3$, в которой заряды ρ в момент времени $t = 0$ отсутствовали, а $\varepsilon = 1$, $\sigma = 0$ и $\mathbf{J} = 0$. Здесь $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$ и задачи (1.20) упрощаются:

$$\begin{cases} \left[\Delta - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\mathbf{E}(g,t) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{H}(g,t) = -\dfrac{1}{\eta_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}(g,t). \end{cases} \tag{1.21}$$

Если воспользоваться скалярными функциями Боргниса [6, 16] $U^E(g,t)$ и $U^H(g,t)$ такими, что

$$\left[\Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\frac{\partial U^{E,H}(g,t)}{\partial t} = 0,$$

то общее решение задач (1.21) можно представить в виде

$$E_x = \frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial y \partial t}, \quad E_y = \frac{\partial^2 U^E}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial x \partial t}, \quad E_z = \frac{\partial^2 U^E}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^E}{\partial t^2},$$

$$\eta_0 H_x = \frac{\partial^2 U^E}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial x \partial z}, \quad \eta_0 H_y = -\frac{\partial^2 U^E}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 U^H}{\partial y \partial z}, \quad \eta_0 H_z = \frac{\partial^2 U^H}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U^H}{\partial t^2}. \tag{1.22}$$

Поле $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}^E$, определяемое формулами (1.22) при $U^H \equiv 0$, называют полем TM-волн относительно оси z. В нем продольная компонента H_z вектора напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ равна нулю. К полю $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}^H$ TE-волн (здесь $E_z = 0$) приходим, полагая в (1.22) $U^E \equiv 0$.

Функции Боргниса можно так же эффективно использовать и в двух других основных системах координат: цилиндрической (поля TM- и TE-волн относительно оси z) и сферической (поля TM- и TE-волн относительно оси r) [6]. Соответствующие представления сохраняют силу и в более общем случае (дивергентные поля), чем тот, который рассмотрен выше. Допускается также наличие определенным образом ориентированных сторонних токов ($J_x = J_y \equiv 0$ — в прямоугольной декартовой системе координат), но в этом случае однородное волновое уравнение относительно U^E заменяется неоднородным.

1.3. Начально-краевые задачи и фундаментальные результаты теории

1.3.1. Области анализа, краевые и начальные условия. Область анализа $\mathbf{Q}$ в трехмерных векторных задачах представляет собой часть пространства $\mathbf{R}^3$, ограниченную поверхностями $\mathbf{S}$ — границами областей $\operatorname{int}\mathbf{S}$, занятых идеальным металлом: $\mathbf{Q}=\mathbf{R}^3\backslash\overline{\operatorname{int}\mathbf{S}}$.

Адекватная физически реализуемым ситуациям математическая постановка задач должна включать в себя основные уравнения, начальные и краевые условия. Система краевых условий формируется на основе следующих известных и очевидных фактов [10, 38, 45].

• На поверхности $\mathbf{S}$ идеальных проводников тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля равна нулю во все моменты времени наблюдения t:

$$E_{tg}\left(g,t\right)\big|_{g\in\mathbf{S}}=0,\quad t\geqslant 0. \tag{1.23}$$

• В окрестности сингулярных точек внешних и внутренних границ области $\mathbf{Q}$ (точек, где касательные и нормали не определены) плотность энергии поля должна быть пространственно интегрируемой.

• Если область $\mathbf{Q}$ не является ограниченной, а поле $\{\mathbf{E}\left(g,t\right),\mathbf{H}\left(g,t\right)\}$ порождается источниками с ограниченными в $\mathbf{Q}$ носителями, то для любых конечных интервалов $(0,T)$, $T<\infty$, изменения времени наблюдения t можно построить достаточно удаленную от источников виртуальную границу $\mathbf{M}\subset\mathbf{Q}$ такую, что

$$\{\mathbf{E}\left(g,t\right),\mathbf{H}\left(g,t\right)\}\big|_{g\in\mathbf{M},\,t\in(0;T)}=0. \tag{1.24}$$

• В аксиально-симметричных задачах (в задачах, где $\partial/\partial\phi\equiv 0$) в точках g оси симметрии z (в точках g таких, что $\rho=0$) не равны нулю тождественно только H_z- или E_z-компоненты поля.

Кроме того, на поверхности $\mathbf{S}^{\varepsilon,\sigma}$, где материальные свойства среды (кусочно-непрерывные функции $\varepsilon(g)$ и $\sigma(g)$, $g\in\mathbf{R}^3$) терпят разрыв, должны быть непрерывны тангенциальные составляющие $E_{tg}\left(g,t\right)$ и $H_{tg}\left(g,t\right)$ векторов напряженности электрического ($\mathbf{E}$) и магнитного ($\mathbf{H}$) полей. Непрерывны здесь и нормальные составляющие $\varepsilon\varepsilon_0E_{nr}\left(g,t\right)$ и $\mu_0H_{nr}\left(g,t\right)$ векторов электрической и магнитной индукции.

Из (1.23) и (1.1) следует

$$H_{nr}\left(g,t\right)\big|_{g\in\mathbf{S}}=0\quad\text{и}\quad\frac{\partial H_{tg}\left(g,t\right)}{\partial\mathbf{n}}\big|_{g\in\mathbf{S}}=0,\quad t\geqslant 0,$$

$\mathbf{n}$ — внешняя (по отношению к области $\mathbf{Q}$) нормаль. Что касается функции $H_{tg}\left(g,t\right)\big|_{g\in\mathbf{S}}$, то она определяет так называемые поверхностные токи, порождаемые на $\mathbf{S}$ электромагнитным полем $\{\mathbf{E},\mathbf{H}\}$.

Начальные (в момент времени $t=0$) условия задают исходное состояние системы, изменяющейся затем (в моменты времени $t>0$) по правилам, определяемым дифференциальными уравнениями и краевыми условиями. Задание начальных состояний $\mathbf{E}\left(g,0\right)$ и $\mathbf{H}\left(g,0\right)$ в системе (1.1) эквивалентно заданию $\mathbf{E}\left(g,0\right)$ и $\left[\partial\mathbf{E}\left(g,t\right)\right]/\partial t\big|_{t=0}$ ($\mathbf{H}\left(g,0\right)$ и $\left[\partial\mathbf{H}\left(g,t\right)/\partial t\right]\big|_{t=0}$) в дифференциальных формах второго порядка, в которые трансформируется (1.1) при исключении из рассмотрения вектора $\mathbf{H}$ (вектора $\mathbf{E}$). Так, например, уравнение из (1.20) относительно неизвестной функции $\mathbf{E}(g,t)$ должно быть снабжено начальными условиями

$$\mathbf{E}(g,0)=\boldsymbol{\varphi}(g), \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(g,t)\Big|_{t=0}=\boldsymbol{\psi}(g), \quad g\in\overline{\mathbf{Q}}. \tag{1.25}$$

Вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(g)$, $\boldsymbol{\psi}(g)$ и $\mathbf{F}(g,t)$, $t>0$ (функции мгновенных и токовых источников) имеют, как правило, ограниченный в замыкании области $\mathbf{Q}$ носитель. Токовые источники разделяют иногда на жесткие и мягкие [9]: мягкие источники не имеют материальных носителей и поэтому не рассеивают приходящие на них электромагнитные волны. Мгновенные источники используются обычно для задания импульсных волн $\mathbf{U}^i(g,t)$, возбуждающих какую-либо электродинамическую структуру: $\boldsymbol{\varphi}(g)=\mathbf{U}^i(g,0)$ и $\boldsymbol{\psi}(g)=\left[\partial\mathbf{U}^i(g,t)\right]/\partial t\big|_{t=0}$. Волна $\mathbf{U}^i(g,t)$ должна удовлетворять соответствующему волновому уравнению и принципу причинности. Важно проследить также, чтобы к моменту времени $t=0$ она еще не успела подойти к границам рассеивающих объектов.

Последнее требование, очевидно, невыполнимо при возбуждении бесконечных структур (решеток, например; см. раздел 2.5) плоскими импульсными волнами, направление распространения которых отличается от нормального по отношению к некоторой плоской бесконечно протяженной границе. Такие волны к любому моменту времени успевают «замести» какую-то часть поверхности рассеивателя, и поэтому корректное в математическом отношении моделирование процесса невозможно: данные, необходимые для постановки начально-краевой задачи, определяются, по сути дела, ее решением.

1.3.2. Постановка начально-краевых задач. Обобщенные функции и обобщенные решения. Рассмотрим в качестве примера, характерного для большинства ситуаций, анализируемых в дальнейшем, следующую, одну из самых простых задач теории несинусоидальных волн. Для геометрий, представленных на рис. 1.1 своими сечениями плоскостью $x=0$ (все объекты и источники однородны вдоль оси x, т.е. $\partial/\partial x\equiv 0$), задачи, описывающие переходные состояния E-поляризованного поля (см. подраздел 1.2.2), сводятся к отысканию решения

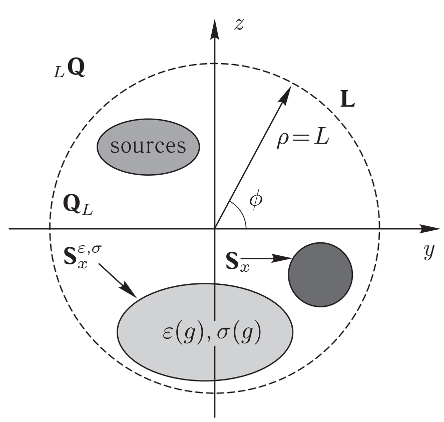

Рис. 1.1. Геометрия задачи (1.26)–(1.28): $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_L\cup{}_L\mathbf{Q}\cup\mathbf{L}$

$U(g,t) = E_x(g,t)$, $g = \{y,z\}$ двухмерного телеграфного уравнения

$$P_{\varepsilon,\sigma}[U] \equiv \left[-\varepsilon(g)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] U(g,t) = F(g,t), \qquad g \in \mathbf{Q} = \mathbf{R}^2 \backslash \overline{\operatorname{int}\mathbf{S}_x}, \quad t > 0, \tag{1.26}$$

удовлетворяющего граничным условиям Дирихле

$$U(g,t)\big|_{g\in\mathbf{S}_x} = 0, \quad t > 0 \tag{1.27}$$

(см. (1.23); граница $\mathbf{S}_x$ — след поверхности $\mathbf{S}$ на плоскости $x = 0$ — предполагается достаточно гладкой) и начальным данным (см. (1.25))

$$U(g,0) = \varphi(g), \quad \left.\frac{\partial U(g,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(g), \quad g \in \overline{\mathbf{Q}}. \tag{1.28}$$

Носители функций $\varepsilon(g) - 1$, $\sigma(g)$, $\varphi(g)$, $\psi(g)$, $F(g,t)$ и область $\operatorname{int}\mathbf{S}_x$ — ограничены.

Известно (см., например, [46]), что при любых $F(g,t) \in \mathbf{C}^2(t \geqslant 0)$, $\varphi(g) \in \mathbf{C}^3(\mathbf{R}^2)$ и $\psi(g) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{R}^2)$ классическое решение $U(g,t) \in \mathbf{C}^2(t > 0) \cap \mathbf{C}^1(t \geqslant 0)$ задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbf{R}^2$ (задачи (1.26)–(1.28) в $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^2$ при $\varepsilon(g) \equiv 1, \sigma(g) \equiv 0$) существует, единственно и выражается формулой Пуассона

$$U(g,t) = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{S}(g,\,t-\tau)} \frac{F(p,\tau)\,dp\,d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |g-p|^2}} + \int\limits_{\mathbf{S}(g,t)} \frac{\psi(p)\,dp}{\sqrt{t^2 - |g-p|^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathbf{S}(g,t)} \frac{\varphi(p)\,dp}{\sqrt{t^2 - |g-p|^2}}\right\}.$$

Эта формула (здесь $\mathbf{S}(g,a)$ — открытый круг радиуса a и с центром в точке g) дает явное решение задачи о возбуждении однородного пространства $\mathbf{R}^2$. Аналогичные решения можно получить также и для задач о возбуждения регулярных плоскопараллельных волноводов [46] и регулярных каналов Флоке [24] — воображаемых волноведущих трактов, которые выделяются при анализе периодических структур.

При классической постановке задач (1.26)–(1.28) (все уравнения удовлетворяются в каждой точке области их задания) решения $U(g,t)$ должны иметь столько непрерывных производных, сколько их входит в уравнения, и это влечет за собой наложение жестких ограничений по гладкости на все данные задачи. Переход к обобщенным постановкам и обобщенным решениям больше соответствует физической сущности явлений, описываемых дифференциальными уравнениями, и заметно упрощает технику анализа задач.

Обобщенная функция является обобщением классического понятия функции. Грубо говоря, обобщенная функция определяется своими средними значениями в окрестности каждой точки, и это позволяет выразить в корректной математической форме многие идеализированные понятия, такие, например, как интенсивность мгновенного точечного источника и т. п. Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал (f,γ) на пространстве основных функций $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$ — пространстве всех финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbf{R}^n$ функций γ. Линейное множество $\widetilde{\mathbf{D}} = \widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$ всех обобщенных функций, после определения сходимости в нем как слабой сходимости последовательности функционалов, становится полным пространством.

Обобщенная функция f обращается в нуль в области $\mathbf{G} \subset \mathbf{R}^n$, если $(f, \gamma) = 0$ для всех $\gamma \in \mathbf{D}(\mathbf{G})$. В соответствии с этим определением вводятся определения равных в области $\mathbf{G}$ функций и обобщенных решений дифференциальных уравнений, краевых и начально-краевых задач. Так, например, на обобщенных решениях U уравнения (1.26) нулевыми должны быть значения функционала $(P_{\varepsilon,\sigma}[U] - F, \gamma)$. для всех $\gamma \in \mathbf{D}(\mathbf{Q} \times (0; \infty))$. Необходимые для раскрытия подобных функционалов операции с обобщенными функциями вводятся посредством простых равенств:

• равенством $(f(Ap+b),\ \gamma(p)) = |\det A|^{-1} \left(f(g),\ \gamma\left[A^{-1}(g-b)\right]\right)$ — при линейной замене переменных ($g \in \mathbf{R}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$, $g = Ap + b$, $\det A \neq 0$ — неособенное линейное преобразование пространства $\mathbf{R}^n$ на себя);

• равенством $(\beta f, \gamma) = (f, \beta\gamma)$ — при определении произведения βf обобщенной функции $f \in \widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$ с бесконечно дифференцируемой функцией β;

• равенством $(\partial^\alpha f, \gamma) = (-1)^{|\alpha|} (f, \partial^\alpha \gamma)$ — при определении обобщенной производной $\partial^\alpha f$ обобщенной функции $f \in \widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$ ($\alpha = \{\alpha_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ — мультииндекс, через $\partial^\alpha \gamma$ обозначена производная функции γ порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$);

• равенством $(f_1(g) \times f_2(p), \gamma) = (f_1(g),\ (f_2(p),\ \gamma(g,p)))$ — при определении прямого произведения $f_1 \times f_2$ обобщенных функций $f_1(g) \in \widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$ и $f_2(p) \in \widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^m)$, $\gamma(g,p) \in \mathbf{D}(\mathbf{R}^{n+m})$;

• равенством $((f_1 * f_2), \gamma) = (f_1(g) f_2(p),\ \gamma(g+p))$ — при определении свертки $(f_1 * f_2)$ двух обобщенных функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ из $\widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$, $\gamma \in \mathbf{D}(\mathbf{R}^n)$; и т. д.

Последовательное, подробное и доступное описание свойств обобщенных функций и операций над ними дано в книге [46].

Из множества обобщенных функций наибольший интерес представляют простейшие из них — те, которые принято называть регулярными. Регулярные обобщенные функции порождаются локально интегрируемыми в $\mathbf{R}^n$ (в $\mathbf{G} \subset \mathbf{R^n}$) функциями $f(g)$ и определяются формулой

$$(f, \gamma) = \int\limits_{\mathbf{R}^n(\mathbf{G})} f(g)\,\gamma(g)\,dg, \quad \gamma \in \mathbf{D}(\mathbf{R}^n) \quad (\gamma \in \mathbf{D}(\mathbf{G})). \tag{1.29}$$

Между локально интегрируемыми функциями и регулярными обобщенными функциями существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому с последними можно обращаться, как с обычными функциями точки, что в большей мере отвечает запросам функционального анализа и теории краевых задач [47]. В классе $\widetilde{\mathbf{D}}_r(\mathbf{G})$ регулярных обобщенных функций не все элементы являются бесконечно дифференцируемыми. Согласно своим дифференциальным свойствам, они могут рассматриваться как элементы различных функциональных пространств, в частности, пространств $\mathbf{W}_m^l(\mathbf{G})$, состоящих из функций $f(g) \in \mathbf{L}_m(\mathbf{G})$, $g \in \mathbf{G}$, имеющих обобщенные производные до порядка l включительно из $\mathbf{L}_m(\mathbf{G})$, и др. (см. перечень основных обозначений).

Из сингулярных обобщенных функций (обобщенных функций, не являющихся регулярными) ниже используются только δ-функция Дирака — $\delta(g)$ — и ее обобщенные производные. В тех ситуациях, когда присутствие подобных сингулярных функций препятствует корректному проведению стандартных математических операций (численной реализации вычислительных схем, конечно-разностной аппроксимации начально-краевых задач и т. п.), регуляризация осуществляется заменой δ-функции подходящей локально интегрируемой δ-аппроксимирующей функцией («шапочкой» $\omega_\varepsilon(g)$ и др.; см. [46]). В общем же случае регуляризация произвольной обобщенной функции $f(g) \in \widetilde{\mathbf{D}}$ осуществляется по схеме $f_\varepsilon(g) = (f * \omega_\varepsilon) = (f(p), \omega_\varepsilon(g-p))$: получаемая в результате свертки бесконечно дифференцируемая функция $f_\varepsilon(g)$ сходится к $f(g)$ (сходимость в $\widetilde{\mathbf{D}}$) при $\varepsilon \to 0$.

Ряд преобразований в первых пяти главах книги базируется на понятии фундаментального решения (функции влияния) дифференциального оператора $B[U]$: обобщенная функция $G(g) \in \widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$ есть фундаментальное решение оператора $B[U]$, если $B[G] = \delta(g)$. С помощью обобщенной функции G строится решение уравнений $B(U) = f$ с произвольной правой частью f: $U = (G * f)$. Это решение единственно в классе тех обобщенных функций из $\widetilde{\mathbf{D}}(\mathbf{R}^n)$, для которых существует свертка с G. По такой же схеме возможно частичное обращение дифференциального оператора какой-либо задачи с последующим эквивалентным представлением последней в форме интегро-дифференциального уравнения. Наиболее полно в аналитической форме фундаментальные решения для конкретных классических дифференциальных операторов представлены в книгах [6, 46, 48, 49]. Приведем те из них, которые могут быть использованы при исследовании задач электродинамики несинусоидальных волн:

- $\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right] G(g,t) = \delta(g,t)\,,\ G(g,t) = -\dfrac{\chi(t-|g|)}{2\pi\sqrt{t^2-|g|^2}},\ g = \{y,z\};$
- $\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right] G(g,t) = \delta(g,t)\,, \quad G(g,t) = -\dfrac{\chi(t)}{2\pi}\,\delta(t^2-|g|^2),$ $g = \{x,y,z\};$
- $\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2\right] G(z,t) = \delta(z,t)\,,\ G(z,t) = -\dfrac{\chi(t-|z|)}{2}\,J_0\left(m\sqrt{t^2-z^2}\right);$
- $\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - 2m\,\dfrac{\partial}{\partial t}\right] G(g,t) = \delta(g,t),$
  $G(g,t) = -\dfrac{e^{-mt}\chi(at-|g|)}{2\pi a^2\sqrt{t^2-|g|^2/a^2}}\,\mathrm{ch}\left(m\sqrt{t^2-|g|^2/a}\right);$
- $\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - 2m\dfrac{\partial}{\partial t}\right] G(g,t) = \delta(g,t),$
  $G(g,t) = -\dfrac{\chi(at)\,e^{-mt}\delta(a^2t^2-|g|^2)}{2\pi a} + \dfrac{me^{-mt}\chi(at-|g|)\,I_1\left(m\sqrt{t^2-|g|^2/a^2}\right)}{4\pi a^3\sqrt{t^2-|g|^2/a^2}};$
- $\left[-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2\right] G(t) = \delta(t)\,, \quad G(t) = \chi(t)\,\dfrac{\sin(at)}{a};$
- $\left[-\dfrac{\partial}{\partial t} + a\right] G(t) = \delta(t)\,, \quad G(t) = \chi(t)\,e^{-at}.$

Здесь χ — ступенчатая функция Хевисайда, J_m — функция Бесселя и $I_1(b) = -iJ_1(ib)$. Закрывая тему, укажем на работу [50], где сделан важный шаг к общему решению проблемы: при необременительных предположениях относительно гладкости функций ε и σ исследована структура сингулярной и регулярной частей фундаментального решения дифференциального оператора, отвечающего системе роторных уравнений Максвелла (1.1).

1.3.3. Фундаментальные результаты теории. Предположим, что функции источников $F(g,t)$ (при всех $t>0$), $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ задачи (1.26)–(1.28) финитны в $\mathbf{Q}$, а функции $\partial\varepsilon(g)/\partial y$, $\partial\varepsilon(g)/\partial z$ и $\sigma(g)$, $g\in\mathbf{Q}$ — ограничены. Справедливо следующее утверждение [47].

Утверждение 1.1. *Пусть* $F(g,t)\in\mathbf{L}_{2,1}\left(\mathbf{Q}^T\right)$, $\varphi(g)\in\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\mathbf{Q})$, $\psi(g)\in\mathbf{L}_2(\mathbf{Q})$, $\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}\times(0;T)$, $(0;T)=\{t\colon 0<t<T<\infty\}$. *Тогда задачи* (1.26)–(1.28) *для всех* $t\in(0;T)$ *имеют обобщенное решение из энергетического класса, и в этом классе обобщенных решений справедлива теорема единственности.* $\triangleleft$

Под обобщенным решением из энергетического класса здесь подразумевается функция $U(g,t)$, принадлежащая $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\mathbf{Q})$ при любом $t\in(0;T)$ и непрерывно меняющаяся в зависимости от t в норме $\mathbf{W}_2^1(\mathbf{Q})$. Кроме того, производная $\partial U/\partial t$ должна существовать как элемент пространства $\mathbf{L}_2(\mathbf{Q})$ при любом $t\in[0;T]$ и непрерывно меняться по t в норме $\mathbf{L}_2(\mathbf{Q})$. Начальные условия (1.28) должны приниматься по непрерывности в пространствах $\overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\mathbf{Q})$ и $\mathbf{L}_2(\mathbf{Q})$ соответственно, а уравнение (1.26) — удовлетворяться в смысле тождества

$$\int\limits_{\mathbf{Q}^T}\left\{\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}U\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\gamma\right)-\sigma\left(\frac{\partial}{\partial t}U\right)\gamma-\left(\frac{\partial}{\partial y}U\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\gamma\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}U\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\gamma\right)\right\}dg\,dt+{}$$
$$+\int\limits_{\mathbf{Q}}\varepsilon\psi\gamma(g,0)\,dg=\int\limits_{\mathbf{Q}^T}F\,\gamma\,dg\,dt.$$

Здесь $\gamma=\gamma(g,t)$ — произвольный элемент из $\mathbf{W}_{2,0}^1\left(\mathbf{Q}^T\right)$ такой, что $\gamma(g,T)=0$. Это тождество получено формально из тождества

$$\left(P_{\varepsilon,\sigma}[U]-F,\,\gamma\right)=\int\limits_{\mathbf{Q}^T}\left(P_{\varepsilon,\sigma}[U]-F\right)\gamma\,dg\,dt=0$$

с помощью однократного интегрирования по частям в членах, содержащих вторые производные функции $U(g,t)$. В [47] доказано, что такое определение обобщенного решения имеет смысл и действительно является обобщением понятия классического решения.

Практически при тех же предположениях в [47] доказана однозначная разрешимость задач (1.26)–(1.28) и задач (1.26), (1.28) с граничными условиями импедансного типа в пространстве $\mathbf{W}_2^1\left(\mathbf{Q}^T\right)$. Класс обобщенных решений, который назван энергетическим, несколько уже класса обобщенных решений из $\mathbf{W}_2^1\left(\mathbf{Q}^T\right)$. Он интересен ввиду двух фактов [47]. Во-первых, именно здесь удается установить специфическое свойство гиперболических уравнений: доказать, что решение $U(g,t)$ имеет ровно те же дифференциальные свойства, которые предполагаются выполненными в начальный момент времени (продолжаемые начальные условия). Во-вторых, энергетический класс обобщенных решений является, в определенном смысле, главным среди остальных, что связано с его свойством, имеющим непосредственное отношение к закону сохранения энергии, – для решений $U(g,t)$ из этого класса должно быть выполнено энергетическое соотношение

$$\int\limits_{\mathbf{Q}} \left(\varepsilon \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + |\mathrm{grad}\, U|^2 \right) dg \Big|_0^T + 2 \int\limits_{\mathbf{Q}^T} \left(\sigma \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(F \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right) dg\, dt = 0. \quad (1.30)$$

Из подобных равенств и ограничений на коэффициенты в начально-краевых задачах различного типа выводятся энергетические оценки для U^2, $(\partial U/\partial t)^2$ и $|\mathrm{grad}\, U|^2$, играющие важную роль при доказательстве теорем единственности.

В работе [47] исследовано также увеличение гладкости решений и выяснено, когда такие решения имеют производные, входящие в уравнение: необходимы соответствующая гладкость данных и нужный порядок согласования начальных условий, граничных условий и уравнения. В утверждении 1.1 предполагается выполнение условий согласования нулевого порядка, что выразилось в требовании равенства нулю функции $\varphi(g)$ на границе $\mathbf{S}_x$ (требование $\varphi(g) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\mathbf{Q})$). Следующий порядок согласования учитывает обращение в нуль на $\mathbf{S}_x$ функции $\psi(g)$. Во втором порядке согласования речь должна уже идти о непротиворечивости на множестве точек $g \in \mathbf{S}_x$ граничного условия, начальных условий и самого уравнения (1.26). Все следующие порядки согласования повышают требования к данным задачи: обращение в нуль на $\mathbf{S}_x^T = \mathbf{S}_x \times (0;T)$ высших производных по t от U и т.д.

В связи с постановкой задач типа (1.26)–(1.28) следует упомянуть также хорошо известное (для классических решений) характеристическое свойство гиперболических уравнений — конечность скорости распространения возмущений. Начальное возмущение, сосредоточенное в какой-либо ограниченной подобласти области $\mathbf{Q}$, распространится в $\mathbf{Q}$ за время t на расстояние, не превышающее величину $\max\limits_{g \in \mathbf{Q}} \left[\varepsilon^{-1/2}(g) \right] \cdot t$.

1.4. Метод конечных разностей и поглощающие условия на виртуальных границах областей анализа

1.4.1. Метод конечных разностей. FDTD-метод. Популярности метода конечных разностей способствовали его универсальность и простота в реализации, и не случайно всплеск ее пришелся на то время, когда появилась возможность оперативно получать и обрабатывать огромные числовые массивы, визуализировать моделируемый процесс и оптимизировать поток снимаемой информации в соответствии с реальным человеческим восприятием. Нельзя не отметить и фактор неоднозначности (для каждой задачи можно построить различные сходящиеся разностные схемы и для задач разных типов такие схемы существенно отличаются друг от друга), способствовавший вовлечению в круг занятых проблемой все большего числа исследователей.

Метод конечных разностей сводит различные задачи для дифференциальных уравнений к системам алгебраических уравнений, в которых неизвестными являются значения сеточных функций в вершинах сеток, покрывающих область анализа, и к изучению предельного перехода, когда длины сторон ячеек сеток стремятся к нулю. Он приводит к цели, если сеточные функции в пределе дают решение задачи. Такое сведение задачи к бесконечной последовательности вспомогательных конечномерных задач, определяющих приближенные решения (сеточные функции), неоднозначно для задач одного типа и неединообразно для задач различных типов.

Впервые метод был использован для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод ломаных или метод Эйлера). Его применения и исследования для уравнений в частных производных начались лишь в двадцатом веке. В математике метод конечных разностей является не только инструментом вычисления приближенных решений начально-краевых и краевых задач. С его помощью доказываются теоремы существования обобщенных решений, исследуется увеличение гладкости решений по мере увеличения гладкости всех данных и увеличения порядка их согласования [51]. Более того, именно на этом пути впервые удалось исследовать разрешимость гиперболических задач в различных функциональных пространствах при разумных предположениях о данных. Метод конечных разностей применим для решения очень широкого круга начально-краевых задач с самыми разными классическими краевыми условиями. В этот круг, в хорошо разработанную теорию обобщенных решений включаются и задачи теории электромагнитных волн.

При полноволновом анализе в электродинамике обычно дискретизируются шестикомпонентные векторные уравнения Максвелла. Так, например, классический алгоритм K. S. Yee [43] (FDTD-метод; его подробное изложение можно найти в работе [9]) представляет собой центрально-разностную аппроксимацию роторных уравнений Максвелла. Относительное «расположение» электрических и магнитных компонент напряженности поля определяется так называемой Yee-ячейкой. Конструкция последней удачно сочетается с требованиями вычислительной практики. В работах, последовавших за [43], схема Yee служила основой при активной экспансии метода в сфере актуальных инженерных задач электродинамики, основой для модификации метода в соответствии с классом рассматриваемых геометрий и средами распространения волн, основой для улучшения эксплуатационных характеристик метода и повышении его вычислительной эффективности.

Стандартная реализация FDTD-метода требует, как правило, больших объемов оперативной памяти вычислительных машин и не всегда может быть осуществлена в приемлемые промежутки времени. Понятна в связи с этим озабоченность многих необходимостью экономии машинных ресурсов, повышением вычислительной эффективности метода. Основные резервы здесь:

- в уменьшении количества неизвестных компонент поля, связанных уравнениями и насчитываемых в рамках элементарной ячейки;
- в гибком изменении схемы FDTD-метода, например, в резонансных ситуациях;
- в подстройке конфигурации ячеек к конкретным некоординатным границам;
- в уменьшении общего размера расчетного пространства за счет использования мнимых границ, слабо искажающих моделируемый процесс (см. ниже);
- в использовании преимуществ работы с параллельными виртуальными машинами.

Метод конечных разностей сводит простейшие из рассматриваемых в книге задач (см. задачи (1.26)–(1.28) для рассеивателей, геометрия которых изображена на рис. 1.1; $\sigma \equiv 0,\ t \in [0;T]$) к определению сеточных функций $\overline{u} = U(j,k,m) \approx U(y_j, z_k, t_m)$, удовлетворяющих разностным уравнениям (разностному аналогу уравнения (1.26))

$$\left[-\varepsilon(j,k)\, D_+^t D_-^t + D_+^y D_-^y + D_+^z D_-^z\right] \overline{u} = F(j,k,m) \tag{1.31}$$

в узлах сетки $g_{jk} = (y_j, z_k) \in \mathbf{Q}(h,T)$ на временных слоях $t_m = ml,\ m = 0,1,\ldots,M-1 = T/l$. К (1.31) необходимо добавить уравнения

$$\begin{cases} U(j,k,0) = \varphi(j,k), \quad U(j,k,1) = \varphi(j,k) + l\psi(j,k), \quad g_{jk} \in \mathbf{Q}(h,T), \\ U(j,k,m) = 0, \quad g_{jk} \in \mathbf{S}_x(h,T), \quad m = 0,1,\ldots,M-1 \end{cases} \tag{1.32}$$

(разностные аналоги начальных условий (1.28) и граничного условия (1.27)). Здесь $D_+{}^y[\overline{u}] = h^{-1}\left[U(j+1,k,m) - U(j,k,m)\right]$ и $D_-{}^y[\overline{u}] = h^{-1}\left[U(j,k,m) - U(j-1,k,m)\right]$ — стандартные операторы правой и левой разностных производных (то же самое, с очевидными изменениями, справедливо и для $D_\pm^z[\overline{u}],\ D_\pm^t[\overline{u}]$); $y_j = jh,\ z_k = kh,\ j,k = 0,\pm1,\ldots;\ h > 0$ и $l > 0$ — шаги сетки по пространственным переменным и по переменной времени; все сеточные функции $f(j,k)$ в узлах $g_{jk} \in \mathbf{Q}(h,T)$ строятся по $f(g)$, $g \in \mathbf{Q}$ как усреднения

$$f(j,k) = h^{-2} \int\limits_{\omega_h(j,k)} f(g)\,dg; \quad \omega_h(j,k) = \{g\colon jh < y < (j+1)h;\ kh < z < (k+1)h\};$$

$\mathbf{Q}(h,T)$ — объединение ячеек $\omega_h(j,k)$, принадлежащих $\mathbf{Q}(T)$; $\mathbf{S}_x(h,T)$ — граница множества $\mathbf{Q}(h,T)$; $\mathbf{Q}(T)$ — срез конуса влияния источников $F(g,t)$, $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ в области $\mathbf{Q}$ в момент времени $\tau > T$. Очевидно, что уравнения (1.31), (1.32) определяют функции $\overline{u}$ однозначно, а вычисление $\overline{u}$ не требует обращения каких-либо матричных операторов (явная схема).

Центральной частью теоретического анализа любых конечно-разностных схем является решение проблемы устойчивости. Схема устойчива (в какой-либо норме), если для приближенных решений $\overline{u}$ установлена равномерная относительно длин h и l ограниченность. Из устойчивости следует внутренняя сходимость последовательности $\{\overline{u}\}_{h,l}$, и для того чтобы предельная функция $\overline{u}$ оказалась решением исходной начально-краевой задачи, необходимо, чтобы разностные уравнения эту задачу аппроксимировали. Последнее требование выполнено в отношении задач (1.26)–(1.28) и (1.31), (1.32). Что касается устойчивости рассматриваемой схемы, то для ее исследования, так же как и в большинстве других ситуаций, наиболее удобными оказываются энергетические пространства, в которых исходная задача является корректно поставленной. В [47] на основе разностных аналогов энергетических неравенств доказана справедливость следующего утверждения.

Утверждение 1.2. *Пусть финитные в области* $\mathbf{Q}$ *функции* $F(g,t)$, $\varphi(g)$, $\psi(g)$ *и* $\varepsilon(g) - 1$ *таковы, что* $F(g,t) \in \mathbf{L}_{2,1}\left(\mathbf{Q}^T\right)$, $\varphi(g) \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\mathbf{Q})$, $\psi(g) \in \mathbf{L}_2(\mathbf{Q})$ *и* $\xi \leqslant \varepsilon^{-1}(g) \leqslant \eta$; $g \in \mathbf{Q}$, *а производные* $\partial\varepsilon(g)/\partial y$ *и* $\partial\varepsilon(g)/\partial z$ *— ограничены. Тогда нормы* $\mathbf{W}_2^1(\mathbf{Q}^T)$ *непрерывных полилинейных восполнений* $\widetilde{u}$ *решений* $\overline{u}$ *задачи* (1.31), (1.32) (*линейных по каждой переменной интерполяций сеточных функций* $\overline{u}$) *равномерно ограничены при любых* h *и* l, *удовлетворяющих одному* *из условий*

$$\frac{\eta\sqrt{2}}{\sqrt{\xi}}\,\frac{l}{h} < 1, \quad \text{или} \quad 2\sqrt{\eta}\,\frac{l}{h} < 1. \tag{1.33}$$

Последовательность $\{\widetilde{u}\}_{h,l}$ *при* $h, l \to 0$ *сходится слабо в* $\mathbf{W}_2^1(\mathbf{Q}^T)$ *и сильно в* $\mathbf{L}_2(\mathbf{Q}^T)$ *к решению* $U(g,t)$ *задачи* (1.26)–(1.28). ◁

1.4.2. Absorbing Boundary Conditions — ABCs. Эффективное ограничение размеров пространства счета при анализе начально-краевых задач, рассматриваемых в неограниченных областях, — одна из самых важных и сложных проблем не только в вычислительной электродинамике, но и в других областях физики, существенно опирающихся на математическое моделирование и вычислительный эксперимент. Известные сегодня варианты решения этой проблемы базируются на нескольких принципиально отличающихся подходах. Первый из них (см., например, работы [27, 28, 30, 31]), наиболее распространенный в практических расчетах, предполагает окружение области локализации источников и представляющей интерес части рассеивающих объектов мнимыми границами с так называемыми поглощающими условиями (ABCs) на них. Для решений U_0 однородного волнового уравнения $P_{1,0}\,[U_0] = 0$ (определение оператора $P_{\varepsilon,\sigma}\,[U]$ см. в формуле (1.26)), рассматриваемых в части пространства $z \geqslant 0$, простейшие из таких ABCs [27, 28] имеют вид $[\partial/\partial z - \partial/\partial t]U_0\big|_{z=0} = 0$ (первый порядок аппроксимации по углу прихода волны на границу $z = 0$) и $[\partial^2/\partial z\,\partial t - \partial^2/\partial t^2 + 0{,}5\partial^2/\partial y^2]U_0\big|_{z=0} = 0$ (второй порядок аппроксимации). Эти условия получены из физически прозрачных представлений о распространении пучка плоских комплексных волн в свободном пространстве в сторону уменьшающихся z и в точности зануляют коэффициент отражения по нормально падающей на границу парциальной составляющей пучка. При отклонении угла прихода от нормального коэффициент отражения по соответствующей парциальной составляющей растет: в меньшей степени — для более высокого порядка аппроксимации.

Реальные ситуации, очевидно, гораздо богаче на искажающие факторы, чем те модельные представления, в рамках которых получены локальные классические ABCs. Поэтому последние редко используются в первоначальном виде и модифицируются в соответствии с требованиями рассматриваемой задачи (ожидаемая точность вычислений, приемлемый размер пространства счета, характер неоднородности материальных параметров на условных границах и т.д.). Основой для модификации чаще всего служат эвристические соображения о структуре “взаимодействующего” с границей поля. Справедливость таких посылок косвенно подтверждается затем в рамках вычислительных экспериментов, используемых также для тестирования алгоритмов по точности и быстродействию, для выбора оптимальных значений свободных параметров метода. Так, в работе [30] предложена новая техника (суперпоглощение), которая улучшает любые известные поглощающие условия. Последние должны быть дважды использованы для различных тангенциальных компонент поля, разнесенных в элементарной ячейке FDTD-метода, а результат по определенной схеме перерассчитывается (как оказывается, с взаимоуничтожением ошибок) в охватываемом модификацией узком приграничном слое.

Желание усилить фактор поглощения, обеспечиваемый, например, ABC первого порядка аппроксимации, воплощается иногда в условиях, формальная запись которых имеет вид

$$\left[\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial z}-\beta_j\,\frac{\partial}{\partial t}-\alpha_j\right)\right]U_0\Big|_{z=0}=0, \tag{1.34}$$

β_j, α_j — свободные параметры. В работе [31] отмечено, что уже при $N=2$ и разумном выборе свободных параметров условия (1.34) оказываются заметно лучше классических ABCs первого и второго порядков аппроксимации.

Ряд плодотворных идей, способствовавших существенному расширению возможностей эффективного решения проблемы, выдвинули в своих работах J. P. Berenger [32, 33] (теория идеально согласованного с вакуумом слоя, «поглощающего» приходящие на него электромагнитные волны) и J. C. Olivier [52] (построение ABCs на базе точных соотношений теоремы о представлении поля излучения в свободном пространстве через эквивалентные токи на поверхности, охватывающей первичные и вторичные источники).

В работах [10, 35–38] в качестве точных ABCs предлагается использовать строгие условия излучения для вторичных полей, отнесенные к каким-либо координатным виртуальным границам, окружающим эффективные рассеиватели (компактные неоднородности свободного пространства или регулярного волноведущего тракта). Не опираясь ни на какие эвристические предположения о тонкой структуре поля вблизи воображаемой границы и точно соответствуя физической сущности моделируемого математическими средствами процесса, они этот процесс не искажают и не связаны жестко с таким неудобным свободным параметром, как общий размер пространства счета.

Алгоритмы метода конечных разностей — универсальный и очень мощный инструмент получения конкретных сведений о сложных электродинамических объектах. Этот инструмент достаточно надежен и эффективен в том случае, когда решаются классические (закрытые, корректно поставленные) модельные начально-краевые задачи. Полностью сохранить уникальные эксплутационные характеристики метода при переходе к анализу открытых задач можно только одним способом — заменив оригинальную открытую задачу эквивалентной закрытой задачей. Тема следующих четырех глав книги — осуществление такой замены в случае наиболее распространенных задач электродинамики несинусоидальных волн. В основе развиваемого подхода — идеи и технические приемы, частично уже апробированные в работах [10, 35–42].

ГЛАВА II

ВОЛНОВОДНЫЕ УЗЛЫ И ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ: ТОЧНЫЕ ПОГЛОЩАЮЩИЕ УСЛОВИЯ НА ВИРТУАЛЬНЫХ ГРАНИЦАХ В ПОПЕРЕЧНОМ СЕЧЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ ТРАКТОВ

2.1. Введение

В этой и следующих главах рассматриваются модельные скалярные и векторные начально-краевые задачи для двухмерных и трехмерных телеграфных и волновых уравнений, описывающих рассеяние несинусоидальных волн на компактных объектах в неограниченных областях $\mathbf{Q}$ пространств $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$. Основная проблема, возникающая при решении подобных задач конечно-разностными методами, связана с постоянным расширением носителя скалярной или векторной функции $U(g,t)$, $g \in \mathbf{Q}$, $t \geqslant 0$ (она определяет результирующее поле) при возрастании времени наблюдения t. Область анализа можно ограничить, зафиксировав где-либо в $\mathbf{Q}$ воображаемую границу $\mathbf{L}$ (см. рис. 1.1) и дополнив исходную начально-краевую задачу условием

$$M\left[U(g,t)\right]\Big|_{g\in\mathbf{L}} = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Здесь M — интегро-дифференциальный оператор на $\mathbf{L}$. При такой модификации задачи должны быть выполнены, как минимум, следующие два требования:

а) условие (2.1) не изменяет классы корректности оригинальной задачи и ее дискретного аналога;

б) условие (2.1) слабо искажает физические процессы, моделируемые математическими средствами.

Около тридцати лет назад B. Engquist и A. Majda [27] и немного позже G. Mur [28] предложили для использования в (2.1) так называемые Absorbing Boundary Conditions — классические ABCs низших порядков аппроксимации. Требование (а) для этих условий оказывается выполненным, но требованию (б) они удовлетворяют только в одной ситуации: плоская комплексная волна падает на плоскую границу $\mathbf{L}$ под углом, близким к нормальному. Во всех других случаях волна $U(g,t)$, приходящая на $\mathbf{L}$, достаточно сильно отражается мнимой границей. Моделируемый процесс свободного (в соответствующей части пространства) распространения возмущения $U(g,t)$ искажается. Ошибки в вычислениях, обусловленные такими искажениями, не могут быть оценены аналитически.

Слишком много факторов влияет на их величину: тонкая структура поля $U(g,t)$ вблизи границы $\mathbf{L}$, расстояние между $\mathbf{L}$ и областью, где расположены источники и эффективные рассеиватели, время наблюдения t и т.д.

Известно огромное число попыток улучшить приближенные классические ABCs. Большая часть из них направлена на ослабление виртуальных (вычислительных) эффектов, вызванных присутствием мнимой границы $\mathbf{L}$. В этих попытках, как правило, о требовании (a) забывали, не страхуясь от возможных при такой модификации оригинальной корректно поставленной задачи негативных последствий: нарушения устойчивости конечно-разностной вычислительной схемы, непредсказуемого нарастания суммарных ошибок, наступления численной катастрофы.

Суть подхода к решению проблемы корректного и эффективного ограничения пространства счета конечно-разностных методов, который развивается в этой книге (см. также работы [10, 35–42]), заключается в следующем.

На первом его шаге выделяется регулярная область ${}_L\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\backslash(\mathbf{Q}_L \cup \mathbf{L})$, где волна $U(g,t)$ распространяется свободно, удаляясь от области $\mathbf{Q}_L$, охватывающей источники и рассеивающие объекты.

На втором шаге определяются строгие условия излучения для решения $U(g,t)$ исходной задачи в области ${}_L\mathbf{Q}$. Эти условия отражают общее свойство решения $U(g,t)$, отвечающего уходящей волне, и поэтому их использование в качестве точных поглощающих условий на границе $\mathbf{L}$, разделяющей области ${}_L\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}_L$, ничего не меняет в исходной задаче и не вносит дополнительных модельных искажений в изучаемый процесс. Оператор M задается транспортным оператором (см. работы [10, 38, 41, 42, 53–55]), который описывает пространственно-временные изменения эволюционного базиса сигнала $U(g,t)$ при его свободном распространении в регулярной области ${}_L\mathbf{Q}$. Вид оператора M определяется, в основном, геометрией области ${}_L\mathbf{Q}$, но его построение во всех случаях базируется на одной и той же последовательности технических приемов, широко используемых в теории гиперболических уравнений [4, 6, 10]:

• неполное разделение переменных в начально-краевых задачах для телеграфных или волновых уравнений;

• интегральные преобразования в задачах для одномерных уравнений типа Клейна–Гордона;

• решение вспомогательных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;

• обратные интегральные преобразования.

Реализация этой последовательности приводит, обычно, к нелокальным (в пространстве и во времени) условиям. Переход к локальным условиям осуществляется путем замены ряда интегральных форм дифференциальными формами с последующей формулировкой дополнительной, элементарной в вычислительном плане начально-краевой задачи относительно некоторой вспомогательной функции времени и поперечных координат.

На последнем, третьем шаге точные условия излучения, отнесенные на виртуальную координатную границу $\mathbf{L}$, корректно включаются в стандартную вычислительную схему метода конечных разностей. Область анализа (область дискретизации исходной начально-краевой задачи) сужается до $\mathbf{Q}_L$. Реализация алгоритма приводит к такому же простому и точному численному решению задачи для всех моментов времени наблюдения t, как и в случае физически закрытых областей $\mathbf{Q}_L$.

Если граница $\mathbf{L}$ является составной (пример — граница прямоугольной области в пространстве $\mathbf{R}^2$), возникает непростая в теоретическом плане проблема угловых точек. Для ее строгого решения в [10, 38, 39, 42] предложены универсальные математические процедуры.

Основные технические детали подхода подробно рассмотрены во втором разделе, где решены задачи о преобразовании E- и H-поляризованных несинусоидальных волн компактными волноводными узлами, геометрия, материальные параметры и источники возбуждения которых однородны вдоль оси x. Полученные здесь аналитические результаты без существенных изменений используются затем (третий раздел) в двухмерных задачах анализа аксиально-симметричных узлов, возбуждаемых TE_{0n}- и TM_{0n}-волнами. Проблемы, возникающие при полноволновом анализе неоднородностей волноведущих трактов (векторный случай), рассмотрены в четвертом разделе. Пятый раздел посвящен решению модельных задач электродинамической теории решеток — задач о компактных неоднородностях в плоскопараллельных (скалярный случай) и прямоугольных в поперечном сечении (векторный случай) каналах Флоке.

Материал, изложенный в главах II–V, раскрывает далеко не все возможности развиваемого подхода: в каждой из рассмотренных ситуаций незначительные изменения в технических деталях или в последовательности основных операций могут привести к результатам, существенно дополняющим представленные. Обновление ряда точных поглощающих условий — процесс постоянный. Его всегда будут стимулировать потребности вычислительной практики.

2.2. Компактный волноводный узел. Двухмерные скалярные задачи в декартовой системе координат

2.2.1. Преобразование эволюционного базиса сигнала в регулярном плоскопараллельном волноводе. Волноводный узел (волноводный трансформатор или открытый волноводный резонатор) — классический модельный объект электродинамики, изучение которого всегда связано с решением важных практических задач. В этом разделе рассматриваются узлы, исследование электромагнитных полей в которых сводится к решению двухмерных (в плоскости $y0z$) начально-краевых задач

$$\begin{cases} \left[-\varepsilon(g)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \sigma(g)\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right] U(g,t) = F(g,t), \quad t > 0, \quad g = \{y, z\} \in \mathbf{Q}, \\ U(g,t)\big|_{t=0} = \varphi(g), \quad \dfrac{\partial}{\partial t} U(g,t)\Big|_{t=0} = \psi(g), \quad g \in \overline{\mathbf{Q}}, \\ E_{tg}(p,t)\big|_{p=\{x,y,z\}\in\mathbf{S}} = 0, \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

т. е. узлы с постоянным в любой плоскости $x = \text{const}$ сечением. Пример геометрии такого узла дан на рис. 2.1 (волноводный тройник).

При $U(g,t) = E_x$ имеем $E_{tg}(p,t)\big|_{p\in\mathbf{S}} = U(g,t)\big|_{g\in\mathbf{S}_x}$, и задачи (2.2) отвечают случаю E-поляризации поля (см. п. 1.2.2). При $U(g,t) = H_x$ значения $E_{tg}(p,t)\big|_{p\in\mathbf{S}}$

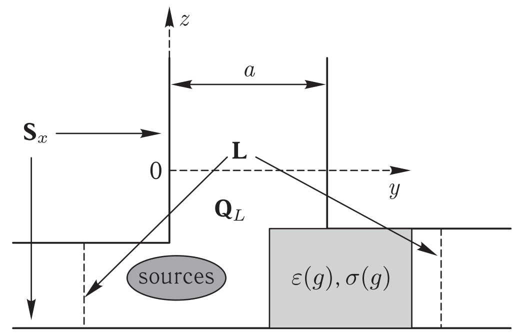

Рис. 2.1. Волноводный тройник

задаются производными $\partial U(g,t)/\partial\,\mathbf{n}|_{g\in\mathbf{S}_x}$, $\mathbf{n}$ — нормаль к контуру $\mathbf{S}_x$, и для кусочно-постоянных $\varepsilon(g)$, $\sigma(g)$ решения задач (2.2) определяют H-поляризованные поля. Область анализа $\mathbf{Q}$ — часть плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченная контурами $\mathbf{S}_x$. $\mathbf{S}=\mathbf{S}_x\times[|x|\leqslant\infty]$ — поверхность идеальных проводников. Предполагается, что финитные в замыкании области $\mathbf{Q}$ функции $F(g,t)$, $\varphi(g)=U^i(g,0)$, $\psi(g)= =\partial U^i(g,t)/\partial\,t\big|_{t=0}$ ($U^i(g,t)$ — падающая волна), $\sigma(g)$ и $\varepsilon(g)-1$ удовлетворяют условиям теоремы об однозначной разрешимости задач (2.2) в пространстве Соболева $\mathbf{W}_2^1(\mathbf{Q}^T)$, $\mathbf{Q}^T=\mathbf{Q}\times(0;T)$, $T<\infty$ (см. утверждение 1.1 и работу [47]). Их носители принадлежат множеству $\overline{\mathbf{Q}_L}\setminus\mathbf{L}$. В регулярных волноводах (в области ${}_L\mathbf{Q}=\mathbf{Q}\setminus(\mathbf{Q}_L\cup\mathbf{L})$), по которым поле, сформированное узлом, распространяется свободно и бесконечно далеко, источники и эффективные рассеиватели отсутствуют. Виртуальная граница $\mathbf{L}$ (на рис. 2.1 она обозначена штриховыми линиями) совпадает с поперечным сечением этих волноводов.

Остановимся в анализе на одном — вертикальном ($z>0$) — регулярном волноводе узла. Здесь $\varepsilon(g)\equiv 1$, а $\sigma(g)=\varphi(g)=\psi(g)=F(g,t)\equiv 0$. Предполагая, что возмущение $U(g,t)$ к моменту времени $t=0$ еще не достигло границы $z=0$, методом разделения переменных получаем следующее представление для решений $U(g,t)$ задач (2.2):

$$U(g,t)=\sum_n u_n(z,t)\,\mu_n(y),\quad z\geqslant 0,\quad 0\leqslant y\leqslant a,\quad t\geqslant 0,\quad n\in\{n\}\,. \tag{2.3}$$

Полные (в пространстве $\mathbf{L}_2(0;a)$ квадратично интегрируемых функций $f(y)$: $f(0)=f(a)=0$ или $df(y)/dy|_{y=0,a}=0$) ортонормированные системы поперечных функций $\{\mu_n(y)\}$ определяются нетривиальными решениями однородных (спектральных) задач

$$\begin{cases}\left[\dfrac{d^2}{dy^2}+\lambda_n^2\right]\mu_n(y)=0,\quad 0<y<a,\\ \mu_n(0)=\mu_n(a)=0\ \ (E-\text{случай})\quad\text{или}\quad d\mu_n(y)/dy|_{y=0,\,a}=0\ \ (H-\text{случай}),\end{cases} \tag{2.4}$$